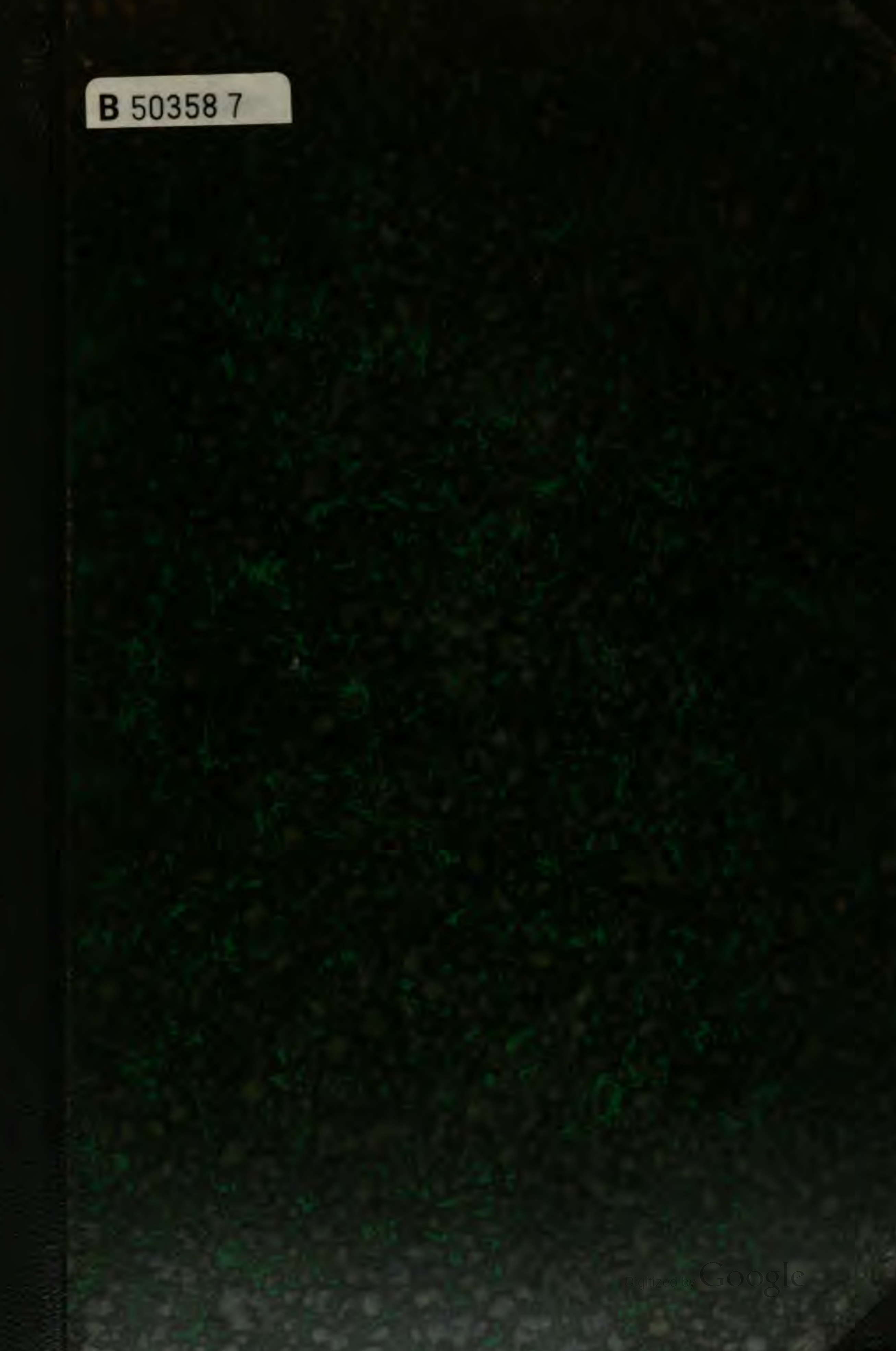

B 50358 7



1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

VON DER METHODE

DER

KLEINSTEN QUADRATE IM ALLGEMEINEN

UND

IN IHRER ANWENDUNG AUF DIE GEODÄSIE.

VON

P. A. HANSEN,

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTN.

Des VIII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº V.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1867.

Vom Verfasser übergeben den 10. Juli 1867.
Der Abdruck vollendet den 16. September 1867.

VON DER METHODE

DER

KLEINSTEN QUADRATE IM ALLGEMEINEN

UND

IN IHRER ANWENDUNG AUF DIE GEODÄSIE

VON

P. A. HANSEN.

Der Hauptzweck dieser Abhandlung ist die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Geodäsie, oder die Ausgleichung der Winkel eines Dreiecksnetzes, auf die Art darzulegen, die mir die geeignetste zu sein scheint. Zwar hat Gauss schon einen speciellen Fall dieser Anwendung in einer Abhandlung, die in Bezug auf die Sache selbst die erste war, niedergelegt*), während Bessel fast gleichzeitig seine Auflösung derselben Aufgabe veröffentlichen liess**). Später hat Bessel seine Auflösung der allgemeineren Aufgabe veröffentlicht***), und ich habe fast gleichzeitig eine wesentlich davon verschiedene Auflösung einer noch allgemeineren Aufgabe, aber kurz gefasst, und gleichsam nur im Scelet gegeben †).

Es ist namentlich diese letztgenannte Auflösung, die ich vollständig ausgearbeitet in der gegenwärtigen Abhandlung niedergelegt habe, und die sich von der Bessel'schen vielfach, unter andern dadurch unterscheidet, dass ich die unbestimmten Auflösungen von Systemen von linearischen Gleichungen, die Bessel verlangt, vollständig vermieden habe; ich bin anzunehmen geneigt, dass durch mein Verfahren eine grössere Kürze der auszuführenden Rechnungen erlangt wird. Auch habe ich nicht nur die Vorschriften zur Berechnung der Gewichte beliebiger Functionen der

*) Gauss, Supplementum theoriae combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae. Gottingae 1828.

**) Schum. A. N. B. VI. No. 121.

***) Bessel und Baeyer, Gradmessung in Ostpreussen und ihre Verbindung mit Preussischen und Russischen Dreiecksketten. Berlin 1838.

†) Schum. A. N. B. XVI. No. 361.

Unbekannten, die bei Bessel fehlen, vollständig entwickelt, sondern auch gezeigt, wie verfahren werden muss, wenn mehr wie Eine Grundlinie gemessen worden ist, oder wenn man das auszugleichende Dreiecksnetz an ein anderes, nebenliegendes, schon ausgeglichenes anschliessen will.

Bei der Ausgleichung eines grossen, aus vielen Dreiecken bestehenden Netzes ist es von Wichtigkeit, die anzuwendenden allgemeinen Formeln in solcher Darstellung und Aufeinanderfolge vor sich zu haben, dass man nie die vollständige Uebersicht verlieren kann, denn wenn dieser Umstand eintreten sollte, so ist er nur durch Verlust an Zeit und Arbeit zu heben. Aus diesem Grunde habe ich mich schon im Laufe der Ableitungen und während der Ausführung eines Beispiels bemüht, die Erklärungen möglichst vollständig zu geben, und schliesslich habe ich aus demselben Grunde noch eine Recapitulation aller Vorschriften und Formeln gegeben, die wohl ausserdem überflüssig gewesen wäre, von welcher mir aber schien, dass sie die Uebersichtlichkeit fördern möchte.

Wenn gleich die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Geodäsie den Hauptgrund zur Abfassung dieser Abhandlung bildete, so wollte ich doch nicht unterlassen diese Methode auch in ihrer Allgemeinheit, und in der ganzen Ausdehnung, die sie gegenwärtig besitzt, zu entwickeln, und dabei einen Weg zu verfolgen, den ich schon seit vielen Jahren überlegt habe. Gewöhnlich geht man bei der Ableitung dieser Methode im Allgemeinen von den allgemeinen Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung aus, aber es zeigt sich immer im Laufe der Entwickelungen, dass man damit nicht vollständig ausreicht, sondern immer in grösserem oder geringerem Maasse den Satz zu Hülfe nehmen muss, dass bei der Bestimmung Einer Unbekannten aus einer Anzahl von gleich guten Beobachtungen das arithmetische Mittel aus diesen der wahrscheinlichste Werth der Unbekannten sei. Da dieses sich so verhält, so nahm ich mir vor diesen Satz als Axiom an die Spitze der Ableitungen zu stellen, und aus demselben das Verfahren abzuleiten, welches zu befolgen ist, wenn die Werthe mehrerer Unbekannten aus Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit zu bestimmen sind, und die Zahl dieser Beobachtungen grösser ist wie die der Unbekannten. Ich wurde, wie sich voraussehen liess, auf diese Weise auf die Methode der kleinsten Quadrate hingeführt. Der Satz, welcher hiedurch bewiesen worden ist, lässt sich streng genommen wie folgt aussprechen:



»Mit demselben Recht, mit welchem man im ersteren, einfachsten Falle das arithmetische Mittel aus den Beobachtungen als den wahrscheinlichsten Werth der einzigen Unbekannten ansieht, muss man im anderen, allgemeinen Falle diejenigen Werthe der Unbekannten als die wahrscheinlichsten Werthe derselben betrachten, durch welche bewirkt wird, dass die Summe der mit ihren bez. Gewichten multiplicirten Quadrate der übrig bleibenden Fehler ein Minimum wird.«

Ich glaube, dass in Bezug auf die Methode der kleinsten Quadrate dieser Satz an der Grenze der streng beweisbaren Sätze liegt.

Während bei der Ableitung dieses Satzes sich für den Begriff des Gewichts einer Beobachtung oder eines Resultats aus Beobachtungen eine einfache und sachgemässe Erklärung darbietet, bleibt es ohne Weiteres unmöglich, die Relation zwischen den Gewichten und den relativen Genauigkeiten zweier oder mehrerer Beobachtungen festzustellen. Hiezu musste ich zwei bekannte Sätze aus den Elementen der Wahrscheinlichkeitsrechnung verwenden und mit dem obigen Axiom verbinden. Das Resultat, welches unter andern hieraus hervorging, ist das bekannte, nemlich dass die Gewichte den Quadraten der Genauigkeiten proportional sind. Es brauchten diese Untersuchungen wieder nur in der Annahme Einer Unbekannten ausgeführt zu werden, da die Folgerungen, die daraus entsprangen, ohne Weiteres auf eine beliebige Anzahl von Unbekannten ausgedehnt werden konnten. Aus diesem Grunde wurden sie vor der vollständigen Ableitung des oben angeführten Satzes dem Texte einverleibt.

Die Abhandlung behandelt der Reihe nach die folgenden Themata:



§. 1. Ermittelung des wahrscheinlichsten Werthes Einer Unbekannten aus Beobachtungen.

1.

Grundsatz.

»Wenn für die unmittelbare Bestimmung einer unbekannten Grösse mehrere von einander unabhängige Beobachtungen vorhanden sind, die alle unter gleichen Umständen und mit gleicher Sorgfalt angestellt worden sind, so ist der aus diesen Beobachtungen hervorgehende wahrscheinlichste Werth der Unbekannten das arithmetische Mittel aus allen diesen Beobachtungen.«

Man kann diesen Satz zwar nicht vollständig beweisen, aber es lässt sich vieles anführen, welches dafür spricht, dass er in der Natur der Sache begründet ist. Es kann strenge genommen nur bewiesen werden, dass man bei der Anwendung dieses Satzes durch die Vermehrung der Anzahl der Beobachtungen sich immer mehr und mehr dem wahren Werthe der Unbekannten nähert. Beobachtungen, die unter gleichen Umständen und mit gleicher Sorgfalt angestellt worden sind, müssen nothwendig als mit gleicher Genauigkeit begabt angesehen werden, und es muss daher gewiss das aus denselben hervorgehende wahrscheinlichste Resultat wenigstens eine symmetrische Function von allen durch die Beobachtungen erhaltenen Werthen sein. Die Summe aller dieser Werthe ist aber die einfachste symmetrische Function derselben, die man sich denken kann. Wenn nun die Unbekannte x genannt wird, und m Beobachtungen nach und nach n, n', n'', etc.

für x gegeben haben, so dass aus denselben nach und nach hervorgegangen ist,

$$x = n$$
$$x = n'$$
$$x = n'' \text{ etc.}$$

dann wird

$$mx = n + n' + n'' + \text{ etc.}$$

und hieraus

$$x = \frac{n + n' + n'' + \text{ etc.}}{m}$$

das ist, x wird gleich dem arithmetischen Mittel aus allen Beobachtungen.

Betrachten wir nun die Beschaffenheit des Fehlers, den wir begehen indem wir x durch die vorstehende Gleichung bestimmen. Seien der wahre Werth der Unbekannten w, und die wahren Fehler der Beobachtungen e, e', e'', etc., so dass

$$n = w + e, \quad n' = w + e', \quad n'' = w + e'', \quad \text{etc.}$$

wird, dann wird der Ausdruck des arithmetischen Mittels

$$x = w + \frac{e + e' + e'' + \text{ etc.}}{m}$$

Vorausgesetzt nun, dass kein Grund vorhanden ist um anzunehmen, dass gleiche positive und negative Fehler verschiedene Wahrscheinlichkeiten haben, muss die Summe $e + e' + e'' +$ etc. sich um desto mehr dem Werthe Null nähern, je mehr Beobachtungen vorhanden sind. Denn je öfterer die Beobachtungen wiederholt werden, mit desto grösserem Rechte darf man erwarten, dass alle möglichen Fälle in gleicher Anzahl vorgekommen sind, gleichwie man mit einem symmetrisch gearbeiteten homogenen Würfel um so mehr jede Zahl gleich viele Mal geworfen haben muss, je grösser die Anzahl der Würfe ist. Aber unter der obigen Voraussetzung, dass positive und negative Beobachtungsfehler gleiche Wahrscheinlichkeit haben, wird bei wachsendem m die Zahl und die Grösse der positiven Werthe von e sich der Zahl und der Grösse der negativen e unbegrenzt nähern, also schliesslich die Summe $e + e' + e'' +$ etc. Null werden, wie oben behauptet wurde. Aus mehrerem Grunde muss daher bei wachsendem m die Function

$$\frac{e + e' + e'' + \text{ etc.}}{m}$$

unmerklich werden, und der Werth $x = w$ aus dem arithmetischen Mittel hervorgehen.

2.

Indem wir nun immer das arithmetische Mittel aus gleich guten Beobachtungen als den wahrscheinlichsten Werth der Unbekannten ansehen, nehmen wir zugleich an, dass die Beobachtungsfehler bez.

$$n - \frac{n+n'+n''+\text{etc.}}{m}$$

$$n' - \frac{n+n'+n''+\text{etc.}}{m}$$

$$n'' - \frac{n+n'+n''+\text{etc.}}{m},$$

u. s. w. seien. Aber es ist immer

$$\left(n - \frac{n+n'+n''+\text{etc.}}{m}\right) + \left(n' - \frac{n+n'+n''+\text{etc.}}{m}\right) + \left(n'' - \frac{n+n'+n''+\text{etc.}}{m}\right) + \text{etc.} = 0.$$

und wir erfüllen also, indem wir das arithmetische Mittel aus den Beobachtungen als den wahrscheinlichsten Werth der Unbekannten ansehen, wie auch die Anzahl der Beobachtungen beschaffen sei, die Bedingung, die strenge genommen stattfindet, wenn die Anzahl der Beobachtungen unendlich gross ist. Wir nähern uns also gewiss durch Vergrösserung der Anzahl der Beobachtungen dem wahren Werthe der Unbekannten, und dieses ist in der That alles was wir thun können, da die wahren Beobachtungsfehler uns stets unbekannt bleiben werden.

3.

Im vor. Art. ist schon eine Relation abgeleitet worden, die zwischen den übrig bleibenden Fehlern stattfindet, wenn man das arithmetische Mittel aus allen Beobachtungen als den wahrscheinlichsten Werth der Unbekannten betrachtet, aber es besteht zwischen diesen Fehlern noch eine merkwürdige Relation, die in dem folgenden Satze enthalten ist.

»Wenn man das arithmetische Mittel aus allen Beobachtungen als den wahrscheinlichsten Werth der Unbekannten betrachtet, so bewirkt man dadurch, dass die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler ein Minimum wird.«

Um diesen Satz zu beweisen, bemerke ich, dass man die übrig bleibenden Fehler durch $x-n$, $x-n'$, $x-n''$, etc. ausdrücken kann, und der Satz verlangt demzufolge, dass

$$(x-n)^2 + (x-n')^2 + (x-n'')^2 + \text{etc.} = \text{Minimum}$$

sei. Es ist an sich klar, dass diese Function kein Maximum haben kann, denn lässt man x unbestimmt (positiv oder negativ) wachsen, so nähert

sich der Werth derselben immer mehr und mehr dem unendlich Grossen. Die bekannte Bedingung des Minimums giebt nun hier

$$(x-n)+(x-n')+(x-n'')+\text{etc.}=0$$

woraus

$$x=\frac{n+n'+n''+\text{etc.}}{m}$$

folgt. W. z. b. w.

4.

Es ist im Vorhergehenden angenommen worden, dass gleiche positive und negative Fehler gleich wahrscheinlich seien, wir wollen aber jetzt annehmen, dass dieses nicht der Fall sei, und die Folgen untersuchen, die dieser Umstand auf die Bestimmung der Unbekannten ausübt. Im jetzt zu betrachtenden Falle wird sich die Summe $e+e'+e''+$ etc. bei stets wachsender Anzahl von Beobachtungen nicht der Null, sondern einer gewissen positiven oder negativen Grösse nähern, die ich mit mk bezeichnen will, woraus folgt, dass der positive (oder bez. negative) Fehler $e+k$ mit dem negativen (oder bez. positiven) Fehler e gleiche Wahrscheinlichkeit hat. Aus einer stets wachsenden Anzahl von Beobachtungen wird man nun, wenn man wie vorher das arithmetische Mittel aus denselben zur Bestimmung von x anwendet, schliesslich

$$x=w+k$$

statt des wahren Werthes $x=w$ erhalten. Man kann nun nie durch irgend ein der Wahrscheinlichkeitsrechnung entlehntes Princip k von w trennen, sondern muss dafür andere Mittel in Anspruch nehmen, und diese können in nichts anderem bestehen, als in sorgfältiger Ausarbeitung und Anwendung der bei der Lösung der Aufgabe anderweitig in Betracht kommenden Theorien. Wenn sowohl die Theorie, zufolge welcher x sich aus den angestellten Beobachtungen ergiebt, als die Theorie des zur Beobachtung angewandten Instruments vollständig bekannt sind, und richtig angewandt werden, so können nie gleiche positive und negative Fehler verschiedene Wahrscheinlichkeiten haben, und es muss aus diesem Grunde $k=0$ werden. Wenn aber im Gegentheil diese Theorien, oder nur Eine derselben mangelhaft ist, oder unzweckmässig angewandt wird, dann ist es nachher unmöglich den constanten Fehler k aus dem Resultat der Beobachtungen zu entfernen. Aus diesen

Gründen wird im Verlaufe dieser Abhandlung stets stillschweigend angenommen werden, dass $k = 0$ ist.

5.

Ich nehme jetzt an, dass der Werth $x = N$ das nach dem Vorhergehenden aus m Beobachtungen genommene arithmetische Mittel sei. Man habe ferner, nachdem dieses Resultat schon berechnet worden ist, zur Bestimmung derselben Unbekannten x eine Reihe von m' anderen, von jenen unabhängigen, Beobachtungen angestellt, die einzeln für eben so genau wie jene gehalten werden müssen, und daraus auf dieselbe Weise $x = N'$ erhalten, später habe man noch m'' andere gleich gute Beobachtungen, und daraus $x = N''$ erhalten, u. s. w. Wenn man hierauf aus allen diesen Beobachtungen den wahrscheinlichsten Werth von x berechnen will, so ist es von selbst klar, dass die Gruppirungen, die vorher gemacht worden sind, keinen Einfluss auf das neue Resultat haben dürfen, und dass man jetzt wie vorher, ehe die m', m'', etc. Beobachtungen angestellt worden waren, aus allen nun vorhandenen Beobachtungen das arithmetische Mittel nehmen muss. Da mN die Summe der ersten, $m'N'$ die Summe der zweiten, $m''N''$ die Summe der dritten Gruppe von Beobachtungen ist, u. s. w., so hat jetzt das arithmetische Mittel aus allen Beobachtungen, oder mit anderen Worten der wahrscheinlichste Werth der Unbekannten

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad x = \frac{mN + m'N' + m''N'' + \text{etc.}}{m + m' + m'' + \text{etc.}}$$

zum Ausdruck. Wenn wir nun annehmen, dass der Werth von $x = N$ das Resultat einer einzigen Beobachtung von solcher Beschaffenheit wäre, dass man sie für eben so genau halten müsste, wie das arithmetische Mittel aus m solcher Beobachtungen, aus denen die anderen Gruppen bestehen, so ist an sich klar, dass der wahrscheinlichste Werth von x immer noch derselbe bleibt, den der Ausdruck (1) giebt, und da wir denselben Schluss auf alle übrigen Gruppen N', N'', etc. von Beobachtungen ausdehnen können, so ergiebt sich, dass der Ausdruck (1) immer noch der wahrscheinlichste Werth von x ist, wenn N, N', N'', etc. einzelne Beobachtungen von der Beschaffenheit sind, dass man die Beobachtung, welche N gegeben hat, für eben so genau halten muss, wie das arithmetische Mittel aus m, die welche N' gegeben hat, für eben so genau wie das arithmetische Mittel aus m', die welche N'' gegeben hat,

für eben so genau wie das arithmetische Mittel aus m'' u. s. w. anderen Beobachtungen, denen allen irgend eine und dieselbe Genauigkeit beigelegt werden muss. Wenn man daher unter der Bezeichnung des Gewichts irgend einer Beobachtung oder eines Resultats aus Beobachtungen die Anzahl von Beobachtungen von der Genauigkeit $= 1$ versteht, deren arithmetisches Mittel für eben so genau gehalten werden muss, wie diese Beobachtung oder dieses Resultat aus Beobachtungen, so können wir den Ausdruck (1) in folgenden Satz einkleiden:

»Wenn man für die Bestimmung einer Unbekannten mehrere Beobachtungen angestellt hat, die so beschaffen sind, dass man ihnen bez. die Gewichte m, m', m'', etc. beilegen muss, so erhält man den wahrscheinlichsten Werth dieser Unbekannten, wenn man das Resultat einer jeden Beobachtung mit seinem Gewicht multiplicirt, diese Produkte addirt und mit der Summe aller Gewichte dividirt.«

Es folgt ferner aus den obigen Betrachtungen der Satz:

»Das Gewicht dieser Bestimmung der Unbekannten ist der Summe der Gewichte aller dazu zugezogenen Beobachtungen gleich.«

6.

Aus den Betrachtungen des vor. Art. können wir ausserdem noch die folgenden Folgerungen ziehen.

Das Gewicht irgend einer Beobachtung oder eines Resultats aus Beobachtungen ist immer relativ zu verstehen, indem immer die Genauigkeit oder das Gewicht irgend einer bestimmten Gattung von Beobachtungen $= 1$ gesetzt werden muss.

Die obige Ableitung des Begriffs des Gewichts beschränkt sich, strenge genommen, nur auf die Fälle, wo die Gewichte ganze Zahlen sind, allein es ist sehr leicht den Begriff des Gewichts auch auf gebrochene oder irrationale Zahlen auszudehnen. Denn wenn man durch geeignete Mittel in Erfahrung gebracht hat, dass irgend eine Beobachtung für genauer gehalten werden muss wie das arithmetische Mittel aus m, hingegen für weniger genau wie das arithmetische Mittel aus $m + 1$ Beobachtungen der Gattung deren Gewicht $= 1$ gesetzt wird, so ist es klar, dass das Gewicht dieser Beobachtung nur gleich m plus einem Bruchtheil der Einheit sein kann, und nichts hindert uns in solchen Fällen das Gewicht dieser Beobachtung demgemäss anzunehmen, wenn nur Mittel vorhanden sind den Bruchtheil zu bestimmen. Aus demselben

Grunde sind wir eben so wenig gehindert, das Gewicht einer Beobachtung, die für weniger genau gehalten werden muss wie eine Beobachtung der Gattung, deren Gewicht = 1 gesetzt worden ist, durch einen ächten Bruch auszudrücken.

Endlich bedingt der oben festgesetzte Begriff des Gewichts nothwendig eine positive Zahl, und ein negatives Gewicht kann keinen Sinn haben.

7.

Es ist hiebei noch das Folgende zu bemerken. Da die Genauigkeit der verschiedenen Beobachtungen von der ungenauesten an, deren Gewicht = 0 angenommen, oder die als verfehlt betrachtet und verworfen werden muss, bis zur genauesten durch unendlich kleine Abstufungen wächst, so lässt sich gewiss immer eine Gattung von Beobachtungen denken, in Bezug auf welche das Gewicht irgend einer beliebigen anderen Beobachtung durch eine ganze Zahl ausgedrückt werden kann. Verändert man hierauf die Gattung von Beobachtungen, deren Gewicht der Einheit gleich gesetzt worden ist, so kann man dadurch schon auf Gewichte kommen, die nicht mehr durch ganze Zahlen ausgedrückt werden können. Um dieses deutlicher zu machen, will ich annehmen, man habe verschiedene Beobachtungen, denen zufolge der Wahl der Gattung von Beobachtungen, deren Gewicht = 1 gesetzt worden ist, die Gewichte 2, 3, 4, etc. beigelegt werden müssen; ändert man hierauf jene Gattung von Beobachtungen, die zur Einheit des Gewichts dienen, und wählt dafür eine andere, z. B. eine solche deren Gewicht das Dreifache jenes ist, dann sind die Gewichte der übrigen Beobachtungen schon nicht durchaus mehr ganze Zahlen, sondern gehen in die folgenden über, $\frac{2}{3}$, 1, $\frac{4}{3}$, etc. Man sieht hieraus wie die obige Definition des Gewichts auch schon ohne die Betrachtungen des vor. Art. zu Hülfe zu ziehen, auf gebrochene Zahlen führen kann.

8.

Die Relation, die wir im Art. 5 zwischen dem Gewicht einer Beobachtung und dem Gewicht des arithmetischen Mittels aus einer gewissen Anzahl gleich guter Beobachtungen aufgestellt haben, führt uns auf die Aufgabe zu bestimmen: wie gross denn eigentlich die Genauigkeit des arithmetischen Mittels aus einer gewissen Anzahl gleich guter

Beobachtungen in Bezug auf die Genauigkeit einer jeden einzelnen dieser Beobachtungen sei?

Die Lösung dieser Aufgabe fällt der Wahrscheinlichkeitsrechnung anheim, wenn wir erst festgesetzt haben werden, was unter relativer Genauigkeit verstanden werden muss.

»Wenn die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler irgend einer Beobachtung oder irgend eines Resultats aus Beobachtungen zwischen den Grenzen $-c$ und $+c$ liegt, der Wahrscheinlichkeit gleich ist, dass der Fehler irgend einer anderen Beobachtung oder irgend eines anderen Resultats aus Beobachtungen zwischen den Grenzen $-c'$ und $+c'$ liegt, so verhält sich die Genauigkeit des ersten Resultats zu der des zweiten wie c' zu c.«

Vermittelst dieser Definition, die die einfachste und sachgemässeste ist, die man von dem Begriff der relativen Genauigkeit einer Beobachtung oder eines Resultats aus Beobachtungen aufstellen kann, wird es leicht sein das Verhältniss der Genauigkeit einer einzelnen Beobachtung zu der des arithmetischen Mittels aus irgend einer Anzahl für gleich gut zu haltenden Beobachtungen zu bestimmen, wenn wir von dem Gesichtspunkt ausgehen, dass das arithmetische Mittel überhaupt der wahrscheinlichste Werth der aus diesen Beobachtungen zu bestimmenden Unbekannten ist.

9.

Sei für irgend eine bestimmte Gattung von Beobachtungen die Wahrscheinlichkeit des Fehlers Δ durch $\varphi\Delta$, wo φ ein Functionszeichen ist, ausgedrückt, dann wird, wenn wir die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler irgend einer Beobachtung dieser Gattung innerhalb der Grenzen $\mp c$ liegt, mit w bezeichnen, w gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Fehler von $-c$ bis $+c$, und da die Beobachtungsfehler durch unendlich kleine Stufen wachsen oder abnehmen,

$$w = \int_{-c}^{+c} \varphi\Delta \, . \, d\Delta$$

Da ferner jeder Beobachtungsfehler gewiss innerhalb der Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ liegt, so ergiebt sich

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\Delta \, . \, d\Delta$$

Wenn wir ferner die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Anzahl von m gleich guter Beobachtungen beziehungsweise die Fehler Δ', Δ'', etc. $\Delta^{(m)}$ vorkommen mit W bezeichnen, so erhalten wir

$$W = \varphi\Delta' \,.\, \varphi\Delta'' \,.\,.\,.\,.\,.\, \varphi\Delta^{(m)}$$

Diese Sätze ergeben sich aus den Elementen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wenn man die dort angenommenen endlichen Unterschiede in den überhaupt möglichen Fällen als unendlich klein betrachtet, oder die endliche Anzahl der möglichen Fälle in eine unendlich grosse Anzahl verwandelt. Endlich folgt aus denselben Betrachtungen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass Δ' zwischen den Grenzen $\mp a'$, Δ'' zwischen den Grenzen $\mp a''$, etc. liegt, durch das $m$fache Integral

$$\int_{-a'}^{+a'} \int_{-a''}^{+a''} \cdots \int_{-a^{(m)}}^{+a^{(m)}} W d\Delta' \,.\, d\Delta'' \,.\,.\,.\, d\Delta^{(m)}$$

ausgedrückt wird. Dieser Ausdruck gilt zwar nur wenn die Beobachtungen von einander unabhängig sind, aber diese Bedingung hindert nicht ihn auf den Fall auszudehnen, in welchem zwischen den Fehlergrenzen a', a'', etc. eine Relation besteht, wenn diese nur so beschaffen ist, dass sie unbeschadet der Unabhängigkeit der Beobachtungen von einander stattfinden kann. Wenn nun eine solche Relation angenommen wird, so muss man bei den verschiedenen Integrationen darauf Rücksicht nehmen. Sei

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad y = f(\Delta', \Delta'' \ldots)$$

diese Relation, worin y eine gegebene Grösse und f ein Functionszeichen ist, und die erste Aufgabe sei, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass y zwischen den Grenzen $\mp b$ liege. Man muss um diese Aufgabe zu lösen, zuerst vermittelst dieser Relation eine der Veränderlichen Δ', Δ'', etc. nebst dem Differential derselben aus dem obigen m fachen Integral eliminiren. Sei zu diesem Zweck

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad \Delta^{(m)} = F(y, \Delta', \Delta'', \ldots\ldots \Delta^{(m-1)})$$

wo wieder F ein Functionszeichen ist, der Ausdruck für $\Delta^{(m)}$, welcher sich aus dem obigen Ausdruck für y ergiebt, so bekommt man, wenn man nicht blos $\Delta^{(m)}$ und $d\Delta^{(m)}$ eliminirt, sondern auch den obigen Ausdruck für W substituirt,

$$(4) \quad W d\Delta' . d\Delta'' \ldots d\Delta^{(m)} = K . \varphi\Delta' . \varphi\Delta'' \ldots \varphi\Delta^{(m-1)} . d\Delta' . d\Delta'' \ldots d\Delta^{(m-1)} . dy$$

wenn man zur Abkürzung

$$K = \varphi\,(F\,(y, \varDelta', \varDelta'', \ldots \varDelta^{(m-1)}))\,\frac{d\,.\,F\,(y, \varDelta', \varDelta'', \ldots \varDelta^{(m-1)})}{dy}$$

setzt, und die $m$fache Integration der rechten Seite dieser Gleichung muss jetzt so ausgeführt werden, dass man $\varDelta', \varDelta'', \ldots \varDelta^{(m-1)}$ innerhalb der Grenzen ausdehnt, für welche, wenn man y zwischen den Grenzen $\mp b$ nimmt, die Function F für $\varDelta^{(m)}$ alle möglichen Werthe giebt. Die Integration endlich in Bezug auf y muss innerhalb der Grenzen $\mp b$ ausgedehnt werden.

10.

Wenn wir nun das Vorstehende anwenden wollen um die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass die Summe der Fehler von m Beobachtungen innerhalb der Grenzen $\mp b$ liege, so wird die Relation (2) in

$$y = \varDelta' + \varDelta'' + \ldots + \varDelta^{(m)}$$

übergehen. Ich ziehe aber vor einen Schritt weiter zu gehen, und statt dieser Relation die folgende allgemeinere einzuführen,

$$y = \varepsilon'\varDelta' + \varepsilon''\varDelta'' + \ldots + \varepsilon^{(m)}\varDelta^{(m)}$$

worin $\varepsilon', \varepsilon'', \ldots \varepsilon^{(m)}$ gegebene, numerische Coefficienten bedeuten sollen, denn hiedurch können wir die Auflösung unserer Aufgabe, wie sich weiter unten ergeben wird, sogleich auf den Fall ausdehnen, in welchem die Beobachtungen verschiedene Gewichte haben, während der einfachere Fall, in welchem die Gewichte aller in Betracht gezogenen einander gleich sind, daraus erhalten wird, wenn man

$$\varepsilon' = \varepsilon'' = \text{etc.} = \varepsilon^{(m)} = 1$$

setzt. Die oben angenommene Relation giebt

$$\varDelta^{(m)} = \frac{y - \varepsilon'\varDelta' - \varepsilon''\varDelta'' - \ldots - \varepsilon^{(m-1)}\varDelta^{(m-1)}}{\varepsilon^{(m)}}$$

welche der allgemeinen Relation (3) entspricht. Hieraus ergiebt sich also

$$\frac{dF}{dy} = \frac{1}{\varepsilon^{(m)}}$$

Da ferner möglicher Weise jeder Fehler zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ liegen kann, und die Annahme dieser Grenzen für $\varDelta', \varDelta'', \ldots \varDelta^{(m-1)}$ nebst den Grenzen $\mp b$ für y in Folge der vorstehenden Gleichung dem Fehler $\varDelta^{(m)}$ alle möglichen Werthe zutheilt, so müssen die Integrationen innerhalb dieser Grenzen ausgeführt werden.

Wenn wir daher die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der bez. mit $\varepsilon', \varepsilon'', \ldots \varepsilon^{(m)}$ multiplicirten Beobachtungsfehler innerhalb der Grenzen $\mp b$ liège, mit W' bezeichnen, so wird zufolge der (4)

$$(5) \ldots W' = \frac{1}{\varepsilon^{(m)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-b}^{+b} M . \varphi\Delta' . \varphi\Delta'' \ldots . \varphi\Delta^{(m-1)}$$

wenn zur Abkürzung

$$M = \varphi\left(\frac{y - \varepsilon'\Delta' - \varepsilon''\Delta'' - \ldots - \varepsilon^{(m-1)}\Delta^{(m-1)}}{\varepsilon^{(m)}}\right) d\Delta' . d\Delta'' \ldots d\Delta^{(m-1)} . dy$$

gesetzt wird.

11.

Um diesen Ausdruck integriren zu können, müssen wir die Function φ kennen, und die Kenntniss davon erlangt man durch den an die Spitze dieser Abhandlung gestellten Grundsatz. Nehmen wir die Gleichung

$$W = \varphi\Delta' . \varphi\Delta'' \ldots \varphi\Delta^{(m)}$$

wieder vor, in welcher W die Wahrscheinlichkeit ist, dass in einer Reihe von m gleich guten Beobachtungen die Fehler $\Delta', \Delta'', \ldots \Delta^{(m)}$ vorkommen. Indem wir uns wieder des oben angezogenen Grundsatzes bedienen, nehmen wir zugleich an, dass das Zusammentreffen der durch diese Annahme sich ergebenden Fehler der Beobachtungen die grösste Wahrscheinlichkeit habe; die eine dieser Annahmen ist in der anderen enthalten. Wenn aber das Zusammentreffen der unter der genannten Bedingung sich ergebenden Fehler das wahrscheinlichste ist, so muss nothwendiger Weise W ein Maximum werden. Diese Bedingung giebt die Gleichung

$$0 = \frac{d\varphi\Delta'}{\varphi\Delta' . d\Delta'} \frac{d\Delta'}{dc} + \frac{d\varphi\Delta''}{\varphi\Delta'' . d\Delta''} \frac{d\Delta''}{dc} + \ldots + \frac{d\varphi\Delta^{(m)}}{\varphi\Delta^{(m)} . d\Delta^{(m)}} \frac{d\Delta^{(m)}}{dc}$$

wenn c das arithmetische Mittel aus den Beobachtungen bedeutet. Wenn aber wieder die beobachteten Werthe der Unbekannten mit $n', n'', \ldots n^{(m)}$ bezeichnet werden, so wird

$$\Delta' = n' - c, \quad \Delta'' = n'' - c, \ldots \Delta^{(m)} = n^{(m)} - c$$

und daher

$$\frac{d\Delta'}{dc} = \frac{d\Delta''}{dc} = \text{etc.} = \frac{d\Delta^{(m)}}{dc}$$

die obige Gleichung geht hiemit in

$$0 = \frac{d\varphi\Delta'}{\varphi\Delta'.d\Delta'} + \frac{d\varphi\Delta''}{\varphi\Delta''.d\Delta''} + \ldots + \frac{d\varphi\Delta^{(m)}}{\varphi\Delta^{(m)}.d\Delta^{(m)}} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

über. Aber im Art. 2 wurde gefunden, dass in Folge der Annahme des arithmetischen Mittels als den wahrscheinlichsten Werth der Unbekannten, die Summe der übrig bleibenden Fehler Null ist, und hieraus erhalten wir jetzt

$$0 = \Delta' + \Delta'' + \ldots + \Delta^{(m)}$$

und da diese mit der Gleichung (6) zugleich stattfinden muss, so ergiebt sich allgemein, dass

$$\frac{d\varphi\Delta}{\varphi\Delta.d\Delta} = 2k\Delta$$

sein muss, wo k eine Constante ist, denn auf andere Art lässt sich den beiden Gleichungen zugleich nicht Gnüge leisten. Das Integral der vorstehenden Gleichung ist

$$\varphi\Delta = le^{k\Delta^2}$$

wo l die Integrationsconstante und e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen ist. Hiemit erhalten wir

$$W = l^m e^{k(\Delta'^2 + \Delta''^2 + \ldots + \Delta^{(m)2})}$$

und wenn die Summe der Quadrate der Fehler eines Maximums fähig wäre, so müsste k positiv angenommen werden. Da aber diese Summe nur eines Minimums fähig ist, so muss nothwendig k negativ sein, damit W ein Maximum werde. Setzt man um dieses auszudrücken $k = -h^2$, so wird

$$\varphi\Delta = le^{-h^2\Delta^2}$$

Es muss ferner, wie oben gezeigt wurde

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\Delta . d\Delta = 1$$

werden, und da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\Delta^2} d\Delta = \frac{\sqrt{\pi}}{h}$$

ist, wenn π das Verhältniss des Kreisumfanges zum Durchmesser bezeichnet, so ergiebt sich $l = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$, und es wird schliesslich

$$\varphi\Delta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

und

$$W = \frac{h^m}{\pi^{\frac{m}{2}}} e^{-h^2(\Delta'^2+\Delta''^2+\ldots+\Delta^{(m)2})}$$

wo $\Delta'^2+\Delta''^2+\ldots+\Delta^{(m)2}$ ein Minimum ist. Es folgt hieraus wieder der Satz, dass wenn man eine Unbekannte durch das arithmetische Mittel aus den dafür erhaltenen Beobachtungen bestimmt, man zugleich dadurch bewirkt, dass die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler ein Minimum wird; welcher Satz im Art. 3 auf andere Art schon bewiesen wurde.

12.

Es sollen nun, um in den folgenden Ausdrücken eine leichtere Uebersicht zu gewinnen, die folgenden Abkürzungen in den Bezeichnungen eingeführt werden,

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon^{(m)}} = \theta', \quad \frac{\varepsilon''}{\varepsilon^{(m)}} = \theta'', \ldots \frac{\varepsilon^{(m-1)}}{\varepsilon^{(m)}} = \theta^{(m-1)}$$

$$\frac{h^m}{\varepsilon^{(m)}\pi^{\frac{m}{2}}} = l$$

$$\theta'\Delta'+\theta''\Delta''+\ldots+\theta^{(m-1)}\Delta^{(m-1)} - \frac{y}{\varepsilon^{(m)}} = \Delta$$

Substituirt man nun den unter (7) erhaltenen Ausdruck für $\varphi\Delta$ in den Ausdruck (5), so ergiebt sich

$$W' = l\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-b}^{+b} E' d\Delta'.d\Delta''\ldots d\Delta^{(m-1)}.dy$$

wo zur Abkürzung

$$E' = e^{-h^2(\Delta^2+\Delta'^2+\Delta''^2+\ldots+\Delta^{(m-1)2})}$$

gesetzt worden ist. Betrachtet man aber das Integral

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\{(\beta x+\gamma)^2+x^2+\delta\}} dx$$

und setzt darin

$$x = \frac{z}{\sqrt{1+\beta^2}} - \frac{\beta\gamma}{1+\beta^2}$$

so wird es

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\left(z^2+\frac{\gamma^2}{1+\beta^2}+\delta\right)} dz$$

folglich, da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{h}$$

ist

$$P = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{\pi}{1+\beta^2}}\, e^{-h^2\left(\frac{\gamma^2}{1+\beta^2}+\delta\right)}$$

Wendet man diesen Ausdruck auf den obigen Ausdruck für W' an, so ergiebt sich nach der ersten Integration

$$W' = \frac{l}{h}\sqrt{\frac{\pi}{1+\theta'^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-b}^{+b} E'' d\Delta''.d\Delta'''\ldots d\Delta^{(m-1)}.dy$$

wo

$$E'' = e^{-h^2\left\{\frac{(\Delta-\theta'\Delta')^2}{1+\theta'^2}+\Delta''^2+\Delta'''^2+\ldots+\Delta^{(m-1)2}\right\}}$$

ist. Nach der zweiten Integration erhält man

$$W' = \frac{l}{h^2}\sqrt{\frac{\pi^2}{1+\theta'^2+\theta''^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-b}^{+b} E''' d\Delta'''\ldots d\Delta^{(m-1)}.dy$$

wo

$$E''' = e^{-h^2\left\{\frac{(\Delta-\theta'\Delta'-\theta''\Delta'')^2}{1+\theta'^2+\theta''^2}+\Delta'''^2+\ldots+\Delta^{(m-1)2}\right\}}$$

ist, nach der dritten Integration wird

$$W' = \frac{l}{h^3}\sqrt{\frac{\pi^3}{1+\theta'^2+\theta''^2+\theta'''^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-b}^{+b} E^{IV} d\Delta^{IV}\ldots d\Delta^{(m-1)}.dy$$

wo

$$E^{IV} = e^{-h^2\left\{\frac{(\Delta-\theta'\Delta'-\theta''\Delta''-\theta'''\Delta''')^2}{1+\theta'^2+\theta''^2+\theta'''^2}+\Delta^{IV2}+\ldots+\Delta^{(m-1)2}\right\}}$$

ist, und das Gesetz des Fortganges stellt sich jetzt deutlich hervor. Nach der $(m-2)$ten Integration wird folglich

$$W' = \frac{l}{h^{m-2}}\frac{\pi^{\frac{m-2}{2}}}{\sqrt{1+\theta'^2+\theta''^2+\ldots+\theta^{(m-2)2}}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-b}^{+b} E^{(m-1)} d\Delta^{(m-1)}.dy$$

wo

$$E^{(m-1)} = e^{-h^2\left\{\frac{\left(\theta^{(m-1)}\Delta^{(m-1)}-\frac{y}{\varepsilon^{(m)}}\right)^2}{1+\theta'^2+\theta''^2+\ldots+\theta^{(m-2)2}}+\Delta^{(m-1)2}\right\}}$$

ist. Führt man nun auch die $(m-1)$te Integration auf dieselbe Weise aus und substituirt die Ausdrücke der eingeführten Hülfsgrössen, so bekommt man

$$W' = \frac{h}{\sqrt{\pi}\,.\,\sqrt{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2+\ldots+\varepsilon^{(m)2}}}\int_{-b}^{+b} e^{-\frac{h^2y^2}{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2+\ldots+\varepsilon^{(m)2}}}\,dy$$

womit alle Integrationen ausgeführt sind, die man ohne Hülfe von unendlichen Reihen erhalten kann.

13.

Nehmen wir nun an, dass die eben gefundene Wahrscheinlichkeit der Wahrscheinlichkeit gleich sein soll, dass der Fehler irgend einer der in Betracht gezogenen Beobachtungen innerhalb der Grenzen $\mp a$ enthalten sei, so wird zufolge des Vorhergehenden auch

$$W' = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-a}^{+a} e^{-h^2y^2}\,dy$$

und es muss die Relation zwischen a und b aus der folgenden Gleichung bestimmt werden

$$\int_{-a}^{+a} e^{-h^2y^2}\,dy = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2+\ldots+\varepsilon^{(m)2}}}\int_{-b}^{+b} e^{-\frac{h^2y^2}{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2+\ldots+\varepsilon^{(m)2}}}\,dy$$

Sei

$$y^2 = u^2\,(\varepsilon'^2+\varepsilon''^2+\ldots\ldots+\varepsilon^{(m)2})$$

dann wird

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2+\ldots+\varepsilon^{(m)2}}}\int_{-b}^{+b} e^{-\frac{h^2y^2}{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2+\ldots+\varepsilon^{(m)2}}}\,dy = \int_{-c}^{+c} e^{-h^2u^2}\,du$$

wenn

$$c = \frac{b}{\sqrt{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2+\ldots+\varepsilon^{(m)2}}}$$

gesetzt wird. Die obige Bedingungsgleichung geht hiemit in die folgende

$$\int_{-a}^{+a} e^{-h^2y^2}\,dy = \int_{-c}^{+c} c^{-h^2u^2}\,du$$

über und hieraus folgt

$$b = a\,\sqrt{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2+\ldots+e^{(m)2}}$$

welches die gesuchte Relation ist.

Diese Relation giebt in Verbindung mit der im Art. 8 gegebenen Definition der relativen Genauigkeit sogleich den folgenden

1sten Satz.

»Die Genauigkeit der Summe von m gleich guten, beziehungsweise mit den gegebenen Factoren ε', ε'', . $\varepsilon^{(m)}$ multiplicirten Beobachtungen verhält sich zur Genauigkeit Einer dieser Beobachtungen wie

$$1 : \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 + \ldots + \varepsilon^{(m)2}}.«$$

Nehmen wir an, dass $\varepsilon' = \varepsilon'' =$ etc. $= \varepsilon^{(m)} = \frac{1}{m}$ sei, dann geht die eben bezeichnete Function der Beobachtungen in das arithmetische Mittel aus denselben über, und wir erhalten daher sogleich den folgenden

2ten Satz.

»Die Genauigkeit des arithmetischen Mittels aus m gleich guten Beobachtungen verhält sich zur Genauigkeit irgend Einer derselben wie

$$\sqrt{m} : 1.«$$

Die Verbindung dieses Satzes mit der im Art. 5 aufgestellten Definition des Gewichts einer Bestimmung aus Beobachtungen zeigt, dass das Gewicht einer Beobachtung oder eines Resultats aus Beobachtungen dem Quadrat der Genauigkeit derselben proportional ist.

Man kann den ersten obigen Satz leicht auf Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit ausdehnen. Wenn man annimmt, dass die Fehler $e', e'', \ldots e^{(m)}$ solchen Beobachtungen angehören, deren Genauigkeiten bez. den Zahlen $\sqrt{p'}$, $\sqrt{p''}$, ... $\sqrt{p^{(m)}}$ proportional sind, so gehören die Fehler $e'\sqrt{p'}$, $e''\sqrt{p''}$ ... $e^{(m)}\sqrt{p^{(m)}}$ gewiss Beobachtungen von gleicher Genauigkeit an, denn durch die Multiplication der Fehler mit den Zahlen $\sqrt{p'}$, $\sqrt{p''}$, etc. werden diese gewiss $\sqrt{p'}$ mal $\sqrt{p''}$ mal, etc. vergrössert, also die Genauigkeiten gewiss eben so viel verkleinert, und auf gleiches Maass gebracht. Bezeichnen wir daher die Fehler $e'\sqrt{p'}$. $e''\sqrt{p''}$, etc. mit Δ', Δ'', etc., so kann der Ausdruck

$$\varepsilon' e' + \varepsilon'' e'' + \ldots + \varepsilon^{(m)} e^{(m)}$$

sogleich in den folgenden verwandelt werden

$$\frac{\varepsilon'}{\sqrt{p'}}\Delta' + \frac{\varepsilon''}{\sqrt{p''}}\Delta'' + \ldots + \frac{\varepsilon^{(m)}}{\sqrt{p^{(m)}}}\Delta^{(m)}$$

und hiemit ergiebt sich der

3te Satz.

»Die Genauigkeit der Summe von m, bez. mit den gegebenen Factoren $\varepsilon', \varepsilon'', \ldots \varepsilon^{(m)}$ multiplicirten Beobachtungen, deren relative Genauigkeiten den Zahlen $\sqrt{p'}, \sqrt{p''}, \ldots \sqrt{p^{(m)}}$ proportional sind, oder mit anderen Worten, denen die Gewichte $p', p'', \ldots p^{(m)}$ beigelegt werden müssen, verhält sich zur Genauigkeit Einer Beobachtung der Gattung, deren Genauigkeit oder Gewicht als Einheit angenommen worden ist, wie

$$1 : \sqrt{\frac{\varepsilon'^2}{p'} + \frac{\varepsilon''^2}{p''} + \ldots + \frac{\varepsilon^{(m)2}}{p^{(m)}}}.«$$

Das Gewicht eines aus solchen Beobachtungen gezogenen Resultats hat also, wenn man es mit P bezeichnet,

$$(8) \quad \ldots\ldots \quad P = \frac{1}{\frac{\varepsilon'^2}{p'} + \frac{\varepsilon''^2}{p''} + \ldots + \frac{\varepsilon^{(m)2}}{p^{(m)}}}$$

zum Ausdruck, und bedeutet, dass dieses Resultat für eben so genau gehalten werden muss, als wäre es das arithmetische Mittel aus P solcher Beobachtungen, deren Gewicht oder Genauigkeit $= 1$ ist.

14.

Wenden wir zu näherer Erläuterung des Ausdrucks (8) denselben auf die einfachsten Functionen von zwei Grössen an. Seien durch die Beobachtungen die Grösse a mit dem Gewicht p, und die Grösse a' mit dem Gewicht p' erhalten, man fragt zuerst nach dem Gewicht der Function

$$\tfrac{1}{2}(a \pm a')$$

Hiefür giebt der Ausdruck (8), da hier $\varepsilon' = \frac{1}{2}$, $\varepsilon'' = \pm\frac{1}{2}$ ist

$$P = \frac{4pp'}{p+p'}$$

oder wenn $p' = p$ ist,

$$P = 2p$$

mit dem 2. Satze übereinstimmend, wenn wir blos das obere Zeichen annehmen. Fragt man ausserdem nach dem Gewicht der Function

$$a \pm a'$$

wenn die Gewichte dieselben sind wie vorher, so giebt der Ausdruck (8), da nun $\varepsilon' = 1$, $\varepsilon'' = \pm 1$ ist,

$$P = \frac{pp'}{p+p'}$$

oder wenn man $p' = p$ macht

$$P = \tfrac{1}{2}p$$

Wenn man hier unter a und a' die bei einer Triangulation von einer und derselben Station aus eingeschnittenen Richtungen zweier Dreieckspunkte versteht, so ist $a - a'$ der durch die Beobachtungen erhaltene Winkel zwischen diesen beiden Punkten, und setzt man das Gewicht der Bestimmung einer jeden der beiden Richtungen $= 1$, so ist das Gewicht des Winkels nur $= \frac{1}{2}$, oder die Genauigkeit des Letzteren nur $= \sqrt{\frac{1}{2}}$.

15.

Nehmen wir jetzt wieder die Gleichung (1) vor, nemlich

$$x = \frac{mN + m'N' + m''N'' + \dots}{m + m' + m'' + \dots}$$

welche den wahrscheinlichsten Werth von x giebt, wenn die beobachteten Werthe N, N', N'', etc. bez. die Gewichte m, m', m'', etc. haben.

Wenn nun die Beobachtungen nicht unmittelbar $x = N$, $x = N'$, etc., sondern statt dessen $ax = n$, $a'x = n'$, etc. gegeben haben, wo a, a', etc. bestimmte, durch die Theorie der Aufgabe, welche auf die Bestimmung von x hinführt, gegebene numerische Coefficienten sind, dann ist in den aus diesen Gleichungen folgenden Werthen $x = \frac{n}{a}$, $x' = \frac{n'}{a'}$, etc. $\frac{n}{a}$ gewiss $a$mal genauer wie n, $\frac{n'}{a'}$ gewiss a'mal genauer wie n', u. s. w., weil die Fehler, womit n, n', etc. behaftet sind, durch die angeführten Divisionen gewiss a, a', etc. mal verkleinert worden. Wenn nun die Genauigkeit aller Beobachtungen, welche n, n', etc. gegeben haben, für dieselbe gehalten werden muss, so werden in Folge der Gleichung (8) die Gewichte der daraus hervorgehenden einzelnen Bestimmungen

$$x = \frac{n}{a},\ x = \frac{n'}{a'},\ x = \frac{n''}{a''},\ \text{etc.}$$

bez. a^2, a'^2, a''^2, etc. sein, wenn $p' = p'' = \text{etc.} = 1$ gesetzt wird. Es wird daher jetzt

$$m = a^2,\ m' = a'^2,\ m'' = a''^2,\ \text{etc.}$$
$$N = \frac{n}{a},\ N' = \frac{n'}{a'},\ N'' = \frac{n''}{a''},\ \text{etc.}$$

und der durch die oben angeführte Gleichung ausgedrückte wahrscheinlichste Werth von x bekommt

$$x = \frac{an + a'n' + a''n'' + \ldots}{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots}$$

zum Ausdruck, und das Gewicht dieser Bestimmung ist $= a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots.$

16.

Wenn hingegen die Beobachtungen, welche n für ax, n' für $a'x$, n'' für $a''x$, u. s. w. gegeben haben, für ungleich genau gehalten werden müssen, und zwar die erste für so genau wie das arithmetische Mittel aus p, die zweite für so genau wie das aus p', die dritte für so genau wie das aus p'', u. s. w. Beobachtungen von gleicher als Einheit angenommener Genauigkeit, so werden die Gewichte der einzelnen Bestimmungen von ax, $a'x$, $a''x$, etc. zufolge der Gleichung (8) a^2p, a'^2p', a''^2p'', etc. zum Ausdruck haben, und es wird also jetzt

$$m = a^2p, \quad m' = a'^2p', \quad m'' = a''^2p'', \text{ etc.}$$

während wie vorher die Gleichungen

$$N = \frac{n}{a}, \quad N' = \frac{n'}{a'}, \quad N'' = \frac{n''}{a''}, \text{ etc.}$$

bleiben. Der allgemeine Ausdruck zu Anfang des vor. Art. giebt folglich jetzt für den wahrscheinlichsten Werth von x den Ausdruck

$$(9) \quad \ldots \ldots \quad x = \frac{pan + p'a'n' + p''a''n'' + \ldots}{pa^2 + p'a'^2 + p''a''^2 + \ldots}$$

mit dem Gewicht $= pa^2 + p'a'^2 + p''a''^2 + \ldots$

Man sieht, dass der am Ende des vor. Art. gefundene Ausdruck für x sich als einen speciellen Fall des vorstehenden ausweist, wie es auch sein muss, und dass der vorstehende in jenen übergeht, wenn man alle Gewichte p, p', p'', etc. einander gleich macht.

Der eben gefundene Ausdruck für x kann auf zweierlei Weise einfach durch Worte ausgedrückt werden.

1) Wenn man für die Bestimmung der Unbekannten x durch Beobachtungen, die von einander unabhängig sind, die Werthe n, n', n'', etc. erlangt hat, denen bez. die Gewichte p, p', p'', etc. beigelegt werden müssen, und die mit der Unbekannten durch die Gleichungen

$$ax = n, \quad a'x = n', \quad a''x = n'', \text{ etc.}$$

verbunden sind, dann erhält man den wahrscheinlichsten Werth von x, wenn man jede dieser Gleichungen mit dem Produkt des Gewichts derselben in den Coefficienten von x multiplicirt, die so abgeänderten Gleichungen addirt, und aus dieser Summe x auf gewöhnliche Art ableitet, nemlich das bekannte Glied mit dem Coefficienten von x dividirt. Das Gewicht dieser Bestimmung ist dem eben genannten Divisor gleich.

2) Man bringe die gegebenen Gleichungen auf Gleichungen, die gleiche Genauigkeit haben, welches dem Vorhergehenden zufolge dadurch bewirkt wird, dass man sie bez. mit $\sqrt{p}$, $\sqrt{p'}$, $\sqrt{p''}$, etc. multiplicirt, wodurch

$$\sqrt{p}.ax = \sqrt{p}.n\,, \quad \sqrt{p'}.a'x = \sqrt{p'}.n'\,, \quad \sqrt{p''}.a''x = \sqrt{p''}.n''\,, \text{ etc.}$$

erhalten wird. Hierauf multiplicire man jede dieser Gleichungen mit dem jetzt stattfindenden Coefficienten von x, bilde die Summe derselben, und dividire wieder das bekannte Glied mit dem nunmehrigen Coefficienten von x. Es ist klar, dass der obige Ausdruck für x auch aus diesem Verfahren hervorgeht.

17.

Wenn die Bedingung, die das Vorhergehende involvirt, nemlich dass die Unbekannte unmittelbar durch eine linearische Gleichung gegeben sei, nicht erfüllt ist, so erleiden die erhaltenen Ausdrücke durchaus keine Aenderung. Um dieses zu zeigen, sei überhaupt

$$fX = N$$

wo f ein Functionszeichen und X die Unbekannte ist, die Gleichung, welche die Lösung einer vorgegebenen Aufgabe bildet, und so beschaffen ist, dass der vollständige Werth von N nur durch Beobachtungen erlangt werden kann. Sei ξ ein genäherter Werth von X, und der wahrscheinlichste Werth dieser Unbekannten

$$X = \xi + x$$

wo ξ so nahe richtig angenommen wird, dass man mit der Berücksichtigung der ersten Potenz von x ausreicht. Setzt man hierauf

$$f\xi = \nu\,, \quad \frac{df\xi}{d\xi} = a\,, \quad N - \nu = n$$

so bekommt man

$$ax = n$$

Wendet man die Gleichung $fX = N'$ auf einen anderen Fall an, der aber so beschaffen sein muss, dass die Unbekannte X keine Aenderung erlei-

det, und nur in der Function f ausser N sich eine oder mehrere Constanten geändert haben, dann ergiebt sich eben so

$$a'x = n'$$

u. s. w. Durch dieses Verfahren kann man jedem Falle die der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu unterwerfenden Bestimmungen auf linearische Gleichungen von der Form hinführen, die im Vorhergehenden angenommen worden sind.

§. 2. Ausdehnung des Vorhergehenden auf den Fall, in welchem die Werthe mehrerer unabhängiger Unbekannten durch Beobachtungen zu bestimmen sind.

18.

Bis jetzt ist angenommen worden, dass die durch Hülfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu lösende Aufgabe auf nur Eine Unbekannte hingeführt hat, während von nun an die Fälle betrachtet werden sollen, wo mehrere Unbekannten vorhanden sind. An den Inhalt des vor. Art. anknüpfend bemerke ich zuerst, dass auch in diesen Fällen die Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten auf die Ermittelung derselben aus einem System von linearischen Gleichungen hingeführt werden kann. Seien die Gleichungen, die die Auflösung der Aufgabe bilden,

$$f(X, X', X'', \text{etc.}) = L$$
$$F(X, X', X'', \text{etc.}) = L'$$
$$\varphi(X, X', X'', \text{etc.}) = L''$$

u. s. w. wo f, F, φ etc. Functionszeichen, X, X', X'', etc. die Unbekannten, und L, L', L'', etc. durch Beobachtungen zu ermittelnde Grössen sind. Nachdem man sich die genäherten Werthe ξ, ξ', ξ'', etc. der Unbekannten verschafft hat, welches immer möglich ist, seien die wahrscheinlichsten Werthe derselben

$$X = \xi + x\,, \quad X' = \xi' + x'\,, \quad X'' = \xi'' + x'', \text{ etc.}$$

wo x, x', x'', etc. so klein angenommen werden, dass man mit den ersten Potenzen derselben ausreicht. Setzt man hierauf

$$f(\xi, \xi', \xi'', \text{etc.}) = \lambda$$
$$F(\xi, \xi', \xi'', \text{etc.}) = \lambda'$$
$$\varphi(\xi, \xi', \xi'', \text{etc.}) = \lambda''$$
$$\text{etc.}$$

$$\left(\frac{df}{d\xi}\right) = a\,, \quad \left(\frac{df}{d\xi'}\right) = b\,, \quad \left(\frac{df}{d\xi''}\right) = c\,, \text{ etc.}$$
$$\left(\frac{dF}{d\xi}\right) = a'\,, \quad \left(\frac{dF}{d\xi'}\right) = b'\,, \quad \left(\frac{dF}{d\xi''}\right) = c'\,, \text{ etc.}$$
$$\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right) = a''\,, \quad \left(\frac{d\varphi}{d\xi'}\right) = b''\,, \quad \left(\frac{d\varphi}{d\xi''}\right) = c''\,, \text{ etc.}$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

so werden

$$ax + bx' + cx'' + \text{etc.} + \lambda = L$$
$$a'x + b'x' + c'x'' + \text{etc.} + \lambda' = L'$$
$$a''x + b''x' + c''x'' + \text{etc.} + \lambda'' = L''$$
$$\text{etc} \qquad\qquad \text{etc.}$$

welche Gleichungen die verlangte Form haben, und zu welchen bemerkt werden kann, dass alle durch die Rechnung erhaltenen Grössen sich auf der einen, und die durch die Beobachtungen erhaltenen Grössen sich auf der anderen Seite der Gleichheitszeichen befinden, gleich wie dieses in den ähnlichen Gleichungen des vor. §. auch stattfand. Setzt man ferner

$$L - \lambda = l\,, \quad L' - \lambda' = l'\,, \quad L'' - \lambda'' = l''\,, \text{ etc.}$$

so werden die vorstehenden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} ax + bx' + cx'' + \text{etc.} = l \\ a'x + b'x' + c'x'' + \text{etc.} = l' \\ a''x + b''x' + c''x'' + \text{etc.} = l'' \\ \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

in welchen, wenn die Beobachtungen nur nicht gar zu ungenau sind, oder die genäherten Werthe ξ, ξ', ξ'', etc. der Unbekannten sich nicht allzuweit von den wahren oder wahrscheinlichsten Werthen entfernen, die völlig bekannten Glieder kleine Zahlenwerthe haben.

Sollte es sich nach der Durchführung der Auflösung dieser Gleichungen zeigen, dass die zu deren Erlangung angewandten genäherten Werthe ξ, ξ', ξ'', etc. nicht so genau gewesen sind, dass man mit den ersten Potenzen von x, x', x'', etc. ausreichte, so giebt die Auflösung wenigstens mehr genäherte Werthe der Unbekannten, durch deren Substitution und Wiederholung der Auflösung man genauere Werthe erhält, u. s. w. wenn nöthig.

Fassen wir vor allem Anderen die Zahl der Gleichungen (10) und die Zahl der darin vorkommenden Unbekannten in's Auge, so sind drei Fälle möglich, es kann

1) die Zahl dieser Gleichungen kleiner sein wie die der Unbekannten,

2) die Zahl der Gleichungen denen der Unbekannten gleich sein,
3) die Zahl der Gleichungen grösser sein, wie die der Unbekannten.

Im ersten Falle ist es hier, wie immer, unmöglich bestimmte Werthe der Unbekannten zu erhalten, im zweiten lässt sich nichts weiter thun, wie die Gleichungen auf gewöhnliche Weise aufzulösen, und nur im dritten Falle fällt die Auflösung derselben in den Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Der dritte Fall soll daher im Folgenden stets als stattfindend angenommen werden, wobei der zweite Fall jedoch nicht unbedingt ausgeschlossen ist, da sich zeigen wird, dass die für den dritten Fall sich ergebende Auflösung auch auf den zweiten anwendbar ist, alsdann aber dieselben Werthe der Unbekannten giebt, die man durch die gewöhnliche Auflösung erhält.

19.

Die Gleichungen (10) lassen sich sofort auf die allgemeinsten der im Vorhergehenden betrachteten Gleichungen, nemlich auf

$$ax = n\,,\quad a'x = n'\,,\quad a''x = n''\,,\ \text{etc.}$$

hinführen, es braucht dafür nur

$$\begin{aligned} n &= l - bx' - cx'' - \ldots \\ n' &= l' - b'x' - c'x'' - \ldots \\ n'' &= l'' - b''x' - c''x'' - \ldots \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

gesetzt zu werden. Die Grössen n, n', n'', etc. haben zwar gegenwärtig keine bestimmten Werthe wie im Vorhergehenden der Fall war, sondern hängen mit von den noch unbestimmten Grössen x', x'', etc. ab. Aber die einzige Eigenschaft worauf es hier ankommt besitzen sie, sie sind Grössen, die durch Beobachtungen bestimmt werden, und die Functionen

$$\begin{aligned} &l - bx' - cx'' - \ldots \\ &l' - b'x' - c'x'' - \ldots \\ &l'' - b''x' - c''x'' - \ldots \end{aligned}$$

u. s. w. sind jetzt eben sowohl die durch Beobachtungen erlangten Werthe von ax, $a'x$, $a''x$, etc. wie n, n', n'', etc. im Vorhergehenden. Der Ausdruck (9) ist daher immer noch der wahrscheinlichste Werth von x, wenn den Gleichungen (10), oder vielmehr den in denselben enthaltenen Grössen l, l', l'', etc. der Reihe nach die Gewichte p, p', p'', etc.

beigelegt werden. Substituirt man daher die vorstehenden Werthe von n, n', n'', etc. in die Gleichungen (9) und setzt zur Abkürzung

$$\begin{aligned}
(aa) &= pa^2 + p'a'^2 + p''a''^2 + \ldots \\
(ab) &= pab + p'a'b' + p''a''b'' + \ldots \\
(ac) &= pac + p'a'c' + p''a''c'' + \ldots \\
&\vdots \\
(al) &= pal + p'a'l' + p''a''l'' + \ldots
\end{aligned}$$

so wird der wahrscheinlichste Werth von x

$$x = \frac{(al) - (ab)x' - (ac)x'' - \ldots}{(aa)}$$

Wenn nun durch anderweitige Bestimmungen die wahrscheinlichsten Werthe von x', x'', etc. erlangt werden können, so giebt die Substitution dieser einen bestimmten wahrscheinlichen Werth von x. Solche anderweitigen Bestimmungen sind zu erhalten, denn dasselbe Verfahren, welches wir eben zur Bestimmung von x angewandt haben, kann auch zur Bestimmung der übrigen Unbekannten angewandt werden. Setzt man jetzt

$$\begin{aligned}
n &= l - ax - cx'' - \ldots \\
n' &= l' - a'x - c'x'' - \ldots \\
n'' &= l'' - a''x - c''x'' - \ldots
\end{aligned}$$

u. s. w. und substituirt diese in die (9), nachdem sie in die folgende abgeändert worden ist,

$$x' = \frac{pbn + p'b'n' + p''b''n'' + \ldots}{pb^2 + p'b'^2 + p''b''c''^2 \ldots}$$

so wird der wahrscheinlichste Werth von x'

$$x' = \frac{(bl) - (ab)x - (bc)x'' - \ldots}{(bb)}$$

wenn zur Abkürzung

$$\begin{aligned}
(bb) &= pb^2 + p'b'^2 + p''b''^2 + \ldots \\
(bc) &= pbc + p'b'c' + p''b''c'' + \ldots \\
&\vdots \\
(bl) &= pbl + p'b'l' + p''b''l'' + \ldots
\end{aligned}$$

gesetzt wird. Eben so erhält man für x'' den wahrscheinlichsten Werth

$$x'' = \frac{(cl) - (ac)x - (bc)x' - \ldots}{(cc)}$$

wo

$$\begin{aligned}
(cc) &= pc^2 + p'c'^2 + p''c''^2 + \ldots \\
&\vdots \\
(cl) &= pcl + p'c'l' + p''c''l'' + \ldots
\end{aligned}$$

ist, und so ferner, wenn die Zahl der Unbekannten grösser ist. Da die für x, x', x'', etc. eben entwickelten Gleichungen neben einander bestehen müssen, so erhält man die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten in bestimmten Ausdrücken durch wechselseitige Elimination derselben, aus den obigen Gleichungen, die auch wie folgt gestellt werden können

$$(11) \quad \ldots \quad \begin{cases} (aa)x + (ab)x' + (ac)x'' + \ldots = (al) \\ (ab)x + (bb)x' + (bc)x'' + \ldots = (bl) \\ (ac)x + (bc)x' + (cc)x'' + \ldots = (cl) \\ \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.} \end{cases}$$

20.

Die im vor. Art. erhaltene Auflösung unserer Aufgabe kann erst dann als vollständig betrachtet werden, wenn nachgewiesen wird, dass das System von Gleichungen (11), auf welches wir gekommen sind, so beschaffen ist, dass in jedem Falle die Unbekannten daraus bestimmt werden können. Die erste Bedingung hiefür ist, dass die Zahl der Gleichungen der der Unbekannten gleich ist, und dass diese Bedingung erfüllt ist, lehrt der Augenschein. Die zweite Bedingung ist, dass von den gegebenen Gleichungen keine in den übrigen enthalten ist, oder ihnen widerspricht, und dieses ist hier zu untersuchen.

Bezeichnen wir die Gleichungen (11) zur Abkürzung mit $v = 0$, $v' = 0$, $v'' = 0$, etc., dann wird das Nichtvorhandensein der zweiten Bedingung zur Folge haben, dass sich eine Gleichung von der Form

$$v + \alpha v' + \beta v'' + \ldots\ldots = 0 \text{ oder } = \text{constante}$$

aufstellen lässt, die unabhängig von den Unbekannten erfüllt ist, und umgekehrt, wenn eine solche Gleichung nicht vorhanden ist, dann ist die obige zweite Bedingung erfüllt, und die Unbekannten x, x', x'', etc. sind durch die Gleichungen (11) bestimmbar. Substituirt man die Gleichungen (11) in die vorstehende, und setzt, wie für das Erfülltsein derselben nothwendig ist, die Coefficienten der Unbekannten, jeden für sich, gleich Null, so bekommt man

$$(12) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} 0 = (aa) + \alpha(ab) + \beta(ac) + \ldots \\ 0 = (ab) + \alpha(bb) + \beta(bc) + \ldots \\ 0 = (ac) + \alpha(bc) + \beta(cc) + \ldots \\ \quad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.} \end{cases}$$

deren Anzahl um Eine grösser ist, wie die der Unbekannten α, β, etc., und die also nur bedingungsweise erfüllt werden können. Seien

$$\begin{aligned}
\varrho &= pa + \alpha pb + \beta pc + \ldots, \\
\varrho' &= p'a' + \alpha p'b' + \beta p'c' + \ldots \\
\varrho'' &= p''a'' + \alpha p''b'' + \beta p''c'' + \ldots \\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

erhebt man diese ins Quadrat, dividirt darauf bez. mit p, p', p'', etc. und addirt, so wird in Folge der (12)

$$0 = \frac{\varrho^2}{p} + \frac{\varrho'^2}{p'} + \frac{\varrho''^2}{p''} + \ldots$$

woraus, da alle p positiv sind

$$\varrho = 0\,, \quad \varrho' = 0\,, \quad \varrho'' = 0\,, \text{ etc.}$$

folgt. Es wird also

$$\begin{aligned}
0 &= a + \alpha b + \beta c + \ldots \\
0 &= a' + \alpha b' + \beta c' + \ldots \\
0 &= a'' + \alpha b'' + \beta c'' + \ldots \\
&\text{etc.} \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Diese sind die Gleichungen (10), von welchen wir ausgegangen sind, mit dem Unterschiede, dass die völlig bekannten Glieder fehlen, und die Zahl der Unbekannten um Eine kleiner ist. Den vorstehenden Gleichungen kann aber nur in dem Falle Gnüge geleistet werden, wenn unter ihnen eine so grosse Anzahl in den übrigen enthalten ist, dass die Zahl der von einander unabhängigen $m-1$ ist, wenn m die Zahl der Unbekannten x, x', x'', etc. bezeichnet. In diesem Falle können aber aus den (10) die Unbekannten überhaupt nicht bestimmt werden. Sind im Gegentheil von den vorstehenden Gleichungen gar keine, oder eine geringere Zahl in den übrigen enthalten, so kann weder diesen noch den Gleichungen (12) Gnüge geleistet werden, und die Gleichungen (11) bestimmen die Unbekannten unzweideutig. Wir kommen daher auf den Schluss, dass wenn durch die Gleichungen (10) die Unbekannten entweder völlig bestimmt, oder mehr wie bestimmt sind, die (11) die Unbekannten völlig bestimmen, wenn aber im Gegentheil die (10) die Unbekannten unbestimmt lassen, so ist dasselbe mit den (11) der Fall.

Dieser Satz ergänzt die am Schlusse des Art. 18 aufgestellten Sätze.

21.

Da nun durch die Ermittelung der Unbekannten aus den (11) im Allgemeinen keine der (10) vollständig erfüllt wird, so kann man nach einer Relation zwischen den übrig bleibenden Fehlern fragen, und es zeigt sich leicht, dass eine solche vorhanden ist und darin besteht, dass die Summe der mit den bez. Gewichten multiplicirten Quadrate der übrig bleibenden Fehler ein Minimum wird. Denn stellt man diese Bedingung auf, nemlich

$$\begin{aligned} &p(ax+bx'+cx''+\ldots-l)^2\\ &+p'(a'x+b'x'+c'x''+\ldots-l')^2\\ &+p''(a''x+b''x'+c''x''+\ldots-l'')^2+\text{etc.}=\text{Minimum}\end{aligned}$$

und entwickelt sie, so bekommt man die Gleichungen (11) wieder, gleichwie sich im Art. 3 zeigte, dass die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler bei der Bestimmung Einer Unbekannten aus gleich guten Beobachtungen ein Minimum wird, wenn man das arithmetische Mittel aus allen Bestimmungen als den wahrscheinlichsten Werth der Unbekannten betrachtet.

Den obigen Satz, den man sonst voran zu stellen pflegt, haben wir hier aus dem zu Anfang dieser Abhandlung aufgestellten Grundsatz abgeleitet, um zu zeigen, dass er eine nothwendige Folge desselben ist.

22.

Zur vollständigen Auflösung der Aufgabe, die uns jetzt beschäftigt, gehört auch die Bestimmung der Gewichte der Unbekannten x, x', x'', etc. Da das Verfahren, durch welches diese Unbekannten im Vorhergehenden bestimmt worden sind, auf linearische Gleichungen geführt hat, so ist es klar, dass man jede derselben als linearische Function der bekannten Glieder (al), (bl), (cl), etc. der Gleichungen (11) darstellen kann, und da wiederum jedes dieser Glieder eine linearische Function der durch die Beobachtungen unabhängig von einander erhaltenen Grössen l, l', l'', etc. ist, so kann man auch die Unbekannten als linearische Functionen dieser letzt genannten Grössen darstellen. Seien daher

$$(13)\quad\ldots\ldots\quad\begin{cases} x=\lambda l+\lambda' l'+\lambda'' l''+\ldots\\ x'=\varkappa l+\varkappa' l'+\varkappa'' l''+\ldots\\ x''=\mu l+\mu' l'+\mu'' l''+\ldots\end{cases}$$

u. s. w. dann sind λ, λ', etc., $\varkappa$, $\varkappa'$, etc., μ, μ', etc. bestimmte numerische Coefficienten, deren Werthe jedenfalls zufolge des Vorhergehenden ermittelt werden können. Bezeichnet man nun die Gewichte dieser Bestimmungen von x, x', x'', etc. mit P, P', P'', etc. so wird sogleich in Folge der Gleichung (8)

$$\frac{1}{P} = \frac{\lambda^2}{p} + \frac{\lambda'^2}{p'} + \frac{\lambda''^2}{p''} + \ldots$$
$$\frac{1}{P'} = \frac{\varkappa^2}{p} + \frac{\varkappa'^2}{p'} + \frac{\varkappa''^2}{p''} + \ldots$$
$$\frac{1}{P''} = \frac{\mu^2}{p} + \frac{\mu'^2}{p'} + \frac{\mu''^2}{p''} + \ldots$$

u. s. w. Durch die unbestimmte Auflösung der Gleichungen (11) erhält man

$$\left.\begin{aligned} x &= (1,1)(al) + (1,2)(bl) + (1,3)(cl) + \ldots \\ x' &= (1,2)(al) + (2,2)(bl) + (2,3)(cl) + \ldots \\ x'' &= (1,3)(al) + (2,3)(bl) + (3,3)(cl) + \ldots \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (14)$$

u. s. w. wo (1,1), (1,2), etc. bestimmte numerische Werthe haben. Substituirt man die Ausdrücke des Art. 19 für (al), (bl), etc. in die vorstehenden Gleichungen, so erhält man

$$\begin{aligned} x = {} & \{(1,1)pa + (1,2)pb + (1,3)pc + \ldots\}l \\ & + \{(1,1)p'a' + (1,2)p'b' + (1,3)p'c' + \ldots\}l' \\ & + \text{etc.} \\ x' = {} & \{(1,2)pa + (2,2)pb + (2,3)pc + \ldots\}l \\ & + \{(1,2)p'a' + (2,2)p'b' + (2,3)p'c' + \ldots\}l' \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

u. s. w. Vergleicht man diese mit den (13), so wird

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= (1,1)pa + (1,2)pb + (1,3)pc + \ldots \\ \lambda' &= (1,1)p'a' + (1,2)p'b' + (1,3)p'c' + \ldots \\ & \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (15)$$

$$\left.\begin{aligned} \varkappa &= (1,2)pa + (2,2)pb + (2,3)pc + \ldots \\ \varkappa' &= (1,2)p'a' + (2,2)p'b' + (2,3)p'c' + \ldots \\ & \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (16)$$

u. s. w. Multiplicirt man aber die ursprünglichen Gleichungen (10) der Reihe nach erst mit λ, λ', λ'', etc. und addirt, dann mit $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, etc. und addirt, u. s. w., so ergiebt sich

$$(\lambda a)x + (\lambda b)x' + (\lambda c)x'' + \ldots = (\lambda l)$$
$$(\varkappa a)x + (\varkappa b)x' + (\varkappa c)x'' + \ldots = (\varkappa l)$$

u. s. w. wo

$$\begin{aligned}
(\lambda a) &= \lambda a + \lambda' a' + \lambda'' a'' + \dots \\
(\lambda b) &= \lambda b + \lambda' b' + \lambda'' b'' + \dots \\
&\vdots \\
(\lambda l) &= \lambda l + \lambda' l' + \lambda'' l'' + \dots \\
\hline
(\varkappa a) &= \varkappa a + \varkappa' a' + \varkappa'' a'' + \dots \\
(\varkappa b) &= \varkappa b + \varkappa' b' + \varkappa'' b'' + \dots \\
&\vdots \\
(\varkappa l) &= \varkappa l + \varkappa' l' + \varkappa'' l'' + \dots
\end{aligned}$$

u. s. w. Aber in Folge dieser Bezeichnung geben die Gleichungen (13)

$$x = (\lambda l), \quad x' = (\varkappa l), \quad x'' = (\mu l), \text{ etc.}$$

und folglich werden

$$(17) \quad \dots \quad \left\{\begin{array}{lll} (\lambda a) = 1, & (\lambda b) = 0, & (\lambda c) = 0 \\ (\varkappa a) = 0, & (\varkappa b) = 1, & (\varkappa c) = 0 \\ (\mu a) = 0, & (\mu b) = 0, & (\mu c) = 1 \end{array}\right.$$

u. s. w. Multiplicirt man hierauf die (15) der Reihe nach mit $\frac{\lambda}{p}$, $\frac{\lambda'}{p'}$, $\frac{\lambda''}{p''}$, etc. und addirt, so wird in Folge der vorstehenden Bedingungsgleichungen

$$\frac{\lambda^2}{p} + \frac{\lambda'^2}{p'} + \frac{\lambda''^2}{p''} + \dots = (1,1)$$

die Gleichungen (16) geben auf ähnliche Art

$$\frac{\varkappa^2}{p} + \frac{\varkappa'^2}{p'} + \frac{\varkappa''^2}{p''} + \dots = (2,2)$$

und auf dieselbe Weise bekommt man

$$\frac{\mu^2}{p} + \frac{\mu'^2}{p'} + \frac{\mu''^2}{p''} + \dots = (3,3)$$

u. s. w. Es folgen hieraus für die Gewichte die folgenden einfachen Ausdrücke,

$$P = \frac{1}{(1,1)}, \quad P' = \frac{1}{(2,2)}, \quad P'' = \frac{1}{(3,3)}, \text{ etc.}$$

die auch wie folgt durch Worte beschrieben werden können. Um die Gewichte der Unbekannten x, x', x'', etc. zu erhalten, muss man die Gleichungen (11) unbestimmt auflösen, worauf das Reciproke des Coefficienten von (al) im Ausdruck von x, das Gewicht von x, das Reciproke des Coefficienten von (bl) im Ausdruck von x', das Gewicht von x', das Reciproke des Coefficienten von (cl) im Ausdruck von x'', das Gewicht von x'', u. s. w. ausdrückt. Das einfachste Verfahren um sowohl diese,

wie die übrigen Coefficienten der unbestimmten Elimination zu erhalten wird weiter unten angegeben werden.

23.

Da Fälle vorkommen können, in welchen nicht nur die Kenntniss von x, x', x'', etc., sondern auch die Kenntniss von Functionen derselben verlangt werden, so soll hier noch der wahrscheinlichste Werth einer linearischen Function dieser Grössen, nebst dem Gewicht dieser Bestimmung abgeleitet werden. Die Function sei die folgende,

$$K = k + \varepsilon x + \varepsilon' x' + \varepsilon'' x'' + \ldots$$

wo k, ε, ε', ε'', etc. gegebene numerische Grössen sind. Es ist nun ohne Weiteres klar, dass der wahrscheinlichste Werth von K durch die Substitution der im Vorhergehenden ermittelten wahrscheinlichsten Werthe von x, x', x'', etc. in den vorstehenden Ausdruck erhalten wird, und es wird sich daher hier nur um den Ausdruck des Gewichts dieser Bestimmung handeln können.

Eliminirt man x, x', x'', etc. im vorstehenden Ausdruck für K durch die Gleichungen (13), so wird

$$\begin{aligned} K = k &+ (\varepsilon\lambda + \varepsilon'\varkappa + \varepsilon''\mu + \ldots)\, l \\ &+ (\varepsilon\lambda' + \varepsilon'\varkappa' + \varepsilon''\mu' + \ldots)\, l' \\ &+ (\varepsilon\lambda'' + \varepsilon'\varkappa'' + \varepsilon''\mu'' + \ldots)\, l'' + \text{etc.} \qquad (18) \end{aligned}$$

und da hier K durch die durch Beobachtungen erhaltenen Grössen l, l', l'', etc. ausgedrückt ist, so giebt die Gleichung (8) für das Gewicht von K, wenn wir es mit Q bezeichnen, sogleich den folgenden Ausdruck,

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q} = &\frac{(\varepsilon\lambda + \varepsilon'\varkappa + \varepsilon''\mu + \ldots)^2}{p} \\ + &\frac{(\varepsilon\lambda' + \varepsilon'\varkappa' + \varepsilon''\mu' + \ldots)^2}{p'} \\ + &\frac{(\varepsilon\lambda'' + \varepsilon'\varkappa'' + \varepsilon''\mu'' + \ldots)^2}{p''} + \text{etc.} \qquad (19) \end{aligned}$$

Multiplicirt man aber die Gleichungen (15) der Reihe nach mit $\frac{\varkappa}{p}$, $\frac{\varkappa'}{p'}$, $\frac{\varkappa''}{p''}$, etc. und addirt, so ergiebt sich in Folge der Bedingungsgleichungen (17) sogleich

$$\frac{\lambda\varkappa}{p} + \frac{\lambda'\varkappa'}{p'} + \frac{\lambda''\varkappa''}{p''} + \ldots = (1,2)$$

und auf dieselbe Weise bekommt man

$$\frac{\lambda\mu}{p} + \frac{\lambda'\mu'}{p'} + \frac{\lambda''\mu''}{p''} + \ldots = (1,3)$$
$$\frac{\varkappa\mu}{p} + \frac{\varkappa'\mu'}{p'} + \frac{\varkappa''\mu''}{p''} + \ldots = (2,3)$$

u. s. w. Durch Anwendung dieser Gleichungen auf den Ausdruck für $\frac{1}{Q}$ erhält man, nachdem die darin vorkommenden Quadrate entwickelt worden sind,

$$\begin{aligned}\frac{1}{Q} = \varepsilon^2(1,1) + 2\varepsilon\varepsilon'(1,2) + 2\varepsilon\varepsilon''(1,3) + \ldots \\ + \varepsilon'^2(2,2) + 2\varepsilon'\varepsilon''(2,3) + \ldots \\ + \varepsilon''^2(3,3) + \ldots \\ + \ldots\end{aligned}$$

womit die Aufgabe gelöst ist. Man erkennt leicht, dass die obigen Ausdrücke für die Gewichte P, P', P'', etc. specielle Fälle vom Vorstehenden sind, wie auch nicht anders sein kann.

24.

In Bezug auf die im Vorhergehenden abgeleiteten Ausdrücke für die Gewichte P, P', P'', etc. und Q sind noch ein Paar wichtige Bemerkungen zu machen. Die anfänglich erhaltenen Ausdrücke für diese Gewichte gelten nicht blos für den Fall, in welchem man die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten anwendet, sondern in jedem überhaupt möglichen Falle. Die Ausdrücke für x, x', x'', etc. können in jedem Falle auf die Form gebracht werden, die ihnen in den Gleichungen (13) gegeben worden ist, und wenn man nun blos die ursprünglichen Gleichungen (10) betrachtet, die die Unbekannten mit einander verbinden, so kann diesen auf unzählig viele Arten bis auf Weniges Gnüge geleistet werden. Jede verschiedene Art der Gnügeleistung derselben wird auf die Gleichungen (13) keine andere Wirkung äussern, als dass die darin enthaltenen Coefficienten λ, λ', etc. $\varkappa$, $\varkappa'$, etc. μ, μ', etc. andere Werthe annehmen, und folglich die Unbekannten selbst auch. Wie aber nun auch die Werthe der eben genannten Coefficienten sein mögen, die Ausdrücke der Gewichte, die Functionen derselben Coefficienten sind, behalten ihre volle Geltung, und geben jedes Mal das Gewicht der ausgeführten Bestimmung der Unbekannten, und dieses gilt nicht nur für die genannten Ausdrücke für P, P', etc. sondern auch für den Ausdruck für Q, der ausdrücklich Function der oben genannten Coefficienten λ, λ', etc. $\varkappa$, $\varkappa'$, etc. etc. ist.

Die Substitution derjenigen Werthe der eben genannten Coefficienten, die die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten geben, muss nun vor allen Substitutionen anderer Werthe derselben den Gewichten die Eigenschaft verleihen, dass sie Maxima werden. Denn gäbe es irgend andere Werthe dieser Coefficienten, die den Gewichten grössere Werthe verleihen könnten, so würden diese, und nicht jene die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten geben. Dass in der That die Werthe der genannten Coefficienten, die im Vorhergehenden als diejenigen ermittelt worden sind, die die Werthe der Unbekannten zu den wahrscheinlichsten machen, auch die Gewichte zu Maxima machen, soll jetzt bewiesen werden. Da P, P', etc. specielle Werthe von Q sind, so braucht der Beweis nur für Q durchgeführt zu werden.

25.

Denken wir uns jetzt unter den Coefficienten λ, λ', etc. $\varkappa$, $\varkappa'$, etc. μ, μ', etc. etc. der Gleichungen (13) nicht diejenigen, die durch das oben abgeleitete Verfahren erhalten worden sind, sondern solche, die irgend eine beliebige Combination der Gleichungen (10) gegeben hat, so wird der daraus entspringende Werth der Function K immer noch durch die Gleichung (18), und das Gewicht dieser Bestimmung durch die Gleichung (19) gegeben sein. Untersuchen wir hierauf, wie die oft genannten Coefficienten bestimmt werden müssen, wenn der Gleichung (19) die Bedingung untergelegt wird, dass Q ein Maximum werde. Sei

$$\begin{aligned} \Lambda &= \varepsilon\lambda + \varepsilon'\varkappa + \varepsilon''\mu + \dots \\ \Lambda' &= \varepsilon\lambda' + \varepsilon'\varkappa' + \varepsilon''\varkappa' + \dots \\ \Lambda'' &= \varepsilon\lambda'' + \varepsilon'\varkappa'' + \varepsilon''\mu'' + \dots \end{aligned}$$

u. s. w. dann muss

$$\frac{1}{Q} = \frac{\Lambda^2}{p} + \frac{\Lambda'^2}{p'} + \frac{\Lambda''^2}{p''} + \dots \quad . \quad , \quad . \quad . \qquad (20)$$

in Bezug auf die Functionen Λ, Λ', Λ'', etc. ein Minimum werden. Diese Functionen sind nicht von einander unabhängig, sondern unterliegen einer Anzahl von Bedingungen, die man leicht erhalten kann. Multiplicirt man die Gleichungen (10) der Reihe nach mit λ, λ', λ'', etc. und addirt, so bekommt man in Folge der (13)

$$\begin{aligned} a\lambda + a'\lambda' + a''\lambda'' + \dots &= 1 \\ b\lambda + b'\lambda' + b''\lambda'' + \dots &= 0 \\ c\lambda + c'\lambda' + c''\lambda'' + \dots &= 0 \end{aligned}$$

u. s. w. Multiplicirt man ferner die (10) mit $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, etc. und addirt, so ergiebt sich

$$a\varkappa + a'\varkappa' + a''\varkappa'' + \ldots = 0$$
$$b\varkappa + b'\varkappa' + b''\varkappa'' + \ldots = 1$$
$$c\varkappa + c'\varkappa' + c''\varkappa'' + \ldots = 0$$

u. s. w. und eben so bekommt man

$$a\mu + a'\mu' + a''\mu'' + \ldots = 0$$
$$b\mu + b'\mu' + b''\mu'' + \ldots = 0$$
$$c\mu + c'\mu' + c''\mu'' + \ldots = 1$$

u. s. w. Um diese Gleichungen zu Functionen der $\varDelta$, $\varDelta'$, etc. zu machen, multiplicire man die erste Gleichung einer jeden Gruppe der Reihe nach mit ε, ε', ε'', etc. und addire. Mit den zweiten, dritten, u. s. w. Gleichungen verfahre man eben so, worauf die folgenden erhalten werden

$$(21) \quad \ldots \quad \begin{cases} a\varDelta + a'\varDelta' + a''\varDelta'' + \ldots = \varepsilon \\ b\varDelta + b'\varDelta' + b''\varDelta'' + \ldots = \varepsilon' \\ c\varDelta + c'\varDelta' + c''\varDelta'' + \ldots = \varepsilon'' \end{cases}$$

u. s. w. welche die Bedingungsgleichungen sind, auf die es hier ankommt.

26.

Um nun die Bedingungsgleichungen für das Minimum des Ausdrucks (20) zu erhalten müsste man erst durch die vorstehenden Gleichungen, deren Anzahl kleiner ist wie die der $\varDelta$, $\varDelta'$, etc., von der letzteren so viele wie möglich eliminiren. Allein es ist bekannt, dass man statt dessen die Bedingungsgleichungen, jede mit einem verschiedenen Factor multiplicirt, zur Function die ein Minimum werden soll addiren, und dann nach der Differentiation alle Differentiale von einander als unabhängig betrachten darf. Multiplicirt man daher die obigen Bedingungsgleichungen der Reihe nach mit den Factoren $-2A$, $-2B$, $-2C$, etc., und addirt sie zur rechten Seite des Ausdrucks (20), so wird

$$\begin{aligned} &\frac{\varDelta^2}{p} + \frac{\varDelta'^2}{p'} + \frac{\varDelta''^2}{p''} + \ldots \\ &- 2a\varDelta A - 2a'\varDelta' A - 2a''\varDelta'' A - \ldots \\ &- 2b\varDelta B - 2b'\varDelta' B - 2b''\varDelta'' B - \ldots \\ &- 2c\varDelta C - 2c'\varDelta' C - 2c''\varDelta'' C - \ldots \\ &\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

die Function, die ein absolutes Minimum werden muss. Differentiirt man, und setzt die Coefficienten eines jeden der Differentiale für sich gleich Null, so werden

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathcal{A}}{p} - aA - bB - cC - \ldots &= 0 \\ \frac{\mathcal{A}'}{p'} - a'A - b'B - c'C - \ldots &= 0 \\ \frac{\mathcal{A}''}{p''} - a''A - b''B - c''C - \ldots &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (22)$$

u. s. w. die Bedingungsgleichungen des Maximums von Q. Eliminirt man nun mittelst der vorstehenden Gleichungen die $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, etc. aus den (21), so bekommt man

$$\left.\begin{aligned} (aa)A + (ab)B + (ac)C + \ldots &= \varepsilon \\ (ab)A + (bb)B + (bc)C + \ldots &= \varepsilon' \\ (ac)A + (bc)B + (cc)C + \ldots &= \varepsilon'' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (23)$$

u. s. w. wo die Coefficienten (aa), (ab), etc. dieselben sind wie im Art. 19. Diese Gleichungen, deren Anzahl der der Factoren A, B, C, etc. gleich ist, dienen zur Bestimmung dieser letzteren. Durch Einführung der Functionen $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, etc. in die (18) bekommt man

$$K = k + \mathcal{A}l + \mathcal{A}'l' + \mathcal{A}''l'' + \ldots$$

und die Elimination der $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, etc. hieraus, vermittelst der Gleichungen (22), giebt

$$K = k + A(al) + B(bl) + C(cl) + \ldots \quad \ldots \quad (24)$$

wo wieder die Coefficienten (al), (bl), etc. dieselben sind wie im Art. 19. Hiemit ist unsere Aufgabe gelöst, und es ist nur noch die Bedeutung dieser Auflösung zu untersuchen.

27.

Löst man die (23) unbestimmt auf, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} A &= (1,1)\varepsilon + (1,2)\varepsilon' + (1,3)\varepsilon'' + \ldots \\ B &= (1,2)\varepsilon + (2,2)\varepsilon' + (2,3)\varepsilon'' + \ldots \\ C &= (1,3)\varepsilon + (2,3)\varepsilon' + (3,3)\varepsilon'' + \ldots \end{aligned}$$

u. s. w. wo nothwendiger Weise die Coefficienten $(1,1)$, $(1,2)$, etc. dieselben sind wie in den Gleichungen (14), und eliminirt man hiemit A, B, etc. aus (24) so kommt



$$K = k + \{(1,1)(al) + (1,2)(bl) + (1,3)(cl) + \ldots\}\varepsilon$$
$$+ \{(1,2)(al) + (2,2)(bl) + (2,3)(cl) + \ldots\}\varepsilon'$$
$$+ \{(2,3)(al) + (2,3)(bl) + (3,3)(cl) + \ldots\}\varepsilon'' + \text{etc.}$$

Die Factoren von ε, ε', ε'', etc. sind zufolge der Gleichungen (14) die wahrscheinlichsten Werthe von x, x', x'', etc., und folglich ist der Ausdruck (24) von K mit dem, im Art. als den wahrscheinlichsten, Werth von K erkannten identisch.

Für die Grössen x, x', x'', etc. ergiebt sich dasselbe. Denn setzt man $k=0$, $\varepsilon=1$, $\varepsilon'=\varepsilon''=\text{etc.}=0$, so geht K in x über, setzt man $k=0$, $\varepsilon=0$, $\varepsilon'=1$, $\varepsilon''=\text{etc.}=0$, so geht K in x' über, u. s. w. Führt man aber diese Substitution im vorstehenden Ausdruck von K aus, so bekommt man die durch die (14) ausgedrückten wahrscheinlichsten Werthe von x, x', x'', etc. wieder. Es ist also hiemit der Satz bewiesen:

»Die durch Anwendung der wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten, oder irgend welchen Functionen der Unbekannten sich ergebenden Gewichte dieser Bestimmungen sind Maxima, und jede andere Bestimmung derselben führt auf Gewichte die kleiner sind.«

§. 3. Ausdehnung der bisher behandelten Aufgabe auf den Fall, in welchem die Unbekannten nicht von einander unabhängig sind.

28.

Bisher ist angenommen worden, dass die Unbekannten x, x', x'', etc. von einander unabhängig seien, da aber Fälle vorkommen, wo dieses nicht der Fall ist, so soll jetzt angenommen werden, dass zufolge der Aufgabe, auf welche die Wahrscheinlichkeitsrechnung angewandt werden soll, zwischen den Unbekannten Eine oder mehrere Bedingungsgleichungen stattfinden. Es ist an sich klar, dass die Zahl dieser Bedingungsgleichungen kleiner sein muss wie die Zahl der Unbekannten, denn wären diese beiden Zahlen einander gleich, so würden die Unbekannten daraus ohne Zuziehung von Beobachtungen bestimmt werden können, und wäre die Zahl der Bedingungsgleichungen grösser wie die der Unbekannten, so könnten letztere gar nicht bestimmt werden. Seien nun in grösster Allgemeinheit die Bedingungsgleichungen

$$\psi(X, X', X'', \ldots) = 0$$
$$\chi(X, X', X'', \ldots) = 0$$



u. s. w. wo ψ, χ, etc. Functionszeichen sind, so verfahre man zuerst wie im Art. 18 gezeigt worden ist. Man setze wieder

$$X = \xi + x\,,\quad X' = \xi' + x'\,,\quad X'' = \xi'' + x'', \text{ etc.}$$

$$\psi(\xi, \xi', \xi'', \ldots) = f$$
$$\chi(\xi, \xi', \xi'', \ldots) = g$$
etc.

$$\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right) = q\,,\quad \left(\frac{d\psi}{d\xi'}\right) = q'\,,\quad \left(\frac{d\psi}{d\xi''}\right) = q'', \text{ etc.}$$
$$\left(\frac{d\chi}{d\xi}\right) = r\,,\quad \left(\frac{d\chi}{d\xi'}\right) = r'\,,\quad \left(\frac{d\chi}{d\xi''}\right) = r'', \text{ etc.}$$

u. s. w. dann bekommt man die folgenden linearischen Gleichungen

$$0 = qx + q'x' + q''x'' + \ldots + f$$
$$0 = rx + r'x' + r''x'' + \ldots + g$$

u. s. w. Da diese Bedingungsgleichungen als solche betrachtet werden, die aus der Theorie der Aufgabe, die auf die Unbekannten x, x', x'', etc. hingeführt hat, entspringen, und von den Beobachtungen unabhängig sind, so müssen sie vollständig erfüllt werden, denn jedes System von Werthen der Unbekannten, welches diesen Gleichungen nicht vollständig gnügt, ist gewiss falsch, und kann daher unmöglich das wahrscheinlichste sein.

Die Auflösung unserer Aufgabe, die sich zunächst darbietet, ist die folgende. Wenn q die Anzahl der Bedingungsgleichungen bezeichnet, so kann man aus denselben durch die Elimination eine Anzahl q der Unbekannten in Function der übrigen darstellen, eliminirt man nun durch diese Gleichungen aus den (10) diese q Unbekannten, dann sind die übrigen Unbekannten von einander unabhängig, und die gegenwärtige Aufgabe ist auf die des Art. 18 u. f. hingeführt. Der weitere Verlauf der Auflösung ist also mit der im vor. § ausgeführten identisch.

29.

Ich nehme zu dem Ende an, dass in den Gleichungen (10) ausser den dort angeführten Unbekannten x, x', x'', etc. auch die Unbekannten $x_{\prime}$, $x_{\prime\prime}$, etc. vorkommen, und dass die letzteren es sind, die sich zur Elimination durch die Bedingungsgleichungen eignen. Es ist nemlich an sich klar, dass nicht in allen Fällen beliebige Unbekannte durch die Bedingungsgleichungen eliminirt werden können. Die Gleichungen (10) sind also jetzt die folgenden,

$$(25)\quad . \begin{cases} ax + bx' + cx'' + \ldots + b_{,}x_{,} + c_{,}x_{,,} + \ldots = l \\ a'x + b'x' + c'x'' + \ldots + b_{,}'x_{,} + c_{,}'x_{,,} + \ldots = l' \\ a''x + b''x' + c''x'' + \ldots + b_{,}''x_{,} + c_{,}''x_{,,} + \ldots = l'' \end{cases}$$

u. s. w. Auf gleiche Weise schreibe ich die Bedingungsgleichungen hin, indem ich zur besseren Uebersicht eine dritte Gleichung, so wie eine dritte Unbekannte der zweiten Gattung hinzufüge,

$$\begin{aligned} 0 &= qx + q'x' + q''x'' + \ldots + q_{,}x_{,} + q_{,,}x_{,,} + q_{,,,}x_{,,,} + \ldots + f \\ 0 &= rx + r'x' + r''x'' + \ldots + r_{,}x_{,} + r_{,,}x_{,,} + r_{,,,}x_{,,,} + \ldots + g \\ 0 &= sx + s'x' + s''x'' + \ldots + s_{,}x_{,} + s_{,,}x_{,,} + s_{,,,}x_{,,,} + \ldots + h \end{aligned}$$

u. s. w. Um hieraus $x_{,}$, $x_{,,}$, $x_{,,,}$, etc., jede für sich, in Function der x, x', x'', etc. darzustellen lehrt der Augenschein, dass die folgenden Gleichungen aufgelöst werden müssen,

$$\begin{aligned} 0 &= q_{,}\zeta + q_{,,}\zeta' + q_{,,,}\zeta'' + \ldots + f\,; & 0 &= q_{,}\mu + q_{,,}\mu' + q_{,,,}\mu'' + \ldots + q \\ 0 &= r_{,}\zeta + r_{,,}\zeta' + r_{,,,}\zeta'' + \ldots + g\,; & 0 &= r_{,}\mu + r_{,,}\mu' + r_{,,,}\mu'' + \ldots + r \\ 0 &= s_{,}\zeta + s_{,,}\zeta' + s_{,,,}\zeta'' + \ldots + h\,; & 0 &= s_{,}\mu + s_{,,}\mu' + s_{,,,}\mu'' + \ldots + s \\ &\text{etc.} & &\text{etc.} \\ 0 &= q_{,}\nu + q_{,,}\nu' + q_{,,,}\nu'' + \ldots + q'\,; & 0 &= q_{,}\varrho + q_{,,}\varrho' + q_{,,,}\varrho'' + \ldots + q'' \\ 0 &= r_{,}\nu + r_{,,}\nu' + r_{,,,}\nu'' + \ldots + r'\,; & 0 &= r_{,}\varrho + r_{,,}\varrho' + r_{,,,}\varrho'' + \ldots + r'' \\ 0 &= s_{,}\nu + s_{,,}\nu' + s_{,,,}\nu'' + \ldots + s'\,; & 0 &= s_{,}\varrho + s_{,,}\varrho' + s_{,,,}\varrho'' + \ldots + s'' \\ &\text{etc.} & &\text{etc.} \end{aligned}$$

etc. in welchen allen die Coefficienten der Unbekannten immer dieselben sind. Hat man hieraus ζ, ζ', etc. μ, μ', etc. ν, ν', etc. ϱ, ϱ', etc. etc. ermittelt, so werden

$$(26)\quad . \; . \; . \begin{cases} x_{,} = \zeta + \mu x + \nu x' + \varrho x'' + \ldots \\ x_{,,} = \zeta' + \mu' x + \nu' x' + \varrho' x'' + \ldots \\ x_{,,,} = \zeta'' + \mu'' x + \nu'' x' + \varrho'' x'' + \ldots \end{cases}$$

u. s. w. Setzt man nun

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= a + b_{,}\mu + c_{,}\mu' + \ldots\,; & \mathfrak{a}' &= a' + b_{,}'\mu + c_{,}'\mu' + \ldots \\ \mathfrak{b} &= b + b_{,}\nu + c_{,}\nu' + \ldots\,; & \mathfrak{b}' &= b' + b_{,}'\nu + c_{,}'\nu' + \ldots \\ \mathfrak{c} &= c + b_{,}\varrho + c_{,}\varrho' + \ldots\,; & \mathfrak{c}' &= c' + b_{,}'\varrho + c_{,}'\varrho' + \ldots \\ &\vdots & &\vdots \\ \mathfrak{n} &= l - b_{,}\zeta - c_{,}\zeta' + \ldots\,; & \mathfrak{n}' &= l' - b_{,}'\zeta - c_{,}'\zeta' + \ldots \\ \mathfrak{a}'' &= a'' + b_{,}''\mu + c_{,}''\mu' + \\ \mathfrak{b}'' &= b'' + b_{,}''\nu + c_{,}''\nu' + \\ \mathfrak{c}'' &= c'' + b_{,}''\varrho + c_{,}''\varrho' + & &\text{etc.} \\ &\vdots \\ \mathfrak{n}'' &= l'' - b_{,}''\zeta - c_{,}''\zeta' + \end{aligned}$$

dann gehen die (25) in die folgenden über, in welchen alle Unbekannten von einander unabhängig sind

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{a}x + \mathfrak{b}x' + \mathfrak{c}x'' + \ldots = \mathfrak{n} \\ \mathfrak{a}'x + \mathfrak{b}'x' + \mathfrak{c}'x'' + \ldots = \mathfrak{n}' \\ \mathfrak{a}''x + \mathfrak{b}''x' + \mathfrak{c}''x'' + \ldots = \mathfrak{n}'' \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (27)$$

u. s. w. Diese Gleichungen müssen also demselben Verfahren unterworfen werden wie die (10), und die der (11) analogen, die daraus hervorgehen, geben die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten x, x', x'', etc. Man muss nemlich zuerst die folgenden Coefficienten bilden

$$\begin{array}{l} (\mathfrak{aa}) = p\mathfrak{a}^2 + p'\mathfrak{a}'^2 + p''\mathfrak{a}''^2 + \ldots \\ (\mathfrak{ab}) = p\mathfrak{ab} + p'\mathfrak{a}'\mathfrak{b}' + p''\mathfrak{a}''\mathfrak{b}'' + \ldots \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ (\mathfrak{an}) = p\mathfrak{an} + p'\mathfrak{a}'\mathfrak{n}' + p''\mathfrak{a}''\mathfrak{n}'' + \ldots \\ \hline (\mathfrak{bb}) = p\mathfrak{b}^2 + p'\mathfrak{b}'^2 + p''\mathfrak{b}''^2 + \ldots \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ (\mathfrak{bn}) = p\mathfrak{bn} + p'\mathfrak{b}'\mathfrak{n}' + p''\mathfrak{b}''\mathfrak{n}'' + \ldots \\ \hline \end{array}$$

u. s. w. wenn wieder p, p', p'', etc. die Gewichte der Bestimmungen von l, l', l'', etc. bezeichnen. Sind die vorstehenden Grössen berechnet, so ergeben sich durch die Auflösung der folgenden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} (\mathfrak{aa})x + (\mathfrak{ab})x' + (\mathfrak{ac})x'' + \ldots = (\mathfrak{an}) \\ (\mathfrak{ab})x + (\mathfrak{bb})x' + (\mathfrak{bc})x'' + \ldots = (\mathfrak{bn}) \\ (\mathfrak{ac})x + (\mathfrak{bc})x' + (\mathfrak{cc})x'' + \ldots = (\mathfrak{cn}) \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (28)$$

u. s. w. die wahrscheinlichsten Werthe von x, x', x'', etc. und substituirt man die für diese erhaltenen Werthe in die (26), so ergeben sich die wahrscheinlichsten Werthe von $x_{,}$, $x_{,,}$, $x_{,,,}$, etc., womit alle Unbekannten erhalten sind.

30.

Die Gewichte dieser Bestimmungen von x, x', x'', etc. haben dieselben Ausdrücke wie in der vorhergehenden Aufgabe, da die Analyse des Art. 22, nachdem a, b, etc. l, a', etc. in $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, etc. $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{a}'$, etc. verwandelt worden sind, ohne Abänderung wieder stattfindet. Sei also durch die unbestimmte Auflösung der Gleichungen (28)

$$x = (I, I)(\mathfrak{an}) + (I, II)(\mathfrak{bn}) + (I, III)(\mathfrak{cn}) + \ldots$$
$$x' = (I, II)(\mathfrak{an}) + (II, II)(\mathfrak{bn}) + (II, III)(\mathfrak{cn}) + \ldots$$
$$x'' = (I, III)(\mathfrak{an}) + (II, III)(\mathfrak{bn}) + (III, III)(\mathfrak{cn}) + \ldots$$

u. s. w. erhalten worden, dann wird

$$P = \frac{1}{(I, I)}\,; \quad P' = \frac{1}{(II, II)}\,; \quad P'' = \frac{1}{(III, III)}\,; \text{ etc.}$$

wenn wieder P, P', etc. die Gewichte der vorstehenden Bestimmungen von x, x', etc. bezeichnen. Da die $x_{\prime}$, $x_{\prime\prime}$, etc. zu Functionen der x, x', etc. gemacht worden sind, so werden ihre Gewichte eben so bestimmt, wie das der Function K des Art. 23, und der dort für dieses Gewicht erhaltene Ausdruck giebt nach Abänderung der Bezeichnungen die Gewichte der obigen Bestimmungen von $x_{\prime}$, $x_{\prime\prime}$, etc. Bezeichnet man diese Gewichte mit $P_{\prime}$, $P_{\prime\prime}$, etc., so ergiebt sich sogleich

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_{\prime}} = \mu^2(I, I) &+ 2\mu\nu\,(I, II) + 2\mu\varrho\,(I, III) + \ldots \\ &+ \nu^2(II, II) + 2\nu\varrho\,(II, III) + \ldots \\ &\qquad + \varrho^2\,(III, III) + \ldots \\ &\qquad\qquad + \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_{\prime\prime}} = \mu'^2(I, I) &+ 2\mu'\nu'(I, II) + 2\mu'\varrho'(I, III) + \ldots \\ &+ \nu'^2(II, II) + 2\nu'\varrho'(II, III) + \ldots \\ &\qquad + \varrho'^2\,(III, III) + \ldots \\ &\qquad\qquad + \ldots \end{aligned}$$

u. s. w. womit die Gewichte aller Unbekannten bestimmt sind.

31.

Von der eben gelösten Aufgabe lässt sich eine andere Auflösung geben, die auf elegante Relationen führt, aber statt genau dieselbe Aufgabe wieder vorzunehmen, will ich die folgende etwas allgemeinere aufstellen *).

Allgemeine Aufgabe.

Seien wie früher

$$\psi\,(X, X', X'', \ldots) = 0$$
$$\chi\,(X, X', X'', \ldots) = 0$$
$$\text{etc.}$$

*) S. Schum. Astr. Nachr. Bd. XVI. No. 361.

eine Anzahl von Gleichungen, die, durch irgend eine Theorie gegeben, zwischen den Unbekannten X, X', X'', etc. stattfinden, deren Anzahl aber kleiner ist wie die der Unbekannten, so dass letztere dadurch nicht völlig bestimmt sind. Es wird nun angenommen, dass es möglich wird alle Unbekannten zu bestimmen, wenn man die Werthe L, L', etc. gewisser Functionen

$$f\,(X, X', X'', \ldots) = L$$
$$F\,(X, X', X'', \ldots) = L'$$
$$\text{etc.}$$

durch Beobachtungen ermittelt, und man fragt in dem Falle, wo die Anzahl aller Functionen ψ, χ, etc. f, F, etc. grösser, oder wenigstens nicht kleiner ist wie die Anzahl der Unbekannten, nicht nur nach den wahrscheinlichsten Werthen dieser, und den Gewichten dieser Bestimmungen, sondern auch nach dem wahrscheinlichsten Werthe irgend einer Function Ω derselben Unbekannten und dem Gewicht dieser Bestimmung.

Auflösung.

Die Functionen bereitet man, wenn sie nicht ursprünglich linearisch sind, alle auf dieselbe Weise vor, wie in den Artt. 18 u. 28 gezeigt worden ist. Die dort eingeführten Bezeichnungen sollen hier beibehalten werden. In Bezug auf die Function Ω sei

$$\Omega\,(X, X', X'', \ldots) = \omega$$
$$\left(\frac{d\Omega}{dX}\right) = k, \quad \left(\frac{d\Omega}{dX'}\right) = k', \quad \left(\frac{d\Omega}{dX''}\right) = k'', \quad \text{etc.}$$

und somit beruht die Aufgabe auf die Behandlung der folgenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} ax + bx' + cx'' + \ldots &= l \\ a'x + b'x' + c'x'' + \ldots &= l' \\ a''x + b''x' + c''x'' + \ldots &= l'' \\ \text{etc.} \qquad\qquad &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (29)$$

$$\left.\begin{aligned} qx + q'x' + q''x'' + \ldots + f &= 0 \\ rx + r'x' + r''x'' + \ldots + g &= 0 \\ sx + s'x' + s''x'' + \ldots + h &= 0 \\ \text{etc.} \qquad\qquad &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (30)$$

$$\Omega = \omega + kx + k'x' + k''x'' + \ldots \quad \ldots \quad (31)$$

Die Anzahl der Gleichungen (29) sei m, die Anzahl der (30) sei q, und die der Unbekannten x, x', x'', etc. sei n. Es ist nun hier Bedingung, dass

$$q < n\,, \quad m + q > n$$

oder wenigstens nicht $m + q < n$ sei. Es folgt hieraus aber nicht, dass nothwendig $m > n$ sein muss, wenn gleich dieser Fall eintreten kann, in Bezug auf m und n sind vielmehr alle drei Fälle

$$m < n\,, \quad m = n\,, \quad m > n$$

möglich.

32.

Wie man nun auch die x, x', x'', etc. aus den obigen Gleichungen bestimmen mag, die Ausdrücke derselben können wieder nur linearische Functionen von l, l', l'', etc. f, g, h, etc. sein, und sie haben daher die folgende Form

$$(32)\cdot\begin{cases} x = \zeta l + \zeta' l' + \zeta'' l'' + \ldots - \varphi f - \chi g - \psi h - \ldots \\ x' = \theta l + \theta' l' + \theta'' l'' + \ldots - \varphi' f - \chi' g - \psi' h - \ldots \\ x'' = \varrho l + \varrho' l' + \varrho'' l'' + \ldots - \varphi'' f - \chi'' g - \psi'' h - \ldots \end{cases}$$

u. s. w. wo ζ, ζ', etc. θ, θ', etc. ϱ, ϱ', etc. φ, φ', etc. χ, χ', etc. ψ, ψ', etc. numerische, jetzt noch unbekannte, Coefficienten sind. Die Anzahl dieser Gleichungen ist $= n$, und die Anzahl der eben genannten unbekannten Coefficienten ist $= n\,(m + q)$, aber diese Unbekannten sind nicht völlig von einander unabhängig, sondern hängen durch eine Anzahl $= n^2$ von Gleichungen gegenseitig von einander ab, so dass in der That nur eine Anzahl $= n\,(m + q - n)$ dieser Unbekannten von einander unabhängig sind. Um die Gleichungen, die zwischen diesen Unbekannten stattfinden, zu erhalten, multiplicire man die Gleichungen (29) der Reihe nach mit ζ, ζ', ζ'', etc. die (30) mit φ, χ, ψ, etc., und addire die Produkte, worauf die Vergleichung mit der ersten (32) die folgenden Gleichungen giebt,

$$\begin{aligned} \zeta a + \zeta' a' + \zeta'' a'' + \ldots + \varphi q + \chi r + \psi s + \ldots &= 1 \\ \zeta b + \zeta' b' + \zeta'' b'' + \ldots + \varphi q' + \chi r' + \psi s' + \ldots &= 0 \\ \zeta c + \zeta' c' + \zeta'' c'' + \ldots + \varphi q'' + \chi r'' + \psi s'' + \ldots &= 0 \end{aligned}$$

u. s. w. Multiplicirt man hierauf dieselben Gleichungen der Reihe nach mit θ, θ', θ'', etc. und φ', χ', ψ', etc. und addirt, so giebt die Vergleichung mit der zweiten (32)



$$\theta a + \theta' a' + \theta'' a'' + \ldots + \varphi' q + \chi' r + \psi' s + \ldots = 0$$
$$\theta b + \theta' b' + \theta'' b'' + \ldots + \varphi' q' + \chi' r' + \psi' s' + \ldots = 1$$
$$\theta c + \theta' c' + \theta'' c'' + \ldots + \varphi' q'' + \chi' r'' + \psi' s'' + \ldots = 0$$

u. s. w. und eben so ergiebt sich

$$\varrho a + \varrho' a' + \varrho'' a'' + \ldots + \varphi'' q + \chi'' r + \psi'' s + \ldots = 0$$
$$\varrho b + \varrho' b' + \varrho'' b'' + \ldots + \varphi'' q' + \chi'' r' + \psi'' s' + \ldots = 0$$
$$\varrho c + \varrho' c' + \varrho'' c'' + \ldots + \varphi'' q'' + \chi'' r'' + \psi'' s'' + \ldots = 1$$

u. s. w. u. s. w. Man erkennt leicht, dass die Anzahl aller dieser Gleichungen $= n^2$ ist, wie oben angeführt wurde.

33.

Wie man nun auch die Unbekannten x, x', etc. bestimmen mag, so folgt aus der (31), nachdem man x, x', etc. durch die (32) eliminirt hat, dass

$$\Omega = \omega + \Lambda l + \Lambda' l' + \Lambda'' l'' + \ldots - \alpha f - \beta g - \gamma h - \ldots \quad (33)$$

wird, wenn man

$$\left.\begin{aligned} \Lambda &= k\zeta + k'\theta + k''\varrho + \ldots \\ \Lambda' &= k\zeta' + k'\theta' + k''\varrho' + \ldots \\ \Lambda'' &= k\zeta'' + k'\theta'' + k''\varrho'' + \ldots \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (34)$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= k\varphi + k'\varphi' + k''\varphi'' + \ldots \\ \beta &= k\chi + k'\chi' + k''\chi'' + \ldots \\ \gamma &= k\psi + k'\psi' + k''\psi'' + \ldots \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (35)$$

setzt, und wenn man das Gewicht dieser Bestimmung von Ω mit P bezeichnet, so wird zufolge der Gleichung (8)

$$\frac{1}{P} = \frac{\Lambda^2}{p} + \frac{\Lambda'^2}{p'} + \frac{\Lambda''^2}{p''} + \ldots \quad \ldots \quad (36)$$

wenn wieder p, p', p'', etc. die Gewichte der Bestimmungen von l, l', l'', etc. bezeichnen.

Wir wollen jetzt zur Lösung unserer Aufgabe den im Art. 27 bewiesenen Satz anwenden, zufolge dessen durch die wahrscheinlichste Bestimmung der Unbekannten die Gewichte Maxima werden. Es muss demzufolge die rechte Seite der Gleichung (36) zu einem Minimum gemacht werden, und dieses wird wieder ein sogenanntes relatives Minimum, da die Λ, Λ', Λ'', etc. nicht von einander unabhängig sind. Die

Bedingungsgleichungen zwischen den eben genannten Grössen erhält man aus den im vor. Art. erhaltenen Gleichungen, eben so wie am eben a. O. Man multiplicire die erste Gleichung einer jeden Gruppe dieser Gleichungen der Reihe nach mit k, k', k'', etc, und addire, und behandle die übrigen Gleichungen eben so, dann ergeben sich

$$(37)\quad \begin{cases} \Delta a + \Delta' a' + \Delta'' a'' + \ldots + \alpha q + \beta r + \gamma s + \ldots . = k \\ \Delta b + \Delta' b' + \Delta'' b'' + \ldots + \alpha q' + \beta r' + \gamma s' + \ldots . = k' \\ \Delta c + \Delta' c' + \Delta'' c'' + \ldots + \alpha q'' + \beta r'' + \gamma s'' + \ldots . = k'' \end{cases}$$

u. s. w. welche die gesuchten Bedingungsgleichungen sind. Multiplicirt man nun diese Gleichungen mit den unbestimmten Factoren $-2A$, $-2B$, $-2C$, etc. und addirt sie zur rechten Seite der Gleichung (36), so wird der Ausdruck, welcher ein absolutes Minimum werden muss, der folgende

$$\begin{array}{llll} \frac{\Delta^2}{p} - 2A\Delta a & -2B\Delta b & -2C\Delta c & - \ldots \\ + \frac{\Delta'^2}{p'} - 2A\Delta' a' & -2B\Delta' b' & -2C\Delta' c' & - \ldots \\ + \frac{\Delta''^2}{p''} - 2A\Delta'' a'' & -2B\Delta'' b'' & -2C\Delta'' c'' & - \ldots \\ \text{etc.} & & \text{etc.} & \\ - 2A\alpha q & - 2B\alpha q' & - 2C\alpha q'' & - \ldots \\ - 2A\beta r & - 2B\beta r' & - 2C\beta r'' & - \ldots \\ - 2A\gamma s & - 2B\gamma s' & - 2C\gamma s'' & - \ldots \\ \text{etc.} & & \text{etc.} & \\ + 2Ak & + 2Bk' & + 2Ck'' & + \ldots \end{array}$$

Differentiirt man diesen nach Δ, Δ', Δ'', etc. α, β, γ, etc. und betrachtet darauf die Differentiale aller dieser Veränderlichen als unabhängig von einander, so bekommt man die Gleichungen

$$(38)\quad \ldots \quad \begin{cases} \frac{\Delta}{p} = Aa + Bb + Cc + \ldots \\ \frac{\Delta'}{p'} = Aa' + Bb' + Cc' + \ldots \\ \frac{\Delta''}{p''} = Aa'' + Bb'' + Cc'' + \ldots \\ \quad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{cases}$$

$$(39)\quad \ldots \quad \begin{cases} 0 = Aq + Bq' + Cq'' + \ldots \\ 0 = Ar + Br' + Cr'' + \ldots \\ 0 = As + Bs' + Cs'' + \ldots \\ \quad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{cases}$$

die in Verbindung mit den (37) die Auflösung der Aufgabe in sich enthalten. Diese ist durch die Zuziehung der Bedingung des Maximums von P wieder eine bestimmte geworden, denn die Zahl der aufzulösenden Gleichungen ist der Zahl der darin befindlichen Unbekannten gleich. Die Zahl der $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, etc. ist $= m$, die der A, B, etc. $= n$, und die der α, β, etc. $= q$, folglich ist die Zahl aller Unbekannten $= m + n + q$. Die Anzahl der Gleichungen (37) ist $= n$, die der (38) $= m$, und die der (39) $= q$, folglich ist die Anzahl aller Gleichungen auch $= n + m + q$.

34.

Die Unbekannten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, etc. können wieder sogleich eliminirt werden. Zieht man die Werthe derselben aus (38), und substituirt sie in die (37), so erhält man

$$\begin{aligned}
[aa]A + [ab]B + [ac]C + \ldots &= k - \alpha q - \beta r - \gamma s - \ldots \\
[ab]A + [bb]B + [bc]C + \ldots &= k' - \alpha q' - \beta r' - \gamma s' - \ldots \\
[ac]A + [bc]B + [cc]C + \ldots &= k'' - \alpha q'' - \beta r'' - \gamma s'' - \ldots
\end{aligned}$$

u. s. w. worin

$$\begin{aligned}
[aa] &= pa^2 + p'a'^2 + p''a''^2 + \ldots \\
[ab] &= pab + p'a'b' + p''a''b'' + \ldots \\
[ac] &= pac + p'a'c' + p''a''c'' + \ldots \\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \\
[bb] &= pb^2 + p'b'^2 + p''b''^2 + \ldots \\
[bc] &= pbc + p'b'c' + p''b''c'' + \ldots \\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \\
[cc] &= pc^2 + p'c'^2 + p''c''^2 + \ldots \\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

gesetzt sind. Es ist nun für den ferneren Verlauf der Auflösung von Vortheil die eben erhaltenen Gleichungen dergestalt in zwei Theile zu zerlegen, dass der eine Theil

$$[aa]A' + [ab]B' + [ac]C' + \ldots = k$$

u. s. w. wird, aber ohne angemessene Abänderung der Coefficienten dieser Gleichungen ist dieses nicht immer möglich. Die Anzahl der Unbekannten A', B', C', etc. ist freilich immer der der Gleichungen gleich, und somit scheint es als könnten diese Unbekannten immer aus diesen Gleichungen bestimmt werden, von welchen ich die erste hier angesetzt

habe. Es ist aber zu bemerken, dass diese Gleichungen aus den einzigen (29) hervor gehen, deren Anzahl m ist, während die Anzahl der A', B', etc. $= n$ ist. In allen Fällen nun, wo $m = n$ oder $m > n$ ist, ist die Bestimmung der A', B', etc. aus den obigen Gleichungen zwar möglich, aber in den Fällen in welchen $m < n$ ist, trifft dieses nicht mehr ein, denn alsdann sind nothwendiger Weise $n - m$ dieser Gleichungen in den übrigen enthalten.

Man kann demohngeachtet die in Rede stehenden Gleichungen so vorbereiten, dass sie in jedem Falle alle wesentlich von einander verschieden werden, und zwar kann dieses durch angemessene Zuziehung der Gleichungen (39) bewirkt werden. Aus diesen bekommt man leicht

$$\begin{aligned} 0 &= [qq]A + [qq']B + [qq'']C + \ldots \\ 0 &= [qq']A + [q'q']B + [q'q'']C + \ldots \\ 0 &= [qq'']A + [q'q'']B + [q''q'']C + \ldots \end{aligned}$$

u. s. w. wenn man

$$\begin{aligned} [qq] &= q^2 + r^2 + s^2 + \ldots \\ [qq'] &= qq' + rr' + ss' + \ldots \\ [qq''] &= qq'' + rr'' + ss'' + \ldots \\ &\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \\ [q'q'] &= q'^2 + r'^2 + s'^2 + \ldots \\ [q'q''] &= q'q'' + r'r'' + s's'' + \ldots \\ &\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \\ [q''q''] &= q''^2 + r''^2 + s''^2 + \ldots \end{aligned}$$

u. s. w. setzt. Macht man nun

$$\begin{aligned} (aa) &= [aa] + [qq] \\ (ab) &= [ab] + [qq'] \\ (ac) &= [ac] + [qq''] \\ &\text{etc.} \\ (bb) &= [bb] + [q'q'] \\ (bc) &= [bc] + [q'q''] \\ &\text{etc.} \\ (cc) &= [cc] + [q''q''] \end{aligned}$$

u. s. w. so wird auch

$$\begin{aligned} (aa)A + (ab)B + (ac)C + \ldots &= k - \alpha q - \beta r - \gamma s - \ldots \\ (ab)A + (bb)B + (bc)C + \ldots &= k' - \alpha q' - \beta r' - \gamma s' - \ldots \\ (ac)A + (bc)B + (cc)C + \ldots &= k'' - \alpha q'' - \beta r'' - \gamma s'' - \ldots \end{aligned}$$

u. s. w. aus welchen man immer, auch nachdem die mit α, β, γ, etc. multiplicirten Glieder abgeschnitten worden sind, die übrigen Unbekannten bestimmen kann. Ja es ist, um die Möglichkeit dieser Bestimmung herbei zu führen, nicht einmal nöthig alle Gleichungen (39) auf die eben erklärte Art mit den obigen Gleichungen zu verbinden, sondern die Anwendung einer Anzahl von $n-m$ der Gleichungen (39), die man beliebig unter diesen auswählen kann, reicht schon dazu aus.

35.

Setzt man jetzt

$$\left.\begin{aligned}(aa)A' + (ab)B' + (ac)C' + \ldots &= k\\ (ab)A' + (bb)B' + (bc)C' + \ldots &= k'\\ (ac)A' + (bc)B' + (cc)C' + \ldots &= k''\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (40)$$

u. s. w. und löst diese unbestimmt auf, so wird man erhalten

$$\left.\begin{aligned}A' &= (1,1)k + (1,2)k' + (1,3)k'' + \ldots\\ B' &= (1,2)k + (2,2)k' + (2,3)k'' + \ldots\\ C' &= (1,3)k + (2,3)k' + (3,3)k'' + \ldots\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (41)$$

u. s. w. und hieraus ergiebt sich in Folge der Gleichungen des vor. Art.

$$\left.\begin{aligned}A &= A' - (\alpha\eta)\alpha - (\alpha\varkappa)\beta - (\alpha\lambda)\gamma - \ldots\\ B &= B' - (\beta\eta)\alpha - (\beta\varkappa)\beta - (\beta\lambda)\gamma - \ldots\\ C &= C' - (\gamma\eta)\alpha - (\gamma\varkappa)\beta - (\gamma\lambda)\gamma - \ldots\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (42)$$

u. s. w. nachdem zur Abkürzung

$$\begin{aligned}(\alpha\eta) &= (1,1)q + (1,2)q' + (1,3)q'' + \ldots\\ (\alpha\varkappa) &= (1,1)r + (1,2)r' + (1,3)r'' + \ldots\\ (\alpha\lambda) &= (1,1)s + (1,2)s' + (1,3)s'' + \ldots\\ &\text{etc.}\\ (\beta\eta) &= (1,2)q + (2,2)q' + (2,3)q'' + \ldots\\ (\beta\varkappa) &= (1,2)r + (2,2)r' + (2,3)r'' + \ldots\\ (\beta\lambda) &= (1,2)s + (2,2)s' + (2,3)s'' + \ldots\\ &\text{etc.}\\ (\gamma\eta) &= (1,3)q + (2,3)q' + (3,3)q'' + \ldots\\ (\gamma\varkappa) &= (1,3)r + (2,3)r' + (3,3)r'' + \ldots\\ (\gamma\lambda) &= (1,3)s + (2,3)s' + (3,3)s'' + \ldots\end{aligned}$$

u. s. w. gesetzt worden ist. Multiplicirt man nun die (42) der Reihe nach erst mit q, q', q'', etc. dann mit r, r', r'', etc. dann mit s, s', s'', etc. etc.

und addirt jedes Mal, so ergeben sich in Folge der Gleichungen (39) und (41) die folgenden

$$(43) \quad \ldots \quad \begin{cases} (\eta\eta)\alpha + (\eta\varkappa)\beta + (\eta\lambda)\gamma + \ldots = (\eta M) \\ (\eta\varkappa)\alpha + (\varkappa\varkappa)\beta + (\varkappa\lambda)\gamma + \ldots = (\varkappa M) \\ (\eta\lambda)\alpha + (\varkappa\lambda)\beta + (\lambda\lambda)\gamma + \ldots = (\lambda M) \end{cases}$$

u. s. w. wo

$$\begin{aligned}
(\eta\eta) &= (\alpha\eta)q + (\beta\eta)q' + (\gamma\eta)q'' + \ldots \\
(\eta\varkappa) &= (\alpha\varkappa)q + (\beta\varkappa)q' + (\gamma\varkappa)q'' + \ldots \\
&= (\alpha\eta)r + (\beta\eta)r' + (\gamma\eta)r'' + \ldots \\
(\eta\lambda) &= (\alpha\lambda)q + (\beta\lambda)q' + (\gamma\lambda)q'' + \ldots \\
&= (\alpha\eta)s + (\beta\eta)s' + (\gamma\eta)s'' + \ldots \\
&\text{etc.} \\
(\eta M) &= (\alpha\eta)k + (\beta\eta)k' + (\gamma\varkappa)k'' + \ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\varkappa\varkappa) &= (\alpha\varkappa)r + (\beta\varkappa)r' + (\gamma\varkappa)r'' + \ldots \\
(\varkappa\lambda) &= (\alpha\lambda)r + (\beta\lambda)r' + (\gamma\lambda)r'' + \ldots \\
&= (\alpha\varkappa)s + (\beta\varkappa)s' + (\gamma\varkappa)s'' + \ldots \\
&\text{etc.} \\
(\varkappa M) &= (\alpha\varkappa)k + (\beta\varkappa)k' + (\gamma\varkappa)k'' + \ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\lambda\lambda) &= (\alpha\lambda)s + (\beta\lambda)s' + (\gamma\lambda)s'' + \ldots \\
&\text{etc.} \\
(\lambda M) &= (\alpha\lambda)k + (\beta\lambda)k' + (\gamma\lambda)k'' + \ldots
\end{aligned}$$

u. s. w. Durch die Auflösung der Gleichungen (43) bekommt man nun immer die Werthe der Unbekannten α, β, γ, etc., und substituirt man diese nebst den Werthen von A', B', C', etc. in die (42), so ergeben sich auch die A, B, C, etc. durch bekannte Grössen ausgedrückt. Geht man hierauf zur Gleichung (33) zurück, und substituirt in diese die aus den (38) zu entnehmenden Werthe von $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$, etc. so bekommt man, nachdem

$$\begin{aligned}
(al) &= pal + p'a'l' + p''a''l'' + \ldots \\
(bl) &= pbl + p'b'l' + p''b''l'' + \ldots \\
(cl) &= pcl + p'c'l' + p'c''l'' + \ldots
\end{aligned}$$

u. s. w. gesetzt worden sind,

$$\begin{aligned}
\Omega = \omega &+ A(al) + B(bl) + C(cl) + \ldots \\
&- \alpha f - \beta g - \gamma h - \ldots
\end{aligned}$$

welches der wahrscheinlichste Werth von Ω ist. Multiplicirt man ferner die Gleichungen (38)mit A, A', A'', und addirt, so wird in Folge der Gleichungen (37), (39), (36) das Gewicht dieser Bestimmung

$$P = \frac{1}{Ak + Bk' + Ck'' + \ldots}$$

Hiemit ist unsere Aufgabe schon vollständig gelöst, denn nicht nur der wahrscheinlichste Werth von Ω und das Gewicht dieser Bestimmung, sondern auch die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten x, x', x'', etc. nebst ihren Gewichten sind durch die im Vorhergehenden abgeleiteten Ausdrücke gegeben, wie man weiter unten sehen wird.

36.

Man kann in Bezug auf die eben erhaltenen Ausdrücke für Ω und P noch einen Schritt weiter gehen. Eliminirt man die A, B, C, etc. durch die Gleichungen (42), und setzt

$$\begin{aligned} F &= f + (\alpha\eta)(al) + (\beta\eta)(bl) + (\gamma\eta)(cl) + \ldots \\ G &= g + (\alpha\varkappa)(al) + (\beta\varkappa)(bl) + (\gamma\varkappa)(cl) + \ldots \\ H &= h + (\alpha\lambda)(al) + (\beta\lambda)(bl) + (\gamma\lambda)(cl) + \ldots \end{aligned}$$

u. s. w. und hierauf

$$\begin{aligned} Y &= A'(al) + B'(bl) + C'(cl) + \ldots \\ Z &= F\alpha + G\beta + H\gamma + \ldots \end{aligned}$$

so wird

$$\Omega = \omega + Y - Z$$

Setzt man ferner

$$\begin{aligned} R &= A'k + B'k' + C'k'' + \ldots \\ S &= \alpha(\eta M) + \beta(\varkappa M) + \gamma(\lambda M) + \ldots \end{aligned}$$

so ergiebt sich

$$P = \frac{1}{R - S}$$

Für Z lässt sich noch ein anderer Ausdruck geben, der wenigstens in dem Falle, wo man die Gewichte entweder gar nicht oder doch nur wenige derselben kennen lernen will, auf eine einfachere Rechnung führt. Durch die unbestimmte Auflösung der Gleichungen (43) habe man erhalten

$$\alpha = \{1,1\}(\eta M) + \{1,2\}(\varkappa M) + \{1,3\}(\lambda M) + \ldots$$
$$\beta = \{1,2\}(\eta M) + \{2,2\}(\varkappa M) + \{2,3\}(\lambda M) + \ldots$$
$$\gamma = \{1,3\}(\eta M) + \{2,3\}(\varkappa M) + \{3,3\}(\lambda M) + \ldots$$

u. s. w. Eliminirt man hiemit α, β, γ, etc. aus dem obigen Ausdruck für Z, so wird

$$\begin{aligned} Z = & \Big\{ \{1,1\}F + \{1,2\}G + \{1,3\}H + \ldots \Big\} (\eta M) \\ & + \Big\{ \{1,2\}F + \{2,2\}G + \{2,3\}H + \ldots \Big\} (\varkappa M) \\ & + \Big\{ \{1,3\}F + \{2,3\}G + \{3,3\}H + \ldots \Big\} (\lambda M) \\ & + \ldots \end{aligned}$$

Setzt man daher

$$(44) \quad \ldots \quad \begin{cases} (\eta\eta)\alpha_{,} + (\eta\varkappa)\beta_{,} + (\eta\lambda)\gamma_{,} + \ldots = F \\ (\eta\varkappa)\alpha_{,} + (\varkappa\varkappa)\beta_{,} + (\varkappa\lambda)\gamma_{,} + \ldots = G \\ (\eta\lambda)\alpha_{,} + (\varkappa\lambda)\beta_{,} + (\lambda\lambda)\gamma_{,} + \ldots = H \end{cases}$$

u. s. w. so bekommt man

$$Z = \alpha_{,}(\eta M) + \beta_{,}(\varkappa M) + \gamma_{,}(\lambda M) + \ldots$$

Dieser Ausdruck führt namentlich in der Anwendung unsèrer Aufgabe auf die Geodäsie, wie man weiter unten sehen wird, auf eine kürzere Rechnung wie jener.

37.

Zur weiteren Ausarbeitung der im Vorhergehenden enthaltenen Auflösung unserer Aufgabe ist zuerst die Auflösung der Gleichungen (40) auszuführen. Man multiplicire die erste (40) mit dem unbestimmten Factor α' und addire sie zur zweiten; man multiplicire ferner die erste mit α'', die zweite mit β'', und addire beide zur dritten; ferner die erste mit α''', die zweite mit β''', die dritte mit γ''', und addire alle diese zur vierten, u. s. w. Bestimmt man nun diese Factoren so, dass nach einander A', A' und B', A', B' und C', u. s. w. verschwinden, dann sind die (40) auf die folgende Form gebracht worden,

$$\begin{aligned} (aa)A' + (ab)B' + (ac)C' + (ad)D' + \ldots &= M = k \\ (bb,1)B' + (bc,1)C' + (bd,1)D' + \ldots &= M' \\ (cc,2)C' + (cd,2)D' + \ldots &= M'' \\ (dd,3)D' + \ldots &= M''' \\ + \ldots \quad & \ldots \end{aligned}$$

und für die eingeführten Hülfsgrössen ergeben sich die folgenden Gleichungen, die zur Bestimmung derselben dienen. Die eingeführten Factoren α', α'', β'', etc. werden durch die folgenden Gleichungen bestimmt,

$$(aa)\alpha' + (ab) = 0$$

$$\begin{aligned}(aa)\alpha'' + (ab)\beta'' + (ac) &= 0\\(ab)\alpha'' + (bb)\beta'' + (bc) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(aa)\alpha''' + (ab)\beta''' + (ac)\gamma''' + (ad) &= 0\\(ab)\alpha''' + (bb)\beta''' + (bc)\gamma''' + (bd) &= 0\\(ac)\alpha''' + (bc)\beta''' + (cc)\gamma''' + (cd) &= 0\end{aligned}$$

u. s. w. worauf $(bb,1)$, $(bc,1)$, etc. etc. sich durch die folgenden ergeben,

$$\begin{aligned}(ab)\alpha' + (bb) &= (bb,1)\\(ac)\alpha' + (bc) &= (bc,1)\\(ad)\alpha' + (bd) &= (bd,1)\\&\text{etc.}\\k\alpha' + k' &= M'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(ac)\alpha'' + (bc)\beta'' + (cc) &= (cc,2)\\(ad)\alpha'' + (bd)\beta'' + (cd) &= (cd,2)\\&\text{etc.}\\k\alpha'' + k'\beta'' + k'' &= M''\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(ad)\alpha''' + (bd)\beta''' + (cd)\gamma''' + (dd) &= (dd,3)\\&\text{etc.}\\k\alpha''' + k'\beta''' + k''\gamma''' + k''' &= M'''\end{aligned}$$

u. s. w. Vergleicht man aber die Gleichungen zur Bestimmung von α', β'', etc. mit den (40), so wird man sogleich gewahr, dass sie sich auch auf die folgende Form bringen lassen müssen,

$$(aa)\alpha' + (ab) = 0$$

$$\begin{aligned}(aa)\alpha'' + (ab)\beta'' + (ac) &= 0\\(bb,1)\beta'' + (bc,1) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(aa)\alpha''' + (ab)\beta''' + (ac)\gamma''' + (ad) &= 0\\(bb,1)\beta''' + (bc,1)\gamma''' + (bd,1) &= 0\\(cc,2)\gamma''' + (cd,2) &= 0\end{aligned}$$

u. s. w. Setzt man für einen Augenblick

$$
\begin{aligned}
A' &= \mathfrak{a}M + \mathfrak{b}M' + \mathfrak{c}M'' + \mathfrak{d}M''' + \ldots \\
B' &= \qquad \mathfrak{b}'M' + \mathfrak{c}'M'' + \mathfrak{d}'M''' + \ldots \\
C' &= \qquad\qquad \mathfrak{c}''M'' + \mathfrak{d}''M''' + \ldots \\
D' &= \qquad\qquad\qquad \mathfrak{d}'''M''' + \ldots \\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

und substituirt diese in die obigen Gleichungen für A', B', etc., so erhält man

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{a}(aa) = 1 \\
&\mathfrak{b}(aa) + \mathfrak{b}'(ab) = 0 \\
&\mathfrak{c}(aa) + \mathfrak{c}'(ab) + \mathfrak{c}''(ac) = 0 \\
&\mathfrak{d}(aa) + \mathfrak{d}'(ab) + \mathfrak{d}''(ac) + \mathfrak{d}'''(ad) = 0 \\
&\quad \text{etc.} \\
&\mathfrak{b}'(bb,1) = 1 \\
&\mathfrak{c}'(bb,1) + \mathfrak{c}''(bc,1) = 0 \\
&\mathfrak{d}'(bb,1) + \mathfrak{d}''(bc,1) + \mathfrak{d}'''(bd,1) = 0 \\
&\quad \text{etc.} \\
&\mathfrak{c}''(cc,2) = 1 \\
&\mathfrak{d}''(cc,2) + \mathfrak{d}'''(cd,2) = 0 \\
&\quad \text{etc.} \\
&\mathfrak{d}'''(dd,3) = 1 \\
&\quad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

und die Vergleichung dieser mit den vorstehenden, zur Bestimmung von α', β'', etc. dienenden, Gleichungen giebt sogleich

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{a} = \frac{1}{(aa)}, \quad \mathfrak{b} = \frac{\alpha'}{(bb,1)}, \quad \mathfrak{c} = \frac{\alpha''}{(cc,2)}, \quad \mathfrak{d} = \frac{\alpha'''}{(dd,3)}, \quad \text{etc.} \\
&\qquad\quad \mathfrak{b}' = \frac{1}{(bb,1)}, \quad \mathfrak{c}' = \frac{\beta''}{(cc,2)}, \quad \mathfrak{d}' = \frac{\beta'''}{(dd,3)}, \quad \text{etc.} \\
&\qquad\qquad\qquad \mathfrak{c}'' = \frac{1}{(cc,2)}, \quad \mathfrak{d}'' = \frac{\gamma'''}{(dd,3)}, \quad \text{etc.} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mathfrak{d}''' = \frac{1}{(dd,3)}, \quad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

und hieraus folgt

$$
\begin{aligned}
A' &= \frac{M}{(aa)} + \frac{M'}{(bb,1)}\alpha' + \frac{M''}{(cc,2)}\alpha'' + \frac{M'''}{(dd,3)}\alpha''' + \ldots \\
B' &= \qquad \frac{M'}{(bb,1)} + \frac{M''}{(cc,2)}\beta'' + \frac{M'''}{(dd,3)}\beta''' + \ldots \\
C' &= \qquad\qquad \frac{M''}{(cc,2)} + \frac{M'''}{(dd,3)}\gamma''' + \ldots \\
D' &= \qquad\qquad\qquad \frac{M'''}{(dd,3)} + \ldots
\end{aligned}
$$

u. s. w. durch welche die Unbekannten jede für sich gegeben sind. Diese Gleichungen geben ausserdem Anlass zu anderen Ausdrücken für α', β'', etc. Vergleicht man nemlich die Gleichungen, aus welchen die vorstehenden erhalten worden sind, mit denen für α', β'', etc., so lehrt der Augenschein, dass diese auch auf die folgende Form gebracht werden können,

$$\begin{aligned}
-\alpha' &= \frac{(ab)}{(aa)} \\[4pt]
\hline
-\alpha'' &= \frac{(ac)}{(aa)} + \frac{(bc,1)}{(bb,1)}\alpha' \\
-\beta'' &= \frac{(bc,1)}{(bb,1)} \\[4pt]
\hline
-\alpha''' &= \frac{(ad)}{(aa)} + \frac{(bd,1)}{(bb,1)}\alpha' + \frac{(cd,2)}{(cc,2)}\alpha'' \\
-\beta''' &= \frac{(bd,1)}{(bb,1)} + \frac{(cd,2)}{(cc,2)}\beta'' \\
-\gamma''' &= \frac{(cd,2)}{(cc,2)}
\end{aligned}$$

u. s. w. Endlich bekommt man aus den letzten Ausdrücken für A', B', etc. sehr leicht die Coefficienten der unbestimmten Auflösung der Gleichungen (40), denn aus der Substitution der Ausdrücke für M, M', etc. folgt sogleich

$$\begin{aligned}
(1,1) &= \frac{1}{(aa)} + \frac{\alpha'^2}{(bb,1)} + \frac{\alpha''^2}{(cc,2)} + \frac{\alpha'''^2}{(dd,3)} + \ldots \\
(1,2) &= \frac{\alpha'}{(bb,1)} + \frac{\alpha''\beta''}{(cc,2)} + \frac{\alpha'''\beta'''}{(dd,3)} + \ldots \\
(1,3) &= \frac{\alpha''}{(cc,2)} + \frac{\alpha'''\gamma'''}{(dd,3)} + \ldots \\
(1,4) &= \frac{\alpha'''}{(dd,3)} + \ldots \\
&\text{etc.} \\
(2,2) &= \frac{1}{(bb,1)} + \frac{\beta''^2}{(cc,2)} + \frac{\beta'''^2}{(dd,3)} + \ldots \\
(2,3) &= \frac{\beta''}{(cc,2)} + \frac{\beta'''\gamma'''}{(dd,3)} + \ldots \\
(2,4) &= \frac{\beta'''}{(dd,3)} + \ldots \\
&\text{etc.} \\
(3,3) &= \frac{1}{(cc,2)} + \frac{\gamma'''^2}{(dd,3)} + \ldots \\
(3,4) &= \frac{\gamma'''}{(dd,3)} + \ldots \\
&\text{etc.} \\
(4,4) &= \frac{1}{(dd,3)} + \ldots
\end{aligned}$$

u. s. w.

38.

Durch Hülfe des Inhalts des vor. Art. kann man sogleich die Auflösung der Gleichungen (43) hinschreiben. Es wird

$$\alpha = \frac{(\eta M)}{(\eta\eta)} + \frac{(\varkappa M,1)}{(\varkappa\varkappa,1)}\mathfrak{a}' + \frac{(\lambda M,2)}{(\lambda\lambda,2)}\mathfrak{a}'' + \ldots$$
$$\beta = \frac{(\varkappa M,1)}{(\varkappa\varkappa,1)} + \frac{(\lambda M,2)}{(\lambda\lambda,2)}\mathfrak{b}'' + \ldots$$
$$\gamma = \frac{(\lambda M,2)}{(\lambda\lambda,2)} + \ldots$$

u. s. w. wo

$$-\mathfrak{a}' = \frac{(\eta\varkappa)}{(\eta\eta)}$$

$$-\mathfrak{a}'' = \frac{(\eta\lambda)}{(\eta\eta)} + \frac{(\varkappa\lambda,1)}{(\varkappa\varkappa,1)}\mathfrak{a}'$$
$$-\mathfrak{b}'' = \frac{(\varkappa\lambda,1)}{(\varkappa\varkappa,1)}$$

etc.

$$(\eta\varkappa)\mathfrak{a}' + (\varkappa\varkappa) = (\varkappa\varkappa,1)$$
$$(\eta\lambda)\mathfrak{a}' + (\varkappa\lambda) = (\varkappa\lambda,1)$$

etc.

$$(\eta M)\mathfrak{a}' + (\varkappa M) = (\varkappa M,1)$$

$$(\eta\lambda)\mathfrak{a}'' + (\varkappa\lambda)\mathfrak{b}'' + (\lambda\lambda) = (\lambda\lambda,2)$$

etc.

$$(\eta M)\mathfrak{a}'' + (\varkappa M)\mathfrak{b}'' + (\lambda M) = (\lambda M,2)$$

etc.

39.

Nun lassen sich schon die Ausdrücke des Art. 36 für Ω und P auf ihre einfachste Form hinführen. Substituirt man die Ausdrücke des Art. 37 für A', B', etc. in den Ausdruck für Y, und setzt den vorstehenden Ausdrücken analog

$$(al)\alpha' + (bl) = (bl,1)$$
$$(al)\alpha'' + (bl)\beta'' + (cl) = (cl,2)$$
$$(al)\alpha''' + (bl)\beta''' + (cl)\gamma''' + (dl) = (dl,3)$$

u. s. w. so wird

$$Y = \frac{(al)}{(aa)}M + \frac{(bl,1)}{(bb,1)}M' + \frac{(cl,2)}{(cc,2)}M'' + \frac{(dl,3)}{(dd,3)}M''' + \ldots$$

und substituirt man dieselben Ausdrücke in den Ausdruck für R, so wird

$$R = \frac{M^2}{(aa)} + \frac{M'^2}{(bb,1)} + \frac{M''^2}{(cc,2)} + \frac{M'''^2}{(dd,3)} + \ldots$$

Substituirt man ferner die Ausdrücke des vor. Art. in den Ausdruck für Z, und setzt

$$F\mathfrak{a}' + G = G'$$
$$F\mathfrak{a}'' + G\mathfrak{b}'' + H = H''$$

u. s. w. so bekommt man

$$Z = \frac{(\eta M)}{(\eta\eta)} F + \frac{(\varkappa M,1)}{(\varkappa\varkappa,1)} G' + \frac{(\lambda M,2)}{(\lambda\lambda,2)} H'' + \ldots$$

und die Substitution derselben in den Ausdruck für S giebt

$$S = \frac{(\eta M)^2}{(\eta\eta)} + \frac{(\varkappa M,1)^2}{(\varkappa\varkappa,1)} + \frac{(\lambda M.2)^2}{(\lambda\lambda,2)} + \ldots$$

Will man den zweiten Ausdruck des Art. 36 für Z anwenden, so sind in Folge der Gleichungen (44) die folgenden Ausdrücke zu berechnen,

$$\alpha_{,} = \frac{F}{(\eta\eta)} + \frac{G'}{(\varkappa\varkappa,1)}\mathfrak{a}' + \frac{H''}{(\lambda\lambda,2)}\mathfrak{a}'' + \ldots$$
$$\beta_{,} = \frac{G'}{(\varkappa\varkappa,1)} + \frac{H''}{(\lambda\lambda,2)}\mathfrak{b}'' + \ldots$$
$$\gamma_{,} = \frac{H''}{(\lambda\lambda,2)} + \ldots$$

u. s. w. worauf sogleich

$$Z = \alpha_{,}(\eta M) + \beta_{,}(\varkappa M) + \gamma_{,}(\lambda M) + \ldots$$

berechnet werden kann. Dem Vorhergehenden zufolge wird darauf

$$\Omega = \omega + Y - Z, \quad P = \frac{1}{R - S}.$$

40.

Zur Reduction der Ausdrücke der Grössen $(\alpha\eta)$, $(\beta\eta)$, etc. setze man

$$\begin{aligned} \eta &= q & \varkappa &= r \\ \eta' &= \alpha' q + q' & \varkappa' &= \alpha' r + r' \\ \eta'' &= \alpha'' q + \beta'' q' + q'' & \varkappa'' &= \alpha'' r + \beta'' r' + r'' \\ &\text{etc.} & &\text{etc.} \end{aligned}$$

u. s. w. worauf die Substitution der Ausdrücke für (1,1), (1,2), etc. des Art. 37 in die Ausdrücke für $(\alpha\eta)$, $(\beta\eta)$, etc. des Art. 35 sogleich

$$(\alpha\eta) = \frac{\eta}{(aa)} + \frac{\alpha'\eta'}{(bb,1)} + \frac{\alpha''\eta''}{(cc,2)} + \ldots$$
$$(\alpha\varkappa) = \frac{\varkappa}{(aa)} + \frac{\alpha'\varkappa'}{(bb,1)} + \frac{\alpha''\varkappa''}{(cc,2)} + \ldots$$
$$(\alpha\lambda) = \frac{\lambda}{(aa)} + \frac{\alpha'\lambda'}{(bb,1)} + \frac{\alpha''\lambda''}{(cc,2)} + \ldots$$

etc.

$$(\beta\eta) = \frac{\eta'}{(bb,1)} + \frac{\beta''\eta''}{(cc,2)} + \ldots$$
$$(\beta\varkappa) = \frac{\varkappa'}{(bb,1)} + \frac{\beta''\varkappa''}{(cc,2)} + \ldots$$
$$(\beta\lambda) = \frac{\lambda'}{(bb,1)} + \frac{\beta''\lambda''}{(cc,2)} + \ldots$$

etc.

$$(\gamma\eta) = \frac{\eta''}{(cc,2)} + \ldots$$
$$(\gamma\varkappa) = \frac{\varkappa''}{(cc,2)} + \ldots$$
$$(\gamma\lambda) = \frac{\lambda''}{(cc,2)} + \ldots$$

etc.

u. s. w. giebt. Substituirt man nun diese in die Ausdrücke für $(\eta\eta)$, $(\eta\varkappa)$, etc. des Art. 35, so werden

$$(\eta\eta) = \frac{\eta^2}{(aa)} + \frac{\eta'^2}{(bb,1)} + \frac{\eta''^2}{(cc,2)} + \ldots$$
$$(\eta\varkappa) = \frac{\eta\varkappa}{(aa)} + \frac{\eta'\varkappa'}{(bb,1)} + \frac{\eta''\varkappa''}{(cc,2)} + \ldots$$
$$(\eta\lambda) = \frac{\eta\lambda}{(aa)} + \frac{\eta'\lambda'}{(bb,1)} + \frac{\eta''\lambda''}{(cc,2)} + \ldots$$

etc.

$$(\eta M) = \frac{\eta M}{(aa)} + \frac{\eta' M'}{(bb,1)} + \frac{\eta'' M''}{(cc,2)} + \ldots$$

$$(\varkappa\varkappa) = \frac{\varkappa^2}{(aa)} + \frac{\varkappa'^2}{(bb,1)} + \frac{\varkappa''^2}{(cc,2)} + \ldots$$
$$(\varkappa\lambda) = \frac{\varkappa\lambda}{(aa)} + \frac{\varkappa'\lambda'}{(bb,1)} + \frac{\varkappa''\lambda''}{(cc,2)} + \ldots$$

etc.

$$(\varkappa M) = \frac{\varkappa M}{(aa)} + \frac{\varkappa' M'}{(bb,1)} + \frac{\varkappa'' M''}{(cc,2)} + \ldots$$

$$(\lambda\lambda) = \frac{\lambda^2}{(aa)} + \frac{\lambda'^2}{(bb,1)} + \frac{\lambda''^2}{(cc,2)} + \ldots$$

etc.

$$(\lambda M) = \frac{\lambda M}{(aa)} + \frac{\lambda' M'}{(bb,1)} + \frac{\lambda'' M''}{(cc,2)} + \ldots$$

u. s. w. Endlich gehen durch dieselben Substitutionen die Ausdrücke des Art. 36 für F, G, etc. in die folgenden über

$$F = f + \frac{(al)}{(aa)}\eta + \frac{(bl,1)}{(bb,1)}\eta' + \frac{(cl,2)}{(cc,2)}\eta'' + \dots$$
$$G = g + \frac{(al)}{(aa)}\varkappa + \frac{(bl,1)}{(bb,1)}\varkappa' + \frac{(cl,2)}{(cc,2)}\varkappa'' + \dots$$
$$H = h + \frac{(al)}{(aa)}\lambda + \frac{(bl,1)}{(bb,1)}\lambda' + \frac{(cl,2)}{(cc,2)}\lambda'' + \dots$$

u. s. w. womit alle erforderlichen Grössen auf ihre einfachste Form gebracht worden sind, und die im Art. 35 eingeführte unbestimmte Auflösung der Gleichungen (40) überflüssig wird, und daher nicht ausgeführt zu werden braucht. Alle Ausdrücke, die wir erhalten haben, besitzen eine so regelmässige Gestalt, dass sie ohne Weiteres beliebig fortgesetzt werden können.

41.

In dieser Auflösung sind zugleich die Ausdrücke für die Unbekannten selbst nebst deren Gewichten enthalten, denn setzt man zuerst

$$k = 1\ ,\quad k' = 0\ ,\quad k'' = 0\ ,\ \text{etc.}\ \ \omega = 0$$

so wird $\Omega = x$. Aus den vorstehenden Annahmen folgt aber

$$M = 1\ ,\quad M' = \alpha'\ ,\quad M'' = \alpha''\ ,\ \text{etc.}$$
$$(\eta M) = (\alpha\eta)\ ,\quad (\varkappa M) = (\alpha\varkappa)\ ,\quad (\lambda M) = (\alpha\lambda)\ ,\ \text{etc.}$$
$$(\varkappa M,1) = (\alpha\varkappa,1)\ ,\quad (\lambda M,2) = (\alpha\lambda,2)\ ,\ \text{etc.}$$

Setzt man daher

$$x = y - z\ ,\quad x' = y' - z'\ ,\quad x'' = y'' - z''\ ,\ \text{etc.}$$

so wird

$$y = \frac{(al)}{(aa)} + \frac{(bl,1)}{(bb,1)}\alpha' + \frac{(cl,2)}{(cc,2)}\alpha'' + \dots$$
$$z = \frac{(\alpha\eta)}{(\eta\eta)}F + \frac{(\alpha\varkappa,1)}{(\varkappa\varkappa,1)}G' + \frac{(\alpha\lambda,2)}{(\lambda\lambda,2)}H'' + \dots$$

oder

$$z = \alpha_{,}(\alpha\eta) + \beta_{,}(\alpha\varkappa) + \gamma_{,}(\alpha\lambda) + \dots$$

und bezeichnet man die Gewichte von x, x', x'', etc. mit Π, Π', Π'', etc. und setzt

$$\Pi = \frac{1}{\pi - \mu}\ ,\quad \Pi' = \frac{1}{\pi' - \mu'}\ ,\quad \Pi'' = \frac{1}{\pi'' - \mu''}\ ,\ \text{etc.}$$

so werden

$$\pi = \frac{1}{(aa)} + \frac{\alpha'^2}{(bb,1)} + \frac{\alpha''^2}{(cc,2)} + \dots$$
$$\mu = \frac{(\alpha\eta)^2}{(\eta\eta)} + \frac{(\alpha\varkappa,1)^2}{(\varkappa\varkappa,1)} + \frac{(\alpha\lambda,2)^2}{(\lambda\lambda,2)} + \dots$$

Macht man ferner

$$k = 0\ , \quad k' = 1\ , \quad k'' = 0,\ \text{etc.}\ \ \omega = 0$$

so wird $\Omega = x'$, und man bekommt

$$M = 0\ , \quad M' = 1\ , \quad M'' = \beta'',\ \text{etc.}$$
$$(\eta M) = (\beta\eta)\ , \quad (\varkappa M) = (\beta\varkappa)\ , \quad (\lambda M) = (\beta\lambda),\ \text{etc.}$$
$$(\varkappa M,1) = (\beta\varkappa,1)\ , \quad (\lambda M,2) = (\beta\lambda,2),\ \text{etc.}$$

woraus

$$y' = \frac{(bl,1)}{(bb,1)} + \frac{(cl,2)}{(cc,2)}\beta'' + \ldots$$
$$z' = \frac{(\beta\eta)}{(\eta\eta)}F + \frac{(\beta\varkappa,1)}{(\varkappa\varkappa,1)}G' + \frac{(\beta\lambda,2)}{(\lambda\lambda,2)}H'' + \ldots$$
$$= \alpha_{\prime}(\beta\eta) + \beta_{\prime}(\beta\varkappa) + \gamma_{\prime}(\beta\lambda) + \ldots$$
$$\pi' = \frac{1}{(bb,1)} + \frac{\beta''^2}{(cc,2)} + \ldots$$
$$\mu' = \frac{(\beta\eta)^2}{(\eta\eta)} + \frac{(\beta\varkappa,1)^2}{(\varkappa\varkappa,1)} + \frac{(\beta\lambda,2)^2}{(\lambda\lambda,2)} + \ldots$$

hervorgehen, und ebenso erhält man

$$y'' = \frac{(cl,2)}{(cc,2)} + \ldots$$
$$z'' = \frac{(\gamma\eta)}{(\eta\eta)}F + \frac{(\gamma\varkappa,1)}{(\varkappa\varkappa,1)}G' + \frac{(\gamma\lambda,2)}{(\lambda\lambda,2)}H'' + \ldots$$
$$= \alpha_{\prime}(\gamma\eta) + \beta_{\prime}(\gamma\varkappa) + \gamma_{\prime}(\gamma\lambda) + \ldots$$
$$\pi'' = \frac{1}{(cc,2)} + \ldots$$
$$\mu'' = \frac{(\gamma\eta)^2}{(\eta\eta)} + \frac{(\gamma\varkappa,1)^2}{(\varkappa\varkappa,1)} + \frac{(\gamma\lambda,2)^2}{(\lambda\lambda,2)} + \ldots$$

u. s. w.

12.

Zur leichteren Uebersicht sollen jetzt alle zur Berechnung von Ω, x, x', x'', etc. und P, Π, Π', Π'', etc. erforderlichen Ausdrücke der Reihe nach, so wie sie zur Anwendung kommen, zusammen gestellt werden, hiebei wollen wir jedoch zuerst von den zur Berechnung von Ω und P dienenden Ausdrücken absehen, und diese nach jenen für sich anführen.

Nachdem man die ursprünglich gegebenen Gleichungen so vorbereitet hat, dass die Coefficienten der Gleichungen (29) und (30) bekannt sind, rechne man zuerst

$$
\begin{aligned}
(aa) &= pa^2 + p'a'^2 + p''a''^2 + \ldots \\
&\quad + q^2 + r^2 + s^2 + \ldots \\
(ab) &= pab + p'a'b' + p''a''b'' + \ldots \\
&\quad + qq' + rr' + ss' + \ldots \\
(ac) &= pac + p'a'c' + p''a''c'' + \ldots \\
&\quad + qq'' + rr'' + ss'' + \ldots \\
\text{etc.} & \qquad\qquad \text{etc.} \\
(al) &= pal + p'a'l' + p''a''l'' + \ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(bb) &= pb^2 + p'b'^2 + p''b''^2 + \ldots \\
&\quad + q'^2 + r'^2 + s'^2 + \ldots \\
(bc) &= pbc + p'b'c' + p''b''c'' + \ldots \\
&\quad + q'q'' + r'r'' + s's'' + \ldots \\
\text{etc.} & \qquad\qquad \text{etc.} \\
(bl) &= pbl + p'b'l' + p''b''l'' + \ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(cc) &= pc^2 + p'c'^2 + p''c''^2 + \ldots \\
&\quad + q''^2 + r''^2 + s''^2 + \ldots \\
\text{etc.} & \qquad\qquad \text{etc.} \\
(cl) &= pcl + p'c'l' + p''c''l'' + \ldots
\end{aligned}
$$

etc. bis

$$
(ll) = pl^2 + p'l'^2 + p''l''^2 + \ldots
$$

Die Anwendung des Ausdrucks (ll), welcher im Vorhergehenden nicht vorgekommen ist, wird weiter unten erklärt werden.

Zu den vorstehenden Ausdrücken ist zu bemerken, dass sie zwar immer ganz so, wie sie angesetzt sind, angewandt werden können, dass aber in gewissen Fällen die von den Coefficienten q, r, s, etc. der Gleichungen (30) abhängigen Glieder entweder ganz weggelassen, oder abgekürzt werden können. Sei wieder m die Anzahl der Gleichungen (24), und n die Anzahl der x, x', x'', etc., dann dürfen die genannten, von den (30) abhängenden, Glieder ganz weggelassen werden, wenn entweder $m > n$ oder $m = n$ ist, wenn aber $m < n$ ist, so müssen die Coefficienten von wenigstens einer Anzahl $n - m$ der Gleichungen (30) aufgenommen werden.

43.

Es sind hierauf die Coefficienten $(bb,1)$, $(bc,1)$, etc. zu berechnen, und dieses kann immerhin durch die im Art. 37 dafür abgeleiteten Ausdrücke geschehen, allein ich ziehe vor, die folgenden anzuwenden, die entweder selbstständig, oder aus den vorhergehenden ähnlichen leicht abgeleitet werden können

$$\alpha' = -\frac{(ab)}{(aa)}, \quad \beta' = -\frac{(ac)}{(aa)}, \quad \gamma' = -\frac{(ad)}{(aa)}, \text{ etc. } \chi' = -\frac{(al)}{(aa)}$$

$$(bb,1) = (bb) + (ab)\alpha'$$
$$(bc,1) = (bc) + (ac)\alpha'$$
$$(bd,1) = (bd) + (ad)\alpha'$$
etc.
$$(bl,1) = (bl) + (al)\alpha'$$

$$(cc,1) = (cc) + (ac)\beta'$$
$$(cd,1) = (cd) + (ad)\beta'$$
etc.
$$(cl,1) = (cl) + (al)\beta'$$

$$(dd,1) = (dd) + (ad)\gamma'$$
etc.
$$(dl,1) = (dl) + (al)\gamma'$$

etc. bis

$$(ll,1) = (ll) + (al)\chi'$$

$$\beta'' = -\frac{(bc,1)}{(bb,1)}, \quad \gamma'' = -\frac{(bd,1)}{(bb,1)}, \text{ etc. } \chi'' = -\frac{(bl,1)}{(bb,1)}$$

$$(cc,2) = (cc,1) + (bc,1)\beta''$$
$$(cd,2) = (cd,1) + (bd,1)\beta''$$
etc.
$$(cl,2) = (cl,1) + (bl,1)\beta''$$

$$(dd,2) = (dd,1) + (bd,1)\gamma''$$
etc.
$$(dl,2) = (dl,1) + (bl,1)\gamma''$$

etc. bis

$$(ll,2) = (ll,1) + (bl,1)\chi''$$

$$\gamma''' = -\frac{(cd,2)}{(cc,2)}, \text{ etc. } \chi''' = -\frac{(cl,2)}{(cc,2)}$$

$$(dd,3) = (dd,2) + (cd,2)\gamma'''$$
etc.
$$(dl,3) = (dl,2) + (cl,2)\gamma'''$$

etc. bis

$$(ll,3) = (ll,2) + (cl,2)\chi'''$$

etc. bis (ll,n)

wenn wieder n die Anzahl der x, x', x'', etc. bezeichnet.

Zu bemerken ist hiebei, dass wenn $m = n$, und keine der Gleichungen (30) mit zur Berechnung der (aa), (ab), etc. beigezogen worden sind, so wie wenn $m < n$, und man nur $n - m$ dieser Gleichungen zugezogen hat, immer

$$(ll,n) = 0$$

werden muss.

44.

Nun können die α'', β''', etc. nach folgenden Ausdrücken berechnet werden,

$$\alpha' = \alpha'$$
$$\alpha'' = \beta' + \beta''\alpha'$$
$$\alpha''' = \gamma' + \gamma''\alpha' + \gamma'''\alpha''$$
$$\alpha^{IV} = \delta' + \delta''\alpha' + \delta'''\alpha'' + \delta^{IV}\alpha'''$$
etc.

$$\beta'' = \beta''$$
$$\beta''' = \gamma'' + \gamma'''\beta''$$
$$\beta^{IV} = \delta'' + \delta'''\beta'' + \delta^{IV}\beta'''$$
etc.

$$\gamma''' = \gamma'''$$
$$\gamma^{IV} = \delta''' + \delta^{IV}\gamma'''$$
etc.

$$\delta^{IV} = \delta^{IV}$$
etc.

u. s. w. die ich zu mehrerer Deutlichkeit für eine Unbekannte mehr, wie in den vorangegangenen Ausdrücken hingeschrieben habe. Es wird hierauf

$$\begin{aligned}
-y &= \chi' + \chi''\alpha' + \chi'''\alpha'' + \chi^{IV}\alpha''' + \ldots \\
-y' &= \chi'' + \chi'''\beta'' + \chi^{IV}\beta''' + \ldots \\
-y'' &= \chi''' + \chi^{IV}\gamma''' + \ldots \\
-y''' &= \chi^{IV} + \ldots \\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi &= \frac{1}{(aa)} + \frac{\alpha'^2}{(bb,1)} + \frac{\alpha''^2}{(cc,2)} + \frac{\alpha'''^2}{(dd,3)} + \ldots \\
\pi' &= \frac{1}{(bb,1)} + \frac{\beta''^2}{(cc,2)} + \frac{\beta'''^2}{(dd,3)} + \ldots \\
\pi'' &= \frac{1}{(cc,2)} + \frac{\gamma'''^2}{(dd,3)} + \ldots \\
\pi''' &= \frac{1}{(dd,3)} + \ldots \\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Ich mache darauf aufmerksam, dass hierin schon die Auflösung der Aufgabe des Art. 18 u. f. vollständig enthalten ist, denn die für die allgemeine, im Art. 31 aufgestellte Aufgabe noch hinzukommenden Ausdrücke hängen alle so von den Bedingungsgleichungen ab, dass sie zugleich mit diesen wegfallen. In Betreff der Aufgabe des Art. 18 wird also

$$x = y\,, \quad x' = y'\,, \quad x'' = y''\,, \text{ etc.}$$

und die Gewichte dieser Bestimmungen werden bez.

$$\frac{1}{\pi}\,, \quad \frac{1}{\pi'}\,, \quad \frac{1}{\pi''}\,, \text{ etc.}$$

In Bezug auf die allgemeine Aufgabe können die bis jetzt zusammengestellten Ausdrücke als den ersten Theil der Auflösung betrachtet werden, und dieser Theil wird, wenn nicht $m < n$ ist, genau so ausgeführt, als wären gar keine Bedingungsgleichungen vorhanden. Wenn aber der eben erwähnte Fall eintritt, so müssen zur Bildung der Coefficienten (aa), (ab), etc. auf die eben erklärte Art wenigstens $n - m$ der Bedingungsgleichungen mit Weglassung ihrer völlig bekannten Glieder zu diesem ersten Theil der Rechnung hinzugezogen werden.

45.

Der zweite Theil der Auflösung unserer allgemeinen Aufgabe fängt mit der Berechnung der mit η, η', etc. $\varkappa$, $\varkappa'$, etc. etc. bezeichneten Hülfsgrössen an, die durch die folgenden Ausdrücke erhalten werden,

$$\eta = q \qquad\qquad \varkappa = r$$
$$\eta' = \alpha' q + q' \qquad\qquad \varkappa' = \alpha' r + r'$$
$$\eta'' = \alpha'' q + \beta'' q' + q'' \qquad\qquad \varkappa'' = \alpha'' r + \beta'' r' + r''$$
$$\eta''' = \alpha''' q + \beta''' q' + \gamma''' q'' + q''' ; \qquad \varkappa''' = \alpha''' r + \beta''' r' + \gamma''' r'' + r'''$$
etc. etc.

$$\lambda = s$$
$$\lambda' = \alpha' s + s'$$
$$\lambda'' = \alpha'' s + \beta'' s' + s'' \qquad\qquad \text{etc.}$$
$$\lambda''' = \alpha''' s + \beta''' s' + \gamma''' s'' + s''' ,$$
etc.

worauf man zunächst

$$\left.\begin{aligned} F &= f + \frac{(al)}{(aa)}\eta + \frac{(bl,1)}{(bb,1)}\eta' + \frac{(cl,2)}{(cc,2)}\eta'' + \dots \\ G &= g + \frac{(al)}{(aa)}\varkappa + \frac{(bl,1)}{(bb,1)}\varkappa' + \frac{(cl,2)}{(cc,2)}\varkappa'' + \dots \\ H &= h + \frac{(al)}{(aa)}\lambda + \frac{(bl,1)}{(bb,1)}\lambda' + \frac{(cl,2)}{(cc,2)}\lambda'' + \dots \end{aligned}\right\} \quad . \quad (45)$$

u. s. w. berechnen kann. Hiebei ist zu bemerken, dass wenn man zur Berechnung von (aa), (ab), etc. die Anzahl von $n-m$ Bedingungsgleichungen hinzugezogen hat, für diese $n-m$ Gleichungen

$$F = f, \quad G = g, \text{ etc.}$$

werden muss, indem alsdann für diese die Summe der übrigen Glieder der vorstehenden Gleichungen verschwindet. Hat man mehr wie $n-m$ Gleichungen hinzugezogen, so finden die zuletzt angegebenen Gleichungen nicht mehr statt. Der Beweis dieses Satzes wird sich weiter unten ergeben. Auch wird weiter unten gezeigt werden, dass man die Berechnung der (45) gänzlich umgehen kann.

46.

Es kann nun berechnet werden

$$(\eta\eta) = \frac{\eta^2}{(aa)} + \frac{\eta'^2}{(bb,1)} + \frac{\eta''^2}{(cc,2)} + \dots$$
$$(\eta\varkappa) = \frac{\eta\varkappa}{(aa)} + \frac{\eta'\varkappa'}{(bb,1)} + \frac{\eta''\varkappa''}{(cc,2)} + \dots$$
$$(\eta\lambda) = \frac{\eta\lambda}{(aa)} + \frac{\eta'\lambda'}{(bb,1)} + \frac{\eta''\lambda''}{(cc,2)} + \dots$$
etc. etc.

$$(\varkappa\varkappa) = \frac{\varkappa^2}{(aa)} + \frac{\varkappa'^2}{(bb,1)} + \frac{\varkappa''^2}{(cc,2)} + \dots$$
$$(\varkappa\lambda) = \frac{\varkappa\lambda}{(aa)} + \frac{\varkappa'\lambda'}{(bb,1)} + \frac{\varkappa''\lambda''}{(cc,2)} + \dots$$
etc. etc.

$$(\lambda\lambda) = \frac{\lambda^2}{(aa)} + \frac{\lambda'^2}{(bb,1)} + \frac{\lambda''^2}{(cc,2)} + \dots$$

etc. etc.

etc.

und hieraus sind Ausdrücke zu berechnen, die denen des Art. 43 vollständig analog sind, nur dass die Grösse, die dort mit (ll) bezeichnet wurde, hier Null ist, nemlich

$$\mathfrak{a}' = -\frac{(\eta\varkappa)}{(\eta\eta)}, \quad \mathfrak{b}' = -\frac{(\eta\lambda)}{(\eta\eta)}, \text{ etc. } \mathfrak{r}' = +\frac{F}{(\eta\eta)}$$

$$(\varkappa\varkappa,1) = (\varkappa\varkappa) + (\eta\varkappa)\mathfrak{a}'$$
$$(\varkappa\lambda,1) = (\varkappa\lambda) + (\eta\lambda)\mathfrak{a}'$$
etc.
$$G' = G + F\mathfrak{a}'$$

$$(\lambda\lambda,1) = (\lambda\lambda) + (\eta\lambda)\mathfrak{b}'$$
etc.
$$H' = H + F\mathfrak{b}'$$

etc. bis

$$R' = F\mathfrak{r}'$$

$$\mathfrak{b}'' = -\frac{(\varkappa\lambda,1)}{(\varkappa\varkappa,1)}, \text{ etc. } \mathfrak{r}'' = +\frac{G'}{(\varkappa\varkappa,1)}$$

$$(\lambda\lambda,2) = (\lambda\lambda,1) + (\varkappa\lambda,1)\mathfrak{b}''$$
etc.
$$H'' = H' + G'\mathfrak{b}''$$

etc. bis

$$R'' = R' + G'\mathfrak{r}''$$

etc. bis $R^{(q)}$

wenn wieder q die Anzahl der vorhandenen Bedingungsgleichungen bezeichnet.

47.

Hierauf ist zu berechnen

$$(\alpha\eta) = \frac{\eta}{(aa)} + \frac{\alpha'\eta'}{(bb,1)} + \frac{\alpha''\eta''}{(cc,2)} + \dots$$
$$(\beta\eta) = \frac{\eta'}{(bb,1)} + \frac{\beta''\eta''}{(cc,2)} + \dots$$
$$(\gamma\eta) = \frac{\eta''}{(cc,2)} + \dots$$
etc.

$$(\alpha\varkappa) = \frac{\varkappa}{(aa)} + \frac{\alpha'\varkappa'}{(bb,1)} + \frac{\alpha''\varkappa''}{(cc,2)} + \ldots$$
$$(\beta\varkappa) = \frac{\varkappa'}{(bb,1)} + \frac{\beta''\varkappa''}{(cc,2)} + \ldots$$
$$(\gamma\varkappa) = \frac{\varkappa''}{(cc,2)} + \ldots$$
etc.

$$(\alpha\lambda) = \frac{\lambda}{(aa)} + \frac{\alpha'\lambda'}{(bb,1)} + \frac{\alpha''\lambda''}{(cc,2)} + \ldots$$
$$(\beta\lambda) = \frac{\lambda'}{(bb,1)} + \frac{\beta''\lambda''}{(cc,2)} + \ldots$$
$$(\gamma\lambda) = \frac{\lambda''}{(cc,2)} + \ldots$$
etc.

u. s. w. Die Anzahl dieser Gruppen ist der Anzahl der Bedingungsgleichungen, und die Anzahl der Grössen jeder Gruppe der Anzahl der Unbekannten gleich.

48.

Will man nicht blos die Unbekannten selbst, sondern auch ihre Gewichte kennen lernen, so sind noch die folgenden Hülfsgrössen zu berechnen,

$$(\alpha\varkappa,1) = (\alpha\varkappa) + (\alpha\eta)\mathfrak{a}'$$
$$(\beta\varkappa,1) = (\beta\varkappa) + (\beta\eta)\mathfrak{a}'$$
$$(\gamma\varkappa,1) = (\gamma\varkappa) + (\gamma\eta)\mathfrak{a}'$$
etc.

$$(\alpha\lambda,1) = (\alpha\lambda) + (\alpha\eta)\mathfrak{b}'$$
$$(\beta\lambda,1) = (\beta\lambda) + (\beta\eta)\mathfrak{b}'$$
$$(\gamma\lambda,1) = (\gamma\lambda) + (\gamma\eta)\mathfrak{b}'$$
etc.

etc.

$$(\alpha\lambda,2) = (\alpha\lambda,1) + (\alpha\varkappa,1)\mathfrak{b}''$$
$$(\beta\lambda,2) = (\beta\lambda,1) + (\beta\varkappa,1)\mathfrak{b}''$$
$$(\gamma\lambda,2) = (\gamma\lambda,1) + (\gamma\varkappa,1)\mathfrak{b}''$$
etc.

etc.

bis alle Bedingungsgleichungen erschöpft sind. Hierauf werden

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{(\alpha\eta)}{(\eta\eta)} F + \frac{(\alpha\varkappa,1)}{(\varkappa\varkappa,1)} G' + \frac{(\alpha\lambda,2)}{(\lambda\lambda,2)} H'' + \dots \\
z' &= \frac{(\beta\eta)}{(\eta\eta)} F + \frac{(\beta\varkappa,1)}{(\varkappa\varkappa,1)} G' + \frac{(\beta\lambda,2)}{(\lambda\lambda,2)} H'' + \dots \\
z'' &= \frac{(\gamma\eta)}{(\eta\eta)} F + \frac{(\gamma\varkappa,1)}{(\varkappa\varkappa,1)} G' + \frac{(\gamma\lambda,2)}{(\lambda\lambda,2)} H'' + \dots \\
&\text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu &= \frac{(\alpha\eta)^2}{(\eta\eta)} + \frac{(\alpha\varkappa,1)^2}{(\varkappa\varkappa,1)} + \frac{(\alpha\lambda,2)^2}{(\lambda\lambda,2)} + \dots \\
\mu' &= \frac{(\beta\eta)^2}{(\eta\eta)} + \frac{(\beta\varkappa,1)^2}{(\varkappa\varkappa,1)} + \frac{(\beta\lambda,2)^2}{(\lambda\lambda,2)} + \dots \\
\mu'' &= \frac{(\gamma\eta)^2}{(\eta\eta)} + \frac{(\gamma\varkappa,1)^2}{(\varkappa\varkappa,1)} + \frac{(\gamma\lambda,2)^2}{(\lambda\lambda,2)} + \dots \\
&\text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

wodurch in Verbindung mit den Werthen des Art. 44 für y, y', etc. und π, π', etc. alle Unbekannten nebst deren Gewichte gegeben sind.

49.

Will man hingegen auf die Kenntniss der Gewichte der Unbekannten Verzicht leisten, so lässt sich die Berechnung der Werthe der Unbekannten abkürzen, indem die im vor. Art. angegebenen Rechnungen wegfallen, und die folgenden kürzeren an ihre Stelle treten. Man rechne in diesem Falle die Grössen $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}''$, etc. $\mathfrak{A}''$, etc. etc. nach den folgenden Formeln, die ich für fünf Bedingungsgleichungen vollständig hinschreiben will,

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{A}' &= \mathfrak{x}' + \mathfrak{x}^{V}\mathfrak{d}' \\
\mathfrak{B}' &= \mathfrak{x}'' + \mathfrak{x}^{V}\mathfrak{d}'' \\
\mathfrak{C}' &= \mathfrak{x}''' + \mathfrak{x}^{V}\mathfrak{d}''' \\
\mathfrak{D}' &= \mathfrak{x}^{IV} + \mathfrak{x}^{V}\mathfrak{d}^{IV} \\
\hline
\mathfrak{A}'' &= \mathfrak{A}' + \mathfrak{D}'\mathfrak{c}' \\
\mathfrak{B}'' &= \mathfrak{B}' + \mathfrak{D}'\mathfrak{c}'' \\
\mathfrak{C}'' &= \mathfrak{C}' + \mathfrak{D}'\mathfrak{c}''' \\
\hline
\mathfrak{A}''' &= \mathfrak{A}'' + \mathfrak{C}''\mathfrak{b}' \\
\mathfrak{B}''' &= \mathfrak{B}'' + \mathfrak{C}''\mathfrak{b}'' \\
\hline
\mathfrak{A}^{IV} &= \mathfrak{A}''' + \mathfrak{B}'''\mathfrak{a}' \\
\hline
\end{aligned}
$$

und die man leicht auf jede beliebige Anzahl von Gleichungen ausdehnen kann, wenn man erwägt, dass hier $\mathfrak{x}^{V}$ für die letzte aller vorhandenen $\mathfrak{x}$, und $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{d}''$, $\mathfrak{d}'''$, $\mathfrak{d}^{IV}$ für die letzten aller vorhandenen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, etc. stehen. Da hierauf

$$\alpha_{,} = \mathfrak{A}^{IV}$$
$$\beta_{,} = \mathfrak{B}'''$$
$$\gamma_{,} = \mathfrak{C}''$$
$$\delta_{,} = \mathfrak{D}'$$
$$\varepsilon_{,} = \mathfrak{E}^{V}$$

werden, so kann man ohne weitere Hülfsgrössen schon

$$\begin{aligned} z &= (\alpha\eta)\alpha_{,} + (\alpha\varkappa)\beta_{,} + (\alpha\lambda)\gamma_{,} + \ldots \\ z' &= (\beta\eta)\alpha_{,} + (\beta\varkappa)\beta_{,} + (\beta\lambda)\gamma_{,} + \ldots \\ z'' &= (\gamma\eta)\alpha_{,} + (\gamma\varkappa)\beta_{,} + (\gamma\lambda)\gamma_{,} + \ldots \\ &\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

berechnen.

50.

Wenn man der Kenntniss der Unbekannten nicht bedarf, sondern blos eine Function Ω derselben nebst deren Gewicht zu ermitteln hat, so erleidet das Verfahren die folgenden Abänderungen. Die Ausdrücke der Artt. 42 und 43 nebst den Ausdrücken des Art. 44 für die α'', β'', β''', etc. müssen berechnet werden. Hierauf setze man

$$\left.\begin{aligned} M &= k \\ M' &= \alpha' k + k' \\ M'' &= \alpha'' k + \beta'' k' + k'' \\ M''' &= \alpha''' k + \beta''' k' + \gamma''' k'' + k''' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (46)$$

u. s. w. worauf

$$-Y = \chi' M + \chi'' M' + \chi''' M'' + \chi^{IV} M''' + \ldots$$

und

$$R = \frac{M^2}{(aa)} + \frac{M'^2}{(bb,1)} + \frac{M''^2}{(cc,2)} + \frac{M'''^2}{(dd,3)} + \ldots \Big\} \quad . \quad (47)$$

werden, und der erste Theil der Auflösung ausgeführt ist. Es sind darauf die Ausdrücke der Artt. 45 u. 46 zu berechnen, während die der Artt. 47 u. 48 wegfallen. Statt der letzteren berechne man

$$\left.\begin{aligned} (\eta M) &= \frac{\eta M}{(aa)} + \frac{\eta' M'}{(bb,1)} + \frac{\eta'' M''}{(cc,2)} + \ldots \\ (\varkappa M) &= \frac{\varkappa M}{(aa)} + \frac{\varkappa' M'}{(bb,1)} + \frac{\varkappa'' M''}{(cc,2)} + \ldots \\ (\lambda M) &= \frac{\lambda M}{(aa)} + \frac{\lambda' M'}{(bb,1)} + \frac{\lambda'' M''}{(cc,2)} + \ldots \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (48)$$

u. s. w. und

$$(49) \quad \ldots \quad \left\{\begin{array}{l} (\varkappa M,1) = (\varkappa M) + (\eta M)\mathfrak{a}' \\ (\lambda M,1) = (\lambda M) + (\eta M)\mathfrak{b}' \\ (\mu M,1) = (\mu M) + (\eta M)\mathfrak{c}' \\ \qquad \text{etc.} \\ \hline (\lambda M,2) = (\lambda M,1) + (\varkappa M,1)\mathfrak{b}'' \\ (\mu M,2) = (\mu M,1) + (\varkappa M,1)\mathfrak{c}'' \\ \qquad \text{etc.} \\ \hline (\mu M,3) = (\mu M,2) + (\lambda M,2)\mathfrak{c}''' \\ \qquad \text{etc.} \\ \hline \end{array}\right.$$

u. s. w. worauf man

$$Z = \frac{(\eta M)}{(\eta\eta)} F + \frac{(\varkappa M,1)}{(\varkappa\varkappa,1)} G' + \frac{(\lambda M,2)}{(\lambda\lambda,2)} H'' + \ldots$$

und

$$(50) \quad \ldots \quad S = \frac{(\eta M)^2}{(\eta\eta)} + \frac{(\varkappa M,1)^2}{(\varkappa\varkappa,1)} + \frac{(\lambda M,2)^2}{(\lambda\lambda,2)} + \ldots$$

erhält, womit die Aufgabe vollständig gelöst ist.

Hat man aber ausserdem auch die Werthe der Unbekannten x, x', etc. nach den obigen Ausdrücken berechnet, so ist es klar, dass man den wahrscheinlichsten Werth von Ω schon durch die Substitution dieser Werthe von x, x', etc. erhält, und in diesem Falle braucht man die vorstehenden Ausdrücke für Y und Z nicht zu berechnen. Sind die Werthe und Gewichte von mehreren Functionen zu berechnen, so müssen die in diesem Art. erklärten Rechnungen für jede dieser Functionen besonders ausgeführt werden.

51.

In Bezug auf die Ausdrücke (45) für F, G, H, etc. ist eine Bemerkung zu machen, wodurch ihre Bedeutung erklärt, und die Beweise der beiden am Ende des Art. 45 angeführten Sätze erhalten werden. Substituirt man die Ausdrücke für η, η', etc. $\varkappa$, $\varkappa'$, etc. etc. in die (45), so ergiebt sich sogleich in Folge der Ausdrücke für y, y', etc. des Art. 44 dass auch

$$\begin{aligned} F &= f + qy + q'y' + q''y'' + \ldots \\ G &= g + ry + r'y' + r''y'' + \ldots \\ H &= h + sy + s'y' + s''y'' + \ldots \end{aligned}$$

u. s. w. sind, und diese Ausdrücke geben zu erkennen, dass F, G, H, etc. das Resultat der Substitution der Grössen $\xi + y$, $\xi' + y'$, etc. in die

ursprünglichen Bedingungsgleichungen sind, wenn ξ, ξ', etc. im Sinne des Art. 28 wieder aufgenommen werden. Es wird mit anderen Worten in den Bezeichnungen des Art. 28

$$\begin{aligned} \psi(\xi+y,\ \xi'+y',\ \xi''+y'',\ \text{etc.}) &= F \\ \chi(\xi+y,\ \xi'+y',\ \xi''+y'',\ \text{etc.}) &= G \\ \text{etc.} \qquad\qquad &\quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Wenn man nun die Coefficienten der veränderlichen Glieder von $n-m$ Bedingungsgleichungen mit zur Berechnung der Hülfsgrössen (aa), (ab), etc. benutzt hat, so sind die Werthe von y, y', etc., die man erhält, aus einer gleichen Anzahl von linearischen Gleichungen bestimmt worden, die folglich alle durch diese Werthe von y, y', etc. vollständig erfüllt sind. Es müssen daher die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= qy + q'y' + q''y'' + \ldots \\ 0 &= ry + r'y' + r''y'' + \ldots \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

wenn hierunter die $n-m$ mit angewandten Bedingungsgleichungen verstanden werden, vollständig durch die erhaltenen Werthe von y, y', etc. erfüllt sein. Hiemit geben aber die obigen Gleichungen für F, G, etc. in Bezug auf diese $n-m$ Gleichungen

$$F = f, \quad G = g, \text{ etc.}$$

w. z. b. w. In jedem Falle ergeben sich aber durch die Substitution der Summen der anfänglich angenommenen Werthe der Unbekannten und der y, y', etc. in die Bedingungsgleichungen sofort die Werthe der F, G, etc. und die Berechnung der Ausdrücke (45) wird überflüssig w. z. b. w.

52.

Die vorhergehende Auflösung unserer Aufgabe zeigt schon zur Gnüge, dass den Bedingungsgleichungen (30) vollständig Gnüge geleistet worden ist, aber demungeachtet scheint es mir nicht überflüssig dieses a posteriori durch Anwendung der Function Ω auf eine derselben nachzuweisen. Da ferner diese Bedingungsgleichungen ohne Hülfe von Beobachtungen erlangt worden sind, und demzufolge gewiss sind, so muss sich dieses auch durch das Gewicht P derselben nachweisen lassen, welches in Bezug auf diese Bedingungsgleichungen unendlich gross werden muss. Sei zu dem Ende

$$\omega = f, \quad k = q, \quad k' = q', \quad k'' = q'', \text{ etc.}$$

dann wird

$$\Omega = qx + q'x' + q''x'' + \ldots + f$$

und $\Omega = 0$ ist mit der ersten Bedingungsgleichung (30) identisch. Durch die vorstehenden Annahmen ergiebt sich

$$M = \eta, \qquad M' = \eta', \qquad M'' = \eta'', \text{ etc.}$$
$$(\eta M) = (\eta\eta), \qquad (\varkappa M) = (\eta\varkappa), \qquad (\lambda M) = (\eta\lambda), \text{ etc.}$$
$$(\varkappa M,1) = 0, \qquad (\lambda M,2) = 0, \text{ etc.}$$

womit, nach Substitution der Ausdrücke für χ', χ'', etc.

$$Y = \frac{(ab)}{(aa)}\eta + \frac{(bb,1)}{(bb,1)}\eta' + \frac{(cb,2)}{(cc,2)}\eta'' + \ldots$$
$$= F - f$$

und $Z = F$ folglich

$$\Omega = 0$$

wird, w. z. b. w. Substituirt man auch die obigen Ausdrücke für M, M', etc. in die für R und Z, so erhält man

$$R = (\eta\eta), \quad S = (\eta\eta)$$

folglich

$$P = \infty$$

w. z. b. w. Auf dieselbe Art beweist man das Erfülltsein der übrigen Gleichungen (30).

53.

Für die Summe der mit den bez. Gewichten multiplicirten Quadrate der übrig bleibenden Fehler lässt sich mit Benutzung des Vorhergehenden ein einfacher Ausdruck geben. Da den Gleichungen (30) vollständig Gnüge geleistet worden ist, so ist die genannte Summe, wenn sie mit W bezeichnet wird,

$$\begin{aligned} W = & \; p\{ax + bx' + cx'' + \ldots - l\}^2 \\ & + p'\{a'x + b'x' + c'x'' + \ldots - l'\}^2 \\ & + p''\{a''x + b''x' + c''x'' + \ldots - l''\}^2 \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

oder wenn man die Quadrate entwickelt,

$$\begin{aligned} W = & \; \{[aa]x + [ab]x' + [ac]x'' + \ldots - (al)\}x \\ & + \{[ab]x + [bb]x' + [bc]x'' + \ldots - (bl)\}x' \\ & + \{[ac]x + [bc]x' + [cc]x'' + \ldots - (cl)\}x'' \\ & + \text{etc.} \\ & - \{(al)x + (bl)x' + (cl)x'' + \ldots - (ll)\} \end{aligned}$$

wo die Bezeichnungen $[aa]$, $[ab]$, etc. dem Art. 34 und (al), (bl), etc. dem Art. 42 gemäss zu verstehen sind. Eliminirt man hier $[aa]$, $[ab]$, etc. vermittelst der Gleichungen

$$(aa) = [aa] + [qq]$$
$$(ab) = [ab] + [qq']$$
etc.

die im Art. 34 erklärt worden sind, und setzt

$$\begin{aligned} W' = & \{(aa)x + (ab)x' + (ac)x'' + \ldots - (al)\}x \\ & + \{(ab)x + (bb)x' + (bc)x'' + \ldots - (bl)\}x' \\ & + \{(ac)x + (bc)x' + (cc)x'' + \ldots - (cl)\}x'' \\ & + \text{etc.} \\ & - \{(al)x + (bl)x' + (cl)x'' + \ldots - (ll)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W'' = & \{[qq]x + [qq']x' + [qq'']x'' + \ldots\}x \\ & + \{[qq']x + [q'q']x' + [q'q'']x'' + \ldots\}x' \\ & + \{[qq'']x + [q'q'']x' + [q''q'']x'' + \ldots\}x'' \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

so wird

$$W = W' - W''$$

Wenden wir uns nun zunächst zur Reduction der Function W'', so geben die Gleichungen (30) zuerst

$$\begin{aligned} [qq]x + [qq']x' + [qq'']x'' + \ldots &= -qf - rg - sh - \ldots \\ [qq']x + [q'q']x' + [q'q'']x'' + \ldots &= -q'f - r'g - s'h - \ldots \\ [qq'']x + [q'q'']x' + [q''q'']x'' + \ldots &= -q''f - r''g - s''h - \ldots \\ \text{etc.} \qquad & \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

deren Substitution

$$\begin{aligned} W'' = & -(qx + q'x' + q''x'' + \ldots)f \\ & -(rx + r'x' + r''x'' + \ldots)g \\ & -(sx + s'x' + s''x'' + \ldots)h \\ & - \text{etc.} \end{aligned}$$

und in Folge der (30)

$$W'' = f^2 + g^2 + h^2 \ldots$$

giebt.

54.

Zur Reduction des Ausdrucks für W' setze man zuerst

$$k = (aa), \quad k' = (ab), \quad k'' = (ac), \text{ etc. } \omega = -(al)$$

wodurch

$$\Omega = (aa)x + (ab)x' + (ac)x'' + \ldots - (al)$$

wird. Die Ausdrücke des Art. 50 geben nun

$$M = (aa), \quad M' = 0, \quad M'' = 0, \text{ etc.}$$
$$(\eta M) = q, \quad (\varkappa M) = r, \quad (\lambda M) = s, \text{ etc.}$$
$$(\varkappa M,1) = q\mathfrak{a}' + r, \quad (\lambda M,2) = q\mathfrak{a}'' + r\mathfrak{b}'' + s, \text{ etc.}$$

woraus

$$\Omega = -\frac{F}{(\eta\eta)}q - \frac{G'}{(\varkappa\varkappa,1)}(q\mathfrak{a}' + r) - \frac{H''}{(\lambda\lambda,2)}(q\mathfrak{a}'' + r\mathfrak{b}'' + s) - \text{etc.}$$

folgt. Setzt man ferner

$$k = (ab), \quad k' = (bb), \quad k'' = (bc), \text{ etc. } \omega = -(bl)$$

so gehen dieselben Ausdrücke über in

$$M = (ab), \quad M' = (bb,1), \quad M'' = 0, \text{ etc.}$$
$$(\eta M) = q', \quad (\varkappa M) = r', \quad (\lambda M) = s', \text{ etc.}$$
$$(\varkappa M,1) = q'\mathfrak{a}' + r', \quad (\lambda M,2) = q'\mathfrak{a}'' + r'\mathfrak{b}' + s', \text{ etc.}$$

wodurch, wenn man den jetzigen Ausdruck von Ω mit Ω' bezeichnet,

$$\Omega' = -\frac{F}{(\eta\eta)}q' - \frac{G'}{(\varkappa\varkappa,1)}(q'\mathfrak{a}' + r') - \frac{H''}{(\lambda\lambda,2)}(q'\mathfrak{a}'' + r'\mathfrak{b}'' + s') - \text{etc.}$$

hervorgeht. Auf dieselbe Art ergiebt sich

$$\Omega'' = -\frac{F}{(\eta\eta)}q'' - \frac{G'}{(\varkappa\varkappa,1)}(q''\mathfrak{a}' + r'') - \frac{H''}{(\lambda\lambda,2)}(q''\mathfrak{a}'' + r''\mathfrak{b}'' + s'') - \text{etc.}$$

u. s. w. Setzt man endlich

$$k = -(al), \quad k' = -(bl), \quad k'' = -(cl), \text{ etc. } \omega = (ll)$$

so wird

$$M = -(al), \quad M' = -(bl,1), \quad M'' = -(cl,2), \text{ etc.}$$
$$(\eta M) = f - F, \quad (\varkappa M) = g - G, \quad (\lambda M) = h - H, \text{ etc.}$$
$$(\varkappa M,1) = f\mathfrak{a}' + g - G', \quad (\lambda M,2) = f\mathfrak{a}'' + g\mathfrak{b}'' + h - H'', \text{ etc.}$$

und wenn man den jetzigen Ausdruck von Ω mit $\Omega_{,}$ bezeichnet, so folgt hieraus

$$\Omega_{,} = (ll) - \frac{(al)^2}{(aa)} - \frac{(bl,1)^2}{(bb,1)} - \frac{(cl,2)^2}{(cc,2)} - \ldots$$
$$+ \frac{F}{(\eta\eta)}(F - f) + \frac{G'}{(\varkappa\varkappa,1)}(G' = f\mathfrak{a}' - g) + \frac{H''}{(\lambda\lambda,2)}H'' - f\mathfrak{a}'' - g\mathfrak{b}'' - h) + \ldots$$

Zufolge des Vorhergehenden wird nun

$$W' = \Omega x + \Omega' x' + \Omega'' x'' + \ldots + \Omega_{,}$$

und substituirt man hierin die eben erhaltenen Werthe von Ω, Ω', etc., so verschwinden vermöge der Bedingungsgleichungen (30) die x, x', etc. von selbst, und man erhält

$$W' = (ll) - \frac{(al)^2}{(aa)} - \frac{(bl,1)^2}{(bb,1)} - \frac{(cl,2)^2}{(cc,2)} - \ldots$$
$$+ \frac{F^2}{(\eta\eta)} + \frac{G'^2}{(\varkappa\varkappa,1)} + \frac{H''^2}{(\lambda\lambda,2)} + \ldots$$

Aber die Ausdrücke des Art. 43 geben nach und nach

$$(ll,1) = (ll) - \frac{(al)^2}{(aa)}$$
$$(ll,2) = (ll,1) - \frac{(bl,1)^2}{(bb,1)}$$
etc.
$$(ll,n) = (ll) - \frac{(al)^2}{(aa)} - \frac{(bl,1)^2}{(bb,1)} - \frac{(cl,2)^2}{(cc,2)} - \ldots$$

und aus denen des Art. 46 bekommt man eben so

$$R' = \frac{F^2}{(\eta\eta)}$$
$$R'' = R' + \frac{G'^2}{(\varkappa\varkappa,1)}$$
etc.
$$R^{(q)} = \frac{F^2}{(\eta\eta)} + \frac{G'^2}{(\varkappa\varkappa,1)} + \frac{H''^2}{(\lambda\lambda,2)} + \ldots$$

und folglich wird

$$W' = (ll,n) + R^{(q)} \quad \ldots\ldots \quad (51)$$

Dieser Ausdruck giebt für sich allein die Summe der mit den bez. Gewichten multiplicirten Fehlerquadrate, wenn zur Berechnung der (aa), (ab), etc. keine der Gleichungen (30) hinzugezogen worden sind, denn in diesem Falle muss $W'' = 0$ gesetzt werden, und es wird folglich $W = W'$.

Wenn im Gegentheil die Gleichungen (30) oder einige derselben zur Berechnung von (aa), (ab), etc. mit verwandt worden sind, so wird die genannte Summe

$$W = W' - W'' \quad \ldots\ldots \quad (52)$$

wo W'' den im vor. Art. gefundenen Ausdruck hat, nemlich

$$W'' = f^2 + g^2 + h^2 + \ldots$$

ist, worin aber nur diejenigen f, g, h, etc. aufgenommen werden dürfen, die denjenigen Gleichungen (30) angehören, deren übrige Coefficienten mit zur Berechnung von (aa), (ab), etc. gedient haben.

55.

Ehe ich zu den Beispielen, die zur Erläuterung der vorstehenden Auflösung der allgemeinen Aufgabe dienen sollen, übergehe, will ich den speciellen Fall betrachten, in welchem die Gleichungen (29) in die folgenden einfacheren übergehen,

$$x = l\,,\quad x' = l'\,,\quad x'' = l''\,,\ \text{etc.}$$

und die Gewichte dieser Bestimmungen bez.

$$p\,,\quad p'\,,\quad p''\,,\ \text{etc.}$$

sind. Die allgemeine Aufgabe geht dadurch in diejenige über, die Gauss in seinem »Supplementum theoriae combinationis etc.« behandelt hat. Da jetzt die Anzahl der Gleichungen (29) der Anzahl der Unbekannten gleich ist, so brauchen zur Berechnung der Hülfsgrössen (aa), (ab), etc. die Coefficienten der Bedingungsgleichungen nicht hinzugezogen zu werden. Die mit α', α'' β', β'' etc. etc. bezeichneten Hülfsgrössen werden alle gleich Null, und man bekommt

$$\begin{array}{llll} (aa) = p\,, & (bb,1) = p'\,, & (cc,2) = p''\,, & \text{etc.} \\ (al) = pl\,, & (bl,1) = p'l'\,, & (cl,2) = p''l''\,, & \text{etc.} \end{array}$$

Alle übrigen auf ähnliche Weise bezeichneten Coefficienten werden Null, und hiemit ergiebt sich

$$y = l\,,\quad y' = l'\,,\quad y'' = l''\,,\quad \text{etc.}\quad (ll,n) = 0$$

womit der erste Theil der Auflösung schon gegeben ist. Für den zweiten Theil derselben ergiebt sich nun aus dem Vorhergehenden

$$\begin{array}{llll} \eta = q\,, & \eta' = q'\,, & \eta'' = q''\,, & \text{etc.} \\ \varkappa = r\,, & \varkappa' = r'\,, & \varkappa'' = r''\,, & \text{etc.} \\ \lambda = s\,, & \lambda' = s'\,, & \lambda'' = s''\,, & \text{etc.} \\ \text{etc.} & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} F = f + lq + l'q' + l''q'' + \ldots \\ G = g + lr + l'r' + l''r'' + \ldots \\ H = h + ls + l's' + l''s'' + \ldots \\ \text{etc.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (\eta\eta) = \frac{q^2}{p} + \frac{q'^2}{p'} + \frac{q''^2}{p''} + \ldots \\ (\eta\varkappa) = \frac{qr}{p} + \frac{q'r'}{p'} + \frac{q''r''}{p''} + \ldots \\ (\eta\lambda) = \frac{qs}{p} + \frac{q's'}{p'} + \frac{q''s''}{p''} + \ldots \\ \text{etc.} \end{array}$$

$$(\varkappa\varkappa) = \frac{r^2}{p} + \frac{r'^2}{p'} + \frac{r''^2}{p''} + \ldots$$

$$(\varkappa\lambda) = \frac{rs}{p} + \frac{r's'}{p'} + \frac{r''s''}{p''} + \ldots$$

etc.

$$(\lambda\lambda) = \frac{s^2}{p} + \frac{s'^2}{p'} + \frac{s''^2}{p''} + \ldots$$

u. s. w. und hieraus sind auf jeden Fall die im Art. 46 erklärten Hülfsgrössen $(\varkappa\varkappa,1)$, $(\lambda\lambda,2)$, etc. G', H'', etc. zu berechnen, aus welchen man, wenn man von der Berechnung der Gewichte von x, x', etc. absehen will, sogleich durch die Ausdrücke des Art. 49 die $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$, etc. berechnen kann. Da nun zufolge des Art. 47 hier

$$(\alpha\eta) = -\frac{q}{p}, \quad (\beta\eta) = \frac{q'}{p'}, \quad \text{etc. etc.}$$

werden, so ergeben sich sogleich

$$z = \frac{q\alpha_{,} + r\beta_{,} + s\gamma_{,} + \ldots}{p}$$

$$z' = \frac{q'\alpha_{,} + r'\beta_{,} + s'\gamma_{,} + \ldots}{p'}$$

$$z'' = \frac{q''\alpha_{,} + r''\beta_{,} + s''\gamma_{,} + \ldots}{p''}$$

u. s. w. worauf wieder

$$x = y - z, \quad x' = y' - z', \quad x'' = y'' - z'', \quad \text{etc.}$$

werden. Da die anfänglich zu substituirenden Werthe der Unbekannten nur der Bedingung unterliegen, dass sie bewirken sollen, dass l, l', l'', etc. möglichst kleine Grössen werden, so kann man jedenfalls hier diese Werthe so annehmen, dass daraus

$$l = l' = l'' = \text{etc.} = 0$$

werden. Hiemit werden auch

$$y = y' = y'' = \text{etc.} = 0$$

und

$$F = f, \quad G = g, \quad H = h, \quad \text{etc.}$$

wodurch sich die Auflösung vereinfacht. Die vorstehenden Formeln sind mit den Gaussischen identisch.

Auch die Ausdrücke für die Bestimmung der Gewichte der Unbekannten, die ich der Kürze wegen weglasse, da sie leicht aus dem Vorhergehenden zu erhalten sind, stimmen mit den Gaussischen überein.

56.

Ich werde nun die im Vorhergehenden erhaltene Auflösung der allgemeinen Aufgabe durch ein fingirtes, einfaches Beispiel erläutern,

mit welchem man eine Anzahl von Veränderungen vornehmen kann. Seien die Gleichungen, die den (29) entsprechen, die folgenden,

$$\begin{aligned} x + x' + x'' + x''' + x^{IV} + x^{V} &= 1 \\ 2x - 3x' \qquad\qquad\qquad\qquad &= 1 \\ x'' - x''' + x^{IV} - x^{V} &= 2 \end{aligned}$$

also $a = 1$, $b = 1$, etc. $a' = 2$, $b' = -3$, etc. etc. Seien ferner die Gleichungen (30) die folgenden

$$\begin{aligned} x + x' + x'' \qquad\qquad\qquad + 1 &= 0 \\ x' - x'' + 2x''' \qquad\qquad - 3 &= 0 \\ x^{IV} - x^{V} - 1 &= 0 \end{aligned}$$

also $q = 1$, $q' = 1$, etc. $r = 0$, $r' = -1$, etc. etc. Ich habe hier die Anzahl aller Gleichungen absichtlich der Anzahl der Unbekannten gleich angenommen, um die Relationen, die daraus hervor gehen, am Beispiel zu zeigen.

Man muss nun hier bei der Berechnung der Hülfsgrössen (aa), (ab), etc. alle drei Bedingungsgleichungen auf die oben erklärte Art mit berücksichtigen, denn es ist hier $n = 6$, $m = 3$, folglich $n - m = 3$. Setzt man der Einfachheit wegen das Gewicht einer jeden der drei ersten Gleichungen $= 1$, so bekommt man durch die Ausdrücke des Art. 42

$(aa) = 6$,	$(ab) = -4$,	$(ac) = 2$,	$(ad) = 1$,	$(ae) = 1$,	$(af) = 1$,	$(al) = 3$
	$(bb) = 12$,	$(bc) = 1$,	$(bd) = 3$,	$(be) = 1$,	$(bf) = 1$,	$(bl) = -2$
		$(cc) = 4$,	$(cd) = -2$,	$(ce) = 2$,	$(cf) = 0$,	$(cl) = 3$
			$(dd) = 6$,	$(de) = 0$,	$(df) = 2$.	$(dl) = -1$
				$(ee) = 3$,	$(ef) = -1$,	$(el) = 3$
					$(ff) = 3$,	$(fl) = -1$
						$(ll) = 6$

und hiemit durch Art. 43

$(bb,1)$ 9.3333,	$(bc,1)$ 2.3333,	$(bd,1)$ 3.6667,	$(be,1)$ 1.1667,	$(bf,1)$ 1.1667,	$(bl,1)$ 0
	$(cc,2)$ 2.7500,	$(cd,2)$ −3.2500,	$(ce,2)$ 1.2500,	$(cf,2)$ −0.7500,	$(cl,2)$ 2
		$(dd,3)$ 0.55195,	$(de,3)$ 0.65585,	$(df,3)$ 0.29221,	$(dl,3)$ 0.86364
			$(ee,4)$ 1.18822,	$(ef,4)$ −1.47060,	$(el,4)$ 0.56470
				$(ff,5)$ 0.35638,	$(fl,5)$ −0.71287
					$(ll,6)$ −0.0002

Es muss hier strenge $(ll,6) = 0$ werden, die nicht vollständige Erfüllung dieser Gleichung durch die vorstehende Rechnung rührt blos von den Fehlern der letzten angewandten Decimale her. Diese Gleichung würde vollständig erfüllt werden, wenn man sich erlauben wollte $(ff,5) = 0.35644$ statt $= 0.35638$ zu setzen. Da diese Rechnung zugleich gegeben hat

α'	β'	γ'	δ'	ε'	χ'
9.82391,	9.52288*n*,	9.22185*n*,	9.22185*n*,	9.22185*n*,	9.69897*n*
	β''	γ''	δ''	ε''	χ''
	9.39793*n*,	9.59423*n*,	9.25181*n*,	9.25181*n*,	$-\infty$
		γ'''	δ'''	ε'''	χ'''
		0.07255,	9.65758*n*,	9.43573*n*,	9.86170*n*
			δ^{IV}	ε^{IV}	χ^{IV}
			0.07491*n*,	9.72380*n*,	0.19443*n*
				ε^{V}	χ^{V}
				0.09260,	9.67694*n*
					χ^{VI}
					0.30108

wo die Logarithmen statt der Zahlen angesetzt worden sind, so giebt der Art. 44 zuerst

α''	α'''	α^{IV}	α^{V}
9.69897*n*,	0.00838*n*,	0.06191,	0.18890
	β'''	β^{IV}	β^{V}
	9.83778*n*,	9.87684,	0.02107
		γ^{IV}	γ^{V}
		0.26930*n*,	0.42388*n*
			δ^{V}
			0.30110*n*

und hierauf

$$
\begin{aligned}
y &= -4.0001 & \pi &= 10.0045 \\
y' &= -3.0000 & \pi' &= 4.5573 \\
y'' &= +7.0000 & \pi'' &= 25.5651 \\
y''' &= +5.0000 & \pi''' &= 14.2278 \\
y^{IV} &= -2.0000 & \pi^{IV} &= 5.1406 \\
y^{V} &= -2.0000 & \pi^{V} &= 2.8058
\end{aligned}
$$

womit der erste Theil der Auflösung ausgeführt ist. Zum zweiten Theile übergehend, geben die Ausdrücke des Art. 45

$$\begin{array}{llll}
\eta = 1 , & \varkappa = 0 , & \lambda = 0 \\
\eta' = +1.6667 , & \varkappa' = 1 , & \lambda' = 0 \\
\eta'' = +0.2500 , & \varkappa'' = -1.2500 , & \lambda'' = 0 \\
\eta''' = -0.52597 , & \varkappa''' = +0.12989 , & \lambda''' = 0 \\
\eta^{iv} = +0.04718 , & \varkappa^{iv} = +0.23525 , & \lambda^{iv} = 1 \\
\eta^{v} = -0.05931 , & \varkappa^{v} = -0.29703 , & \lambda^{v} = +0.23780
\end{array}$$

$$F = f = 1 , \quad G = g = -3 , \quad H = h = -1$$

welche letzte drei Gleichungen hier stattfinden müssen. Der Art. 46 giebt hierauf

$$\begin{array}{lll}
(\eta\eta) = 1.00001 , & (\varkappa\varkappa) = 1.00003 , & (\lambda\lambda) = 1.00041 \\
(\eta\varkappa) = -0.00009 , & (\varkappa\lambda) = -0.00017 & \\
(\eta\lambda) = +0.00014 & &
\end{array}$$

Diese Werthe von $(\eta\eta)$, $(\varkappa\varkappa)$, $(\lambda\lambda)$ sind so wenig von der 1 verschieden, dass man annehmen darf, dass der wahre Werth derselben = 1 ist, und aus demselben Grunde kann man annehmen, dass $(\eta\varkappa)$, $(\eta\lambda)$, $(\varkappa\lambda)$ gleich Null sind. Hiemit werden $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$, etc. $\mathfrak{b}''$, etc. auch gleich Null, und

$$\begin{array}{llll}
(\varkappa\varkappa,1) = 1 , & (\lambda\lambda,2) = 1 , & G' = -3 , & H'' = 1 \\
(\varkappa\lambda,1) = 0 & & & R'' = 11
\end{array}$$

Die Ausdrücke des Art. 47 geben ferner

$$\begin{array}{lll}
(\alpha\eta) = +1.0005 , & (\alpha\varkappa) = -1.0004 , & (\alpha\lambda) = +2.00146 \\
(\beta\eta) = +0.66703, & (\beta\varkappa) = -0.66694, & (\beta\lambda) = +1.33429 \\
(\gamma\eta) = -0.66757, & (\gamma\varkappa) = +1.6672 , & (\gamma\lambda) = -3.33560 \\
(\delta\eta) = -0.66734, & (\delta\varkappa) = +1.6671 , & (\delta\lambda) = -2.33480 \\
(\varepsilon\eta) = -0.16628, & (\varepsilon\varkappa) = -0.83358, & (\varepsilon\lambda) = +1.66762 \\
(\zeta\eta) = -0.16642, & (\zeta\varkappa) = -0.83342, & (\zeta\lambda) = +0.66722
\end{array}$$

und die des Art. 48

$$\begin{array}{ll}
(\alpha\varkappa,1) = -1.0004 , & (\alpha\lambda,2) = +2.0015 \\
(\beta\varkappa,1) = -0.6669 , & (\beta\lambda,2) = +1.3343 \\
(\gamma\varkappa,1) = +1.6672 , & (\gamma\lambda,2) = -3.3356 \\
(\delta\varkappa,1) = +1.6671 , & (\delta\lambda,2) = -2.3348 \\
(\varepsilon\varkappa,1) = -0.8336 , & (\varepsilon\lambda,2) = +1.6672 \\
(\zeta\varkappa,1) = -0.8334 , & (\zeta\lambda,2) = +0.6672
\end{array}$$

und wenn man die letzte Decimale ausgleicht

$$\begin{array}{lll} z = 2.0000 & & \mu = 6.0000 \\ z' = 1.3333 & & \mu' = 2.6667 \\ z'' = -2.3333 & & \mu'' = 14.3333 \\ z''' = -3.3333 & & \mu''' = 8.6667 \\ z^{IV} = +0.6667 & & \mu^{IV} = 3.5000 \\ z^{V} = +1.6667 & & \mu^{V} = 1.1667 \end{array}$$

Es wird daher schliesslich

$x = -6$	mit	dem	Gewicht	$= 0.250$
$x' = -4.3333$	»	»	»	$= 0.529$
$x'' = +9.3333$	»	»	»	$= 0.089$
$x''' = +8.3333$	»	»	»	$= 0.180$
$x^{IV} = -2.6667$	»	»	»	$= 0.610$
$x^{V} = -3.6667$	»	»	«	$= 0.610$

Löst man die gegebenen sechs Gleichungen auf gewöhnliche Art auf, welches wegen der einfachen Coefficienten in diesem Falle leicht zu bewirken ist, so bekommt man dieselben Werthe der Unbekannten wieder. Die Gewichte habe ich mit berechnet, weil sie in der That im gegenwärtigen Falle dieselbe Bedeutung haben, wie in dem Falle, wo die Anzahl der Gleichungen grösser ist wie die der Unbekannten. Giebt man den ursprünglichen Gleichungen andere Gewichte, wie die, welche oben angenommen wurden, so wird man im gegenwärtigen Falle zwar immer dieselben Werthe der Unbekannten wieder erhalten, aber die Gewichte werden andere Werthe bekommen. Wenn man im Gegentheil in den Fällen, wo die Anzahl der Gleichungen grösser ist wie die der Unbekannten, die Gewichte der Gleichungen ändert, so werden sich nicht nur die Gewichte der Unbekannten, sondern auch die Werthe derselben ändern.

Da im gegenwärtigen Falle die Summe der Fehlerquadrate $= 0$ werden muss, so muss sich dieses auch durch die Werthe von W' und W'' des Art. 54 aussprechen. Man findet in der That durch die dortigen Ausdrücke

$$W' = W'' = 11$$

folglich $W = 0$.

57.

Es soll nun das vorhergehende Beispiel in soweit abgeändert werden, dass wir die letzte Unbekannte uns wegdenken, und daher die folgenden Gleichungen aufzulösen haben,

$$\begin{array}{ll} x + x' + x'' + x''' + x^{IV} & = 1 \\ 2x - 3x' & = 1 \\ x'' - x''' + x^{IV} & = 2 \\ \hline x + x' + x'' \qquad + 1 & = 0 \\ x' - x'' + 2x''' \qquad - 3 & = 0 \\ x^{IV} \qquad - 1 & = 0 \end{array}$$

Hier ist also die Zahl der Gleichungen um Eins grösser wie die der Unbekannten, und dieses Beispiel hat das Eigenthümliche, dass man aus den Gleichungen sogleich erkennt, dass der Werth $x^{IV} = 1$ mit unendlich grossem Gewicht daraus hervorgehen muss. Man könnte x^{IV} sogleich eliminiren, allein um zu zeigen, dass die allgemeine Auflösung die genannten Werthe für x^{IV} und dessen Gewicht giebt, werde ich diese Elimination nicht ausführen. Setzen wir nun wieder das Gewicht einer jeden der drei ersten Gleichungen $= 1$, so ist die Auflösung durch Hülfe der im vorhergehenden Beispiel erhaltenen Werthe der Hülfsgrössen leicht auszuführen. Die (aa), (ab), etc. $(bb,1)$, etc. behalten dieselben Werthe, nur müssen von denselben alle, die in ihrer Bezeichnung den Buchstaben f enthalten, weggelassen werden. Die Grösse $(ll,6)$ fällt auch weg, und an deren Stelle tritt

$$(ll,5) = 1.4257$$

ein. Von den mit α, β, etc. bezeichneten Hülfsgrössen fallen sowohl die ε, wie die welche den Index fünf haben, mit Ausnahme von χ^{V} weg, endlich fällt auch χ^{IV} weg. Man erhält daher sogleich

$$\begin{array}{llll} y = -0.9107 & & \pi = 3.3078 \\ y' = -0.9009 & & \pi' = 1.4656 \\ y'' = +1.6930 & & \pi'' = 5.8036 \\ y''' = +1.0000 & & \pi''' = 3.0008 \\ y^{IV} = +0.4752 & & \pi^{IV} = 0.8417 \end{array}$$

Für den zweiten Theil der Auflösung bleiben nun die η, $\varkappa$, λ dieselben mit der Ausnahme, dass wieder η^{V}, $\varkappa^{V}$, λ^{V} wegfallen, und es werden daher hier

$F = +0.88113$, $G = -3{,}59404$, $H = -0.52476$ *)

$(\eta\eta) = +0.99014$, $(\varkappa\varkappa) = 0.75248$, $(\lambda\lambda) = 0.84174$

$(\eta\varkappa) = -0.04952$, $(\varkappa\lambda) = +0.19802$,

$(\eta\lambda) = +0.03971$,

woraus durch die Ausdrücke des Art. 46 die folgenden hervor gehen,

$(\varkappa\varkappa,1) = 0.75000$, $(\lambda\lambda,2) = 0.78681$, $R'' = 17.778$

$(\varkappa\lambda,1) = +0.20001$, $H'' = +0.38660$,

$G' = -3.54997$,

$\mathfrak{a}' = (8.69908)$, $\mathfrak{b}' = -(8.60320)$, $\mathfrak{c}' = (9.94934)$

$\mathfrak{b}'' = -(9.42599)$, $\mathfrak{c}'' = -(0.67517)$

$\mathfrak{c}''' = (9.69141)$

wo die Logarithmen statt der Zahlen angesetzt sind. Man bekommt ferner

$(\alpha\eta) = +1.25763$, $(\alpha\varkappa) = +0.28711$, $(\alpha\lambda) = +0.97068$

$(\beta\eta) = +0.84172$, $(\beta\varkappa) = +0{,}20790$, $(\beta\lambda) = +0.63390$

$(\gamma\eta) = -1.10921$, $(\gamma\varkappa) = -0.54455$, $(\gamma\lambda) = -1.56490$

$(\delta\eta) = -1.00022$, $(\delta\varkappa) = 0$, $(\delta\lambda) = -1.00015$

$(\varepsilon\eta) = +0.03971$, $(\varepsilon\varkappa) = +0.19802$, $(\varepsilon\lambda) = +0.84174$

$(\alpha\varkappa,1) = +0.35001$, $(\alpha\lambda,2) = +0.82690$

$(\beta\varkappa,1) = +0.25000$, $(\beta\lambda,2) = +0.53347$

$(\gamma\varkappa,1) = -0.60002$, $(\gamma\lambda,2) = -1.36041$

$(\delta\varkappa,1) = -0.05002$, $(\delta\lambda,2) = -0.94669$

$(\varepsilon\varkappa,1) = +0.20001$, $(\varepsilon\lambda,2) = +0.78681$

und hiemit

$z = -0.1313$ $\quad \mu = 2.6296$

$z' = -0.1721$ $\quad \mu' = 1.1605$

$z'' = +1.1845$ $\quad \mu'' = 4.0748$

$z''' = -1.1185$ $\quad \mu''' = 2.1527$

$z^{IV} = -0.5248$ $\quad \mu^{IV} = 0.8417$

woraus

$x = -0.7794$ mit dem Gewicht $= 1.475$

$x' = -0.7288$ » » » $= 3.278$

$x'' = +0.5085$ » » » $= 0.578$

$x''' = +2.1185$ » » » $= 1.179$

$x^{IV} = +1.0000$ » » » $= \infty$

*) Da hier $n - m = 2$, aber demungeachtet alle drei Bedingungsgleichungen mit zur Berechnung von (aa), (ab), etc. gezogen worden sind, so können nicht mehr $F = f$, etc. werden. Auf die Werthe der Unbekannten und ihrer Gewichte ist dieses ganz ohne Einfluss.

hervorgehen. Es ist also, wie voraus gesehen wurde, $x^{IV} = 1$ mit unendlich grossem Gewicht aus der Rechnung hervorgegangen.

Die Ausdrücke des Art. 54 geben jetzt für die Summe der Fehlerquadrate

$$W' = 19{,}204\,, \quad W'' = 11$$

womit

$$W = 8{,}204$$

wird.

58.

Man kann dieses Beispiel auch durch das Verfahren des Art. 29 behandeln, und muss dieselben Resultate erhalten. Die gegebenen Gleichungen führe ich zu diesem Zwecke wieder an

$$\begin{array}{l} x + x' + x'' + x''' + x^{IV} = 1 \\ 2x - 3x' = 1 \\ x'' - x''' + x^{IV} = 2 \\ \hline x + x' + x'' + 1 = 0 \\ x' - x'' + 2x''' - 3 = 0 \\ x^{IV} - 1 = 0 \end{array}$$

Zur Elimination eignen sich hier x, x', x^{IV}, und diese sind es daher, die man unter den a. a. O. mit $x_{,}$, $x_{,,}$, $x_{,,,}$ bezeichneten Unbekannten verstehen muss. Die vorstehenden Bedingungsgleichungen geben nun

$$\begin{aligned} x &= -2x'' + 2x''' - 4 \\ x' &= x'' - 2x''' + 3 \\ x^{IV} &= 1 \end{aligned}$$

und die drei ersten Gleichungen werden nach der Elimination dieser

$$\begin{aligned} x''' &= 1 \\ -7x'' + 10x''' &= 18 \\ x'' - x''' &= 1 \end{aligned}$$

Zufolge der Bezeichnungen des Art. 29 ist also jetzt

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{a} = 0\,, & \mathfrak{b} = 1\,, & \mathfrak{n} = 1 \\ \mathfrak{a}' = -7\,, & \mathfrak{b}' = 10\,, & \mathfrak{n}' = 18 \\ \mathfrak{a}'' = 1\,, & \mathfrak{b}'' = -1\,, & \mathfrak{n}'' = 1 \end{array}$$

und hiemit werden, da fortwährend $p = p' = p'' = 1$ sind,

$$(aa) = 50\,,\quad (ab) = -71\,,\quad (an) = -125$$
$$(bb) = 102\,,\quad (bn) = 180$$

weshalb die aufzulösenden Gleichungen

$$50x'' - 71x''' = -125$$
$$-71x'' + 102x''' = 180$$

sind. Löst man diese unbestimmt auf, indem man die rechten Seiten derselben bez. mit α und β bezeichnet, so bekommt man

$$x'' = \frac{102}{59}\alpha + \frac{71}{59}\beta$$
$$x''' = \frac{71}{59}\alpha + \frac{50}{59}\beta$$

und es wird also in der Bezeichnung des Art. 30

$$(I, I) = \frac{102}{59}\,,\quad (I, II) = \frac{71}{59}$$
$$(II, II) = \frac{50}{59}$$

Die vorstehenden Gleichungen geben nun

$$x'' = \frac{30}{59} \text{ mit dem Gewicht } = \frac{59}{102}$$
$$x''' = \frac{125}{59} \quad » \quad » \quad » \quad = \frac{59}{50}$$

und substituirt man diese Werthe von x'' und x''' in die obigen Gleichungen für x, x', x^{IV}, so ergiebt sich

$$x = -\frac{46}{59}\,,\quad x' = -\frac{48}{59}\,,\quad x^{IV} = 1$$

Für die Gewichte dieser drei Bestimmungen erhält man durch Vergleichung der Gleichungen (26) mit den obigen für x, x', x^{IV} zuerst

$$\mu = -2\,,\quad \nu = +2$$
$$\mu' = +1\,,\quad \nu' = -2$$
$$\mu'' = 0\,,\quad \nu'' = 0$$

es wird also zufolge des Art. 30

$$\frac{1}{P} = 4(I,I) - 8(I,II) + 4(II,II)$$
$$\frac{1}{P'} = (I,I) - 4(I,II) + 4(II,II)$$
$$\frac{1}{P^{IV}} = 0$$

und nach der Substitution

$$P = \frac{59}{40}\,,\quad P' = \frac{59}{18}\,,\quad P^{IV} = \infty$$

Verwandelt man die hier in rationalen Brüchen gefundenen Resultate in Decimalbrüche, so wird man mit den Resultaten des vor. Art. vollständige Uebereinstimmung finden.

Substituirt man die hier erhaltenen Werthe der Unbekannten in die drei ersten der gegebenen Gleichungen, so sind die übrig bleibenden Fehler

$$+\frac{66}{59}, \quad -\frac{22}{59}, \quad -\frac{154}{59}$$

und folglich die Summe ihrer Ausdrücke, oder

$$W = \frac{28556}{(59)^2} = 8.203$$

auch mit dem vor. Art. übereinstimmend.

59.

Das Beispiel soll noch so geändert werden, dass ausser x^{v} auch x^{iv} und x''' weggelassen werden. Die gegebenen Gleichungen sind also jetzt

$$\begin{aligned} x + x' + x'' &= 1 \\ 2x - 3x' &= 1 \\ x'' &= 2 \\ \hline x + x' + x'' + 1 &= 0 \\ x' - x'' - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Da hier $m = n$ ist, so können die Hülfsgrössen (aa), (ab), etc. ohne Zuziehung der Coefficienten der Bedingungsgleichungen berechnet werden, aber die Zuziehung dieser letzteren kann das Resultat nicht im Geringsten ändern, und um dieses zu zeigen soll hier die Auflösung auf beide Arten durchgeführt werden. Ziehen wir nun zuerst die Coefficienten der Bedingungsgleichungen hinzu, so bleiben die ersten Hülfsgrössen dieselben wie vorher, und können aus dem Vorhergehenden entnommen werden; sie sollen zu mehrerer Deutlichkeit hier wiederholt werden.

$$\begin{array}{llll} (aa) = 6, & (ab) = -4, & (ac) = 2, & (al) = 3 \\ & (bb) = 12, & (bc) = 1, & (bl) = -2 \\ & & (cc) = 4, & (cl) = 3 \\ & & & (ll) = 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} (bb,1) = 9.3333, & (bc,1) = 2.3333, & (bl,1) = 0 \\ & (cc,2) = 2.7500, & (cl,2) = 2 \\ & & (ll,3) = 3.0454 \end{array}$$

$$\alpha' = (9.82391)\,,\quad \beta' = -(9.52288)\,,\quad \chi' = -(9.69897)$$
$$\beta'' = -(9.39793)\,,\quad \chi'' = 0$$
$$\chi''' = -(9.68170)$$
$$\alpha'' = -(9.69897)$$

woraus

$$\begin{aligned} \eta &= +0.1364 & \pi &= 0.3052 \\ \eta' &= -0.1818 & \pi' &= 0.1299 \\ \eta'' &= +0.7273 & \pi'' &= 0.3637 \end{aligned}$$

folgen. Ferner werden

$$\begin{aligned} y &= 1\,, & \varkappa &= 0 \\ y' &= 1.6667\,, & \varkappa' &= 1 \\ y'' &= 0.2500\,, & \varkappa'' &= -1.2500 \\ F &= +1.6818\,, & G &= -3.9091 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\eta\eta) &= 0.48701\,, & (\eta\varkappa) &= 0.06493 \\ & & (\varkappa\varkappa) &= 0.67533 \\ (\varkappa\varkappa,1) &= 0.66667\,, & R' &= +5.808 \\ & & R'' &= 31.435 \\ \mathfrak{a}' &= -(9.12491)\,, & \mathfrak{x}' &= (0.53824) \\ & & \mathfrak{x}'' &= -(0.79239) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\alpha\eta) &= 0.24025\,, & (\alpha\varkappa) &= 0.29870 \\ (\beta\eta) &= 0.15584\,, & (\beta\varkappa) &= 0.22077 \\ (\gamma\eta) &= 0.09091\,, & (\gamma\varkappa) &= -0.45455 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\alpha\varkappa,1) &= 0.26667 \\ (\beta\varkappa,1) &= 0.20000 \\ (\gamma\varkappa,1) &= -0.46667 \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} z &= -0.8237 & \mu &= 0.2252 \\ z' &= -0.7018 & \mu' &= 0.1099 \\ z'' &= 3.2073 & \mu'' &= 0.3437 \end{aligned}$$

und

$x = 0.9601$ mit dem Gewicht $= 12.50$
$x' = 0.5200$ » » » $= 50.00$
$x'' = -2.4800$ » » » $= 50.00$

hervor gehen. Es wird ausserdem

$$W' = 34.480\,,\quad W'' = 10$$

woraus man

$$W' = 24.480$$

bekommt.

60.

Nehmen wir nun wieder dieselben Gleichungen vor, nemlich

$$\begin{array}{rl} x + x' + x'' & = 1 \\ 2x - 3x' & = 1 \\ x'' & = 2 \\ \hline x + x' + x'' + 1 & = 0 \\ x' - x'' - 3 & = 0 \end{array}$$

und lassen bei der Berechnung der Hülfsgrössen (aa), (ab), etc. die Coefficienten der Bedingungsgleichungen weg. Hiemit werden

$$\begin{array}{llll} (aa) = 5, & (ab) = -5, & (ac) = 1, & (al) = 3 \\ & (bb) = 10, & (bc) = 1, & (bl) = -2 \\ & & (cc) = 2, & (cl) = 3 \\ & & & (ll) = 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} (bb,1) = 5, & (bc,1) = 2, & (bl,1) = 1 \\ & (cc,2) = 1, & (cl,2) = 2 \\ & & (ll,3) = 0 \end{array}$$

$$\alpha' = 1, \quad \beta' = -\frac{1}{5}, \quad \alpha'' = -\frac{3}{5}, \quad \beta'' = -\frac{2}{5}$$

$$\begin{array}{ll} y = -\frac{2}{5} & \pi = \frac{19}{25} \\ y' = -\frac{3}{5} & \pi' = \frac{9}{25} \\ y'' = 2 & \pi'' = 1 \end{array}$$

ferner

$$\begin{array}{ll} \eta = 1, & \varkappa = 0 \\ \eta' = 2, & \varkappa' = 1 \\ \eta'' = 0, & \varkappa'' = -\frac{7}{5} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} (\eta\eta) = 1, & (\eta\varkappa) = \frac{2}{5}, & F = 2 \\ & (\varkappa\varkappa) = \frac{54}{25}, & G = -\frac{28}{5} \end{array}$$

$$(\varkappa\varkappa,1) = 2, \quad G' = -\frac{32}{5}$$

$$R' = \frac{642}{25}$$

$$\mathfrak{a}' = -\frac{2}{5}, \quad \mathfrak{x}' = 2, \quad \mathfrak{x}'' = -\frac{16}{5}$$

Ferner

$$(\alpha\eta) = \frac{2}{5}\,,\ (\alpha\varkappa) = \frac{26}{25}\,,\ (\alpha\varkappa,1) = \frac{4}{5}$$
$$(\beta\eta) = \frac{2}{5}\,,\ (\beta\varkappa) = \frac{49}{25}\,,\ (\beta\varkappa,1) = \frac{2}{5}$$
$$(\gamma\eta) = 0\,,\ (\gamma\varkappa) = -\frac{7}{5}\,,\ (\gamma\varkappa,1) = -\frac{7}{5}$$

$$z = -\frac{24}{25}\,,\quad \mu = \frac{17}{25}$$
$$z' = -\frac{28}{25}\,,\quad \mu' = \frac{17}{50}$$
$$z'' = \frac{112}{25}\,,\quad \mu'' = \frac{49}{50}$$

also

$$x = \frac{24}{25} \text{ mit dem Gewicht } = \frac{25}{2}$$
$$x' = \frac{12}{25} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad = 50$$
$$x'' = -\frac{62}{25} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad = 50$$
$$W = W' = \frac{612}{25}$$

mit den im vor. Art. erhaltenen Resultaten völlig übereinstimmend.

61.

In dem eben behandelten Beispiel findet noch ein Umstand statt, welcher Beachtung verdient. Die erste durch Beobachtungen gegebene Gleichung ist, abgesehen vom völlig bekannten Gliede, mit der ersten Bedingungsgleichung identisch, so dass in der That von den fünf gegebenen Gleichungen nur vier von einander wesentlich verschieden sind. Es ist von Interesse, zu erfahren welchen Einfluss dieser Umstand auf das Resultat hat, und diesen zeigt die Methode des Art. 29 am Einfachsten, weshalb ich dasselbe Beispiel auch nach dieser Methode behandeln werde. Die Gleichungen sind wieder

$$\begin{aligned} x + x' + x'' &= 1 \\ 2x - 3x' &= 1 \\ x'' &= 2 \\ \hline x + x' + x'' + 1 &= 0 \\ x' - x'' - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Die beiden letzten Gleichungen geben

$$\begin{aligned} x &= -2x'' - 4 \\ x' &= x'' + 3 \end{aligned}$$

Eliminirt man hiemit x und x' aus den drei ersten, so bekommt man

$$0 = 2$$
$$-7x'' = 18$$
$$x'' = 2$$

folglich nachdem man mit den Coefficienten von x'' multiplicirt, und addirt hat,

$$x'' = -\frac{62}{25}$$

und durch die Substitution dieses Werthes in die Gleichungen für x und x'

$$x = \frac{24}{25}, \quad x' = \frac{12}{25}$$

mit den vorher erhaltenen Werthen identisch, und dasselbe findet man auch in Bezug auf die Gewichte. Man erkennt aus dieser Auflösung, dass die Methode von selbst die Gleichung, die in den übrigen enthalten ist, ausschliesst und unberücksichtigt lässt, und so wird es in allen ähnlichen Fällen stattfinden. Nehmen wir um einen zusammengesetzteren Fall herbei zu führen

$$x + 3x' - x'' = 5$$

statt der vorherigen ersten Gleichung an, so findet sich durch die Elimination

$$0 = 0$$
$$-7x'' = 18$$
$$x'' = 2$$

woraus wieder für die Unbekannten und deren Gewichte dieselben Werthe hervorgehen wie vorher. Die obige Gleichung, deren Wirkung durch die Methode annullirt worden ist, ist wieder in den beiden Bedingungsgleichungen enthalten, und entsteht, wenn man das Doppelte der zweiten zur ersten addirt.

62.

Dass auch die zweite Methode dieselbe Eigenschaft besitzt, lässt sich leicht dadurch zeigen, dass man sie mit Weglassung der ersten gegebenen Gleichung auf die übrigen anwendet. Seien daher jetzt

$$2x - 3x' = 1$$
$$x'' = 2$$

$$x + x' + x'' + 1 = 0$$
$$x' - x'' - 3 = 0$$

durch diese Methode zu behandeln. Hier wird, wenn man die erste Bedingungsgleichung zur Bildung der ersten Hülfsgrössen zuzieht, da jetzt $n - m = 1$ ist,

$$\begin{array}{llll} (aa) = 5\,, & (ab) = -5\,, & (ac) = 1\,, & (al) = 2 \\ & (bb) = 10\,, & (bc) = 1\,, & (bl) = -2 \\ & & (cc) = 2\,, & (cl) = 2 \\ & & & (ll) = 5 \end{array}$$

wo blos die Grössen die l enthalten von denen des Art. 60 verschieden sind. Ferner

$$\begin{array}{lll} (bb,1) = 5\,, & (bc,1) = 2\,, & (bl,1) = -1 \\ & (cc,2) = 1\,, & (cl,2) = 2 \\ & & (ll,3) = 0 \end{array}$$

$$\alpha' = 1\,,\quad \beta' = -\frac{1}{5}\,,\quad \beta'' = -\frac{2}{5}\,,\quad \alpha'' = -\frac{3}{5}$$

wo alle Grössen mit denen des Art. 60 übereinstimmen. Hieraus folgt

$$\begin{array}{ll} y = -1 & \pi = \frac{19}{25} \\ y' = -1 & \pi' = \frac{9}{25} \\ y'' = 2 & \pi'' = 1 \end{array}$$

wo wieder die π mit dem Art. 60 übereinstimmen. Ferner

$$\begin{array}{ll} \eta = 1 & \varkappa = 0 \\ \eta' = 2 & \varkappa' = 1 \\ \eta'' = 0 & \varkappa'' = -\frac{7}{5} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} (\eta\eta) = 1\,, & (\eta\varkappa) = \frac{2}{5}\,, & F = 1 \\ & (\varkappa\varkappa) = \frac{54}{25}\,, & G = -6 \end{array}$$

$$(\varkappa\varkappa,1) = 2\,,\quad G' = -\frac{32}{5}$$

$$R' = \frac{537}{25}$$

$$\mathfrak{a}' = -\frac{2}{5}\,,\quad \mathfrak{x}' = 1\,,\quad \mathfrak{x}'' = -\frac{46}{5}$$

ferner

$$\begin{array}{lll} (\alpha\eta) = \frac{3}{5}\,, & (\alpha\varkappa) = \frac{26}{25}\,, & (\alpha\varkappa,1) = \frac{4}{5} \\ (\beta\eta) = \frac{2}{5}\,, & (\beta\varkappa) = \frac{19}{25}\,, & (\beta\varkappa,1) = \frac{3}{5} \\ (\gamma\eta) = 0\,, & (\gamma\varkappa) = -\frac{7}{5}\,, & (\gamma\varkappa,1) = -\frac{7}{5} \end{array}$$

wie im Art. 60, mit Ausnahme von F, G, und den davon abhängigen Grössen. Hiemit werden

$$z = -\frac{49}{25} \qquad \mu = \frac{47}{25}$$
$$z' = -\frac{38}{25} \qquad \mu' = \frac{47}{50}$$
$$z'' = \frac{112}{25} \qquad \mu'' = \frac{49}{50}$$

woraus wieder dieselben Werthe der Unbekannten und der Gewichte derselben hervorgehen wie vorher. Die Summe der Fehlerquadrate wird jetzt etwas anders, weil die weggelassene erste Gleichung nicht mehr mitzählt. Man bekommt

$$W' = \frac{587}{25}, \quad W'' = 1$$

woraus

$$W = \frac{612}{25}$$

folgt.

63.

Um das Beispiel möglichst zu erschöpfen will ich schliesslich dieselben Gleichungen wieder mit der Veränderung vornehmen, dass die zweite Bedingungsgleichung mit zur Berechnung der (aa), (ab), etc. gezogen werden soll. Hiemit wird

$$(aa) = 4, \quad (ab) = -6, \quad (ac) = 0, \quad (al) = 2$$
$$(bb) = 10, \quad (bc) = -1, \quad (bl) = -3$$
$$(cc) = 2, \quad (cl) = 2$$
$$(ll) = 5$$

$$(bb,1) = 1, \quad (bc,1) = -1, \quad (bl,1) = 0$$
$$(cc,2) = 1, \quad (cl,2) = 2$$
$$(ll,3) = 0$$

$$\alpha' = \frac{3}{2}, \quad \beta' = 0, \quad \beta'' = 1, \quad \alpha'' = \frac{3}{2}$$

woraus

$$y = \frac{7}{2} \qquad \pi = \frac{19}{4}$$
$$y' = 2 \qquad \pi' = 2$$
$$y'' = 2 \qquad \pi'' = 1$$

folgen. Ferner

$$\eta = 1 \qquad \varkappa = 0$$
$$\eta' = \frac{5}{2} \qquad \varkappa' = 1$$
$$\eta'' = \frac{7}{2} \qquad \varkappa'' = 0$$

$$(\eta\eta) = \frac{75}{4}, \quad (\eta\varkappa) = \frac{5}{2}, \quad F = \frac{17}{2}$$

$$(\varkappa\varkappa) = 1, \quad G = -3$$

$$(\varkappa\varkappa, 1) = \frac{2}{3}, \quad G' = -\frac{62}{15}$$

$$R'' = \frac{737}{25}$$

$$\mathfrak{a}' = -\frac{2}{15}, \quad \mathfrak{z}' = \frac{34}{75}, \quad \mathfrak{z}'' = -\frac{31}{5}$$

$$(\alpha\eta) = \frac{37}{4}, \quad (\alpha\varkappa) = \frac{3}{2}, \quad (\alpha\varkappa, 1) = \frac{4}{15}$$

$$(\beta\eta) = 6, \quad (\beta\varkappa) = 1, \quad (\beta\varkappa, 1) = \frac{4}{5}$$

$$(\gamma\eta) = \frac{7}{2}, \quad (\gamma\varkappa) = 0, \quad (\gamma\varkappa, 1) = -\frac{7}{15}$$

$$z = \frac{127}{50} \qquad \mu = \frac{467}{100}$$

$$z' = \frac{37}{25} \qquad \mu' = \frac{99}{50}$$

$$z'' = \frac{412}{25} \qquad \mu'' = \frac{49}{50}$$

woraus wieder dieselben Werthe der Unbekannten und der Gewichte hervorgehen wie vorher. Für die Summe der Fehlerquadrate wird jetzt

$$W' = \frac{737}{25}, \quad W'' = 9$$

also

$$W = \frac{512}{25}$$

wie im vor. Art.

Ich habe ehe ich weiter gehe hier noch eine Bemerkung einzuschalten. Wenn man die zwei Verfahrungsarten, die für die Auflösung der allgemeinen Aufgabe in dieser Abhandlung entwickelt worden sind, in ihrer Anwendung auf das eben behandelte Beispiel betrachtet, so scheint es, dass die Auflösung des Art. 29 auf geringere Arbeit führt, wie die später entwickelte. In der That hat im vorstehenden Beispiel jene Auflösung auf eine kürzere Rechnung geführt wie diese. Aber dieses findet nur in so einfachen Fällen, wie der, den dieses Beispiel darbietet, statt. In der Anwendung auf Fälle, in welchen die Zahl der Unbekannten und der Bedingungsgleichungen grösser ist, und die Coefficienten keine so einfache Zahlen sind wie hier, sondern aus Decimalbrüchen ohne Ende bestehen, ist die Sache eine andere. In solchen Fällen ist die zweite Auflösung im Allgemeinen diejenige, welche geringere Arbeit verursacht, und nur in besonderen Fällen, namentlich in solchen, wo die Elimination der mit $x_{,}$, $x_{,,}$, etc. bezeichneten Grössen leicht bewerkstelligt werden kann, die erste Auflösung vorzuziehen.

§. 4. **Anwendung der eben gelösten Aufgabe auf die Geodäsie, unter der Bedingung, dass nur Eine Grundlinie gemessen worden ist.**

a) Erstes Verfahren.

64.

Wir kommen jetzt zur Anwendung der im Vorhergehenden ausgeführten Auflösung auf die Geodäsie. Zwar ist von derselben schon im Art. 55 durch ihre Hinführung auf die Gaussische Aufgabe des »Supplementum theoriae combinationis etc.« eine geodätische Anwendung gegeben worden, allein diese ist nicht immer anwendbar, indem Umstände eintreten können, die einer allgemeineren Aufgabe angehören.

Es wird jetzt angenommen, dass in einem Dreiecksnetze eine grössere Anzahl von Winkeln gemessen worden seien, wie diejenige, die mit der Zuziehung Einer Dreiecksseite hinreichend und nöthig ist um dieses Dreiecksnetz zu bestimmen, und nach der Ausgleichung der Messungen gefragt, durch welche die wahrscheinlichsten Werthe derselben hervorgehen. In Bezug auf die Messungen selbst soll zuerst angenommen werden, dass man nicht die Winkel für sich, sondern die Richtungen, die die Schenkel der Winkel bilden, unmittelbar eingeschnitten habe*). Man wird weiter unten sehen, dass jener Fall sich mit Vortheil für die Abkürzung der Rechnungen auf diesen hinführen lässt. Das Verfahren bei den Messungen, welches der nun zu entwickelnden Anwendung der allgemeinen Aufgabe zu Grunde liegend gedacht wird, ist daher das folgende.

Nachdem auf irgend einer Station, die zugleich einen Dreieckspunkt bildet, der Theodolit aufgestellt und nivellirt worden ist, stelle man bei unverändert gelassenem Kreise desselben die übrigen Dreieckspunkte, in so weit sie sichtbar sind, durch blose Bewegung der Alhidade in das Fernrohr ein, lese nach jeder Einstellung die Mikroscope oder die Nonien des Theodoliten ab, und notire die Ablesungen. Hierauf drehe man den Kreis des Theodoliten um einen beliebigen Bogen, und wiederhole dasselbe Verfahren, welches fortzusetzen ist, bis die vor-

---

*) Die Messung der Richtungen statt der Winkel selbst ist, so viel ich weiss, zuerst von W. Strube angegeben und angewandt worden. S. Schum. Astr. Nachr. B. II. p. 431 u. f.

bestimmte Anzahl von Einstellungen eines jeden Dreieckspunkts erlangt ist. Eine jede solche Reihe von Einstellungen nenne ich einen Gyrus (gyrus horizontis). Die zufällige Beschaffenheit der Atmosphäre und auch andere Umstände können bewirken, dass nicht jeder Gyrus alle einzuschneidenden Punkte enthält, und wenn deren viele vorhanden sind, so wird man jedenfalls nicht Alle in jeden Gyrus aufnehmen, weil dadurch bewirkt werden würde, dass man sich zu lange auf den unveränderten Stand des Theodoliten verlassen müsste. Man wird im letztgenannten Falle für jeden Gyrus ein Maximum von Einstellungen festsetzen, und die in jedem Gyrus einzuschneidenden Punkte so auswählen, dass möglichst viele verschiedene Combinationen derselben vorkommen. Man wird ferner die verschiedenen Gruppen, in die man zu diesem Zwecke alle einzuschneidenden Punkte getheilt hat, mehrmals einschneiden, so dass von jeder derselben eine zweckmässige Anzahl von Gyris erhalten wird.

65.

Indem wir nun zur Anwendung unserer Aufgabe auf diese Messungen übergehen, ist zuerst zu erwägen, dass jeder Gyrus einen verschiedenen, beliebigen Anfangspunkt hat, und dass daher allen Einstellungen eines jeden Gyrus eine beliebige Zahl zugefügt, oder eine solche von denselben abgezogen werden darf. Die zweckmässigste Wahl dieser Zahlen ist die, welche bewirkt, dass alle in den verschiedenen Gyris erhaltenen Werthe der Richtungen eines und desselben Gegenstandes einander nahe gleich werden, und zugleich nahe die Azimuthe aller Punkte repräsentiren. Man kann hierauf noch einen Schritt weiter gehen, und für jede Richtung, oder jedes Azimuth, einen beliebigen genäherten Werth, der sich von selbst durch die erhaltenen Beobachtungen darbietet, abziehen, so dass hierauf alle der weiteren Berechnung zu unterwerfenden, durch die Beobachtungen erhaltenen Zahlenwerthe kleine Grössen werden, ja man kann durch dieses Verfahren bewirken, dass in einer Anzahl von Gyris alle diese Zahlenwerthe Null werden. Bezeichnen wir nun die auf diese Art durch die Beobachtungen erlangten Zahlenwerthe des ersten Gyrus mit l, l', l'', etc., die mit Uebergehung der Bedingungsgleichungen den angenommenen Werthen der Richtungen zuzufügenden, wahrscheinlichsten Verbesserungen mit

x, x', x'', etc., und die wahrscheinlichste Verbesserung des angenommenen gemeinschaftlichen Anfangspunkts dieses Gyrus mit u, so giebt dieser erste Gyrus die folgenden Gleichungen

$$(53) \quad . \quad x + u = l, \quad x' + u = l', \quad x'' + u = l'', \text{ etc.}$$

Seien die Gewichte dieser Beobachtungen

$$p, \quad p', \quad p'', \text{ etc.}$$

Im zweiten Gyrus habe man auf gleiche Weise die Zahlenwerthe derselben Richtungen $l_{,}$, $l_{,}'$, $l_{,}''$, etc. erhalten, bezeichnet man hierauf mit $u_{,}$ die wahrscheinlichste Verbesserung des angenommenen gemeinschaftlichen Anfangspunkts dieses Gyrus, so giebt derselbe die Gleichungen

$$(54) \quad . \quad x + u_{,} = l_{,}, \quad x' + u_{,} = l_{,}', \quad x'' + u_{,} = l_{,}'', \text{ etc.}$$

Seien die Gewichte dieser Beobachtungen

$$p_{,}, \quad p_{,}', \quad p_{,}'', \text{ etc.}$$

Durch einen dritten Gyrus bekommt man ebenso

$$(55) \quad . \quad x + u_{,,} = l_{,,}, \quad x' + u_{,,} = l_{,,}', \quad x'' + u_{,,} = l_{,,}'', \text{ etc.}$$

mit den Gewichten

$$p_{,,}, \quad p_{,,}', \quad p_{,,}'', \text{ etc.}$$

und jeder folgende Gyrus giebt ähnliche Gleichungen. Diese sind die Gleichungen (29) unserer gegenwärtigen Aufgabe, in so weit nur Eine Station betrachtet wird. Jede andere Station, auf welcher beobachtet worden ist, liefert ähnliche Gleichungen, in welchen aber andere Unbekannten vorkommen, die in so ferne man nur zuerst den ersten Theil der Auflösung betrachtet, von jenen unabhängig sind. In Bezug auf den ersten Theil der Auflösung können also die Beobachtungen einer jeden Station unabhängig von denen aller übrigen Stationen berechnet werden. Es zerfallen, mit anderen Worten, in der gegenwärtigen Aufgabe die allgemeinen Gleichungen (29) in so viele von einander abgesonderte Systeme wie Stationen vorhanden sind.

66.

Die vorstehenden Gleichungen, in welchen x, x', x'', etc. und u, $u_{,}$. $u_{,,}$, etc. die Unbekannten sind, wären jetzt nach den Vorschriften der Artt. 42, 43, 44 zu behandeln, und da ihre Anzahl immer wenigstens eben so gross ist, wie die der Unbekannten, so brauchen in der gegenwärtigen Aufgabe zur Berechnung der Grössen (aa), (ab), etc. die Coeffi-

cienten der Bedingungsgleichungen, die sich aus dem Dreiecksnetz im Ganzen betrachtet ergeben, nie hinzugezogen zu werden. Es tritt jedoch hier ein Umstand ein, der eine Abweichung vom allgemeinen Verfahren bedingt, und dieser besteht darin, dass aus den eben aufgestellten Gleichungen, in wie grosser Anzahl sie auch vorhanden sein mögen, nie alle Unbekannten bestimmt werden können, sondern immer Eine derselben unbestimmt bleibt. Dieses hat seinen Grund darin, dass der Anfangspunkt der Richtungen willkührlich ist, und folglich x, x', x'', etc. an sich unbestimmte Grössen sind, von welchen nur die Unterschiede (die Winkel, die daraus hervorgehen) bestimmte Werthe bekommen.

Da eine der Unbekannten willkührlich ist, so kann man zwischen allen Unbekannten, oder einem Theil derselben eine beliebige Bedingungsgleichung aufstellen*), und diese so einrichten, dass man geschmeidige Endformeln bekommt. Sei diese Bedingungsgleichung

$$\begin{aligned}\theta = Hu + Ju_{,} + Ku_{,,} + \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)\\ + H'x + J'x' + K'x'' + \ldots\end{aligned}$$

wo vorläufig θ, H, J, K, etc. H', J', K', etc. unbestimmte Grössen sind.

67.

Wir könnten nun die allgemeine Auflösung unmittelbar auf die im Vorhergehenden aufgestellten Gleichungen anwenden, müssten aber dabei auch auf den zweiten Theil derselben Rücksicht nehmen, weil eine Bedingungsgleichung eingeführt worden ist. Theils um letzteres zu vermeiden, und theils um die Unbekannten u, $u_{,}$, $u_{,,}$, etc. zu eliminiren, die weiter nicht gebraucht werden, ziehe ich vor den ersten Theil der Auflösung a priori in Bezug auf die aufgestellten Gleichungen durchzuführen. Es ist aus dem Vorhergehenden klar, dass dieser darin besteht, die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten in der Annahme zu suchen, dass in der Aufgabe die zu lösen ist, nur die Bedingungsgleichung (56) vorhanden sei, die Werthe der Unbekannten, die man dadurch erhält, sind die, welche im Art. 44 mit y, y', y'', etc. bezeichnet wurden; der zweite Theil der Auflösung bleibt hierauf derselbe wie im Vorhergehenden.

*) S. Schum. Astr. Nachr. B. XVI. Nr. 362.

Das leitende Princip, welches wir hier anzuwenden haben, besteht wieder darin, dass die Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Quadrate der übrigbleibenden Fehler ein Minimum werden muss, während die Gleichung (56) vollständig erfüllt wird. Bezeichnet nun ψ einen unbestimmten Factor, so muss in Folge der Gleichungen (53) bis (56) die folgende Function

$$\begin{aligned}
&p(x+u-l)^2 + p'(x'+u-l')^2 + p''(x''+u-l'')^2 + \ldots \\
&+ p_{,}(x+u_{,}-l_{,})^2 + p_{,}'(x'+u_{,}-l_{,}')^2 + p_{,}''(x''+u_{,}-l_{,}'')^2 + \ldots \\
&+ p_{,,}(x+u_{,,}-l_{,,})^2 + p_{,,}'(x'+u_{,,}-l_{,,}')^2 + p_{,,}''(x''+u_{,,}-l_{,,}'')^2 + \ldots \\
&+ \text{etc.} \\
&- 2\psi(Hu + Ju_{,} + Ku_{,,} + \ldots + H'x + J'x' + K'x'' + \ldots - \theta)
\end{aligned}$$

ein absolutes Minimum werden und diese Bedingung giebt sogleich die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned}
px + p'x' + p''x'' + \ldots + Pu &= (lu) + H\psi \\
p_{,}x + p_{,}'x' + p_{,}''x'' + \ldots + P_{,}u_{,} &= (lu_{,}) + J\psi \\
p_{,,}x + p_{,,}'x' + p_{,,}''x'' + \ldots + P_{,,}u_{,,} &= (lu_{,,}) + K\psi \\
\text{etc.} \qquad\qquad & \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Qx + pu + p_{,}u_{,} + p_{,,}u_{,,} + \ldots &= (lx) + H'\psi \\
Q'x' + p'u + p_{,}'u_{,} + p_{,,}'u_{,,} + \ldots &= (lx') + J'\psi \\
Q''x'' + p''u + p_{,}''u_{,} + p_{,,}''u_{,,} + \ldots &= (lx'') + K'\psi \\
\text{etc.} \qquad\qquad & \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

in welchen zur Abkürzung

$$\begin{aligned}
P &= p + p' + p'' + \ldots \\
P_{,} &= p_{,} + p_{,}' + p_{,}'' + \ldots \\
P_{,,} &= p_{,,} + p_{,,}' + p_{,,}'' + \ldots \\
&\text{etc.} \\
Q &= p + p_{,} + p_{,,} + \ldots \\
Q' &= p' + p_{,}' + p_{,,}' + \ldots \\
Q'' &= p'' + p_{,}'' + p_{,,}'' + \ldots \\
&\text{etc.} \\
(lu) &= pl + p'l' + p''l'' + \ldots \\
(lu_{,}) &= p_{,}l_{,} + p_{,}'l_{,}' + p_{,}''l_{,}'' + \ldots \\
(lu_{,,}) &= p_{,,}l_{,,} + p_{,,}'l_{,,}' + p_{,,}''l_{,,}'' + \ldots \\
&\text{etc.} \\
(lx) &= pl + p_{,}l_{,} + p_{,,}l_{,,} + \ldots \\
(lx') &= p'l' + p_{,}'l_{,}' + p_{,,}'l_{,,}' + \ldots \\
(lx'') &= p''l'' + p_{,}''l_{,}'' + p_{,,}''l_{,,}'' + \ldots \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

gesetzt worden sind. Die Bedeutung dieser Summen kann einfach mit Worten ausgedrückt werden.

P ist die Summe der Gewichte aller Beobachtungen des ersten Gyrus,
$P_{,}$ . . . . zweiten Gyrus,
$P_{,,}$ . . . . dritten Gyrus,
u. s. w.

Q ist die Summe der Gewichte aller für die Richtung x vorhandenen Beobachtungen,
Q' . . . . x' . . . . .
Q'' . . . . x'' . . . . .
u. s. w.

(lu) ist die Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten, beobachteten Werthe im ersten Gyrus,
$(lu_{,})$ . . . . im zweiten Gyrus,
$(lu_{,,})$ . . . . im dritten Gyrus,
u. s. w.

(lx) ist die Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten, für x erhaltenen Werthe,
(lx') . . . . x' . .
(lx'') . . . . x'' . .

u. s. w. Diesen Bedeutungen zufolge können diese Summen leicht, und ohne Irrthum befürchten zu müssen, berechnet werden.

68.

Ehe ich weiter gehe will ich auf eine wesentliche Vereinfachung aufmerksam machen, deren die Ausdrücke des vor. Art. fähig sind, und diese einführen.

»Man kann immer auf einfache Weise bewirken, dass alle mit (lu), $(lu_{,})$, $(lu_{,,})$, etc. bezeichneten Summen Null werden.«

Dem Vorhergehenden zufolge ist der gemeinschaftliche Anfangspunkt aller Richtungen eines jeden Gyrus völlig willkührlich, bezeichnet man daher mit m irgend eine beliebige Zahl, dann ist z. B. der Ausdruck für (lu) nicht nur der im vor. Art. angegebene, sondern es ist auch

$$(lu) = p(l-m) + p'(l'-m) + p''(l''-m) + \dots$$

bestimmt man aber nun m so dass

$$m = \frac{p}{P} l + \frac{p'}{P} l' + \frac{p''}{P} l'' + \ldots$$

wird, so ergiebt sich sogleich

$$(lu) = 0$$

und da man dieses Verfahren auf die Beobachtungen eines jeden Gyrus anwenden kann, so kann man auch $(lu_{\prime})$, $(lu_{\prime\prime})$, etc. gleich Null machen. W. z. b. w.

Wenn, wie am häufigsten der Fall ist, die Gewichte der Beobachtungen des betreffenden Gyrus einander gleich gesetzt werden können, so wird m gleich dem arithmetischen Mittel aller l dieses Gyrus.

Führen wir nun die obige Bestimmung in die Gleichungen des vor. Art. ein, dann sind zuerst auf die eben erklärte Art

$$\begin{array}{lll} p(l-m) \, , & p'(l'-m) \, , & p''(l''-m) \, , \\ p_{\prime}(l_{\prime}-m_{\prime}) \, , & p_{\prime}'(l_{\prime}'-m_{\prime}) \, , & p_{\prime}''(l_{\prime}''-m_{\prime}) \, , \\ p_{\prime\prime}(l_{\prime\prime}-m_{\prime\prime}) \, , & p_{\prime\prime}'(l_{\prime\prime}'-m_{\prime\prime}) \, , & p_{\prime\prime}''(l_{\prime\prime}''-m_{\prime\prime}) \, , \end{array}$$

etc. zu berechnen, und diese statt pl, $p'l'$, etc. $p_{\prime}l_{\prime}$, etc. etc. anzusetzen, worauf die Gleichungen

$$(57) \quad . \quad \left\{ \begin{array}{l} px + p'x' + p''x'' + \ldots + Pu = H\psi \\ p_{\prime}x + p_{\prime}'x' + p_{\prime}''x'' + \ldots + P_{\prime}u_{\prime} = J\psi \\ p_{\prime\prime}x + p_{\prime\prime}'x' + p_{\prime\prime}''x'' + \ldots + P_{\prime\prime}u_{\prime\prime} = K\psi \\ \text{etc.} \end{array} \right.$$

$$(58) \quad . \quad \left\{ \begin{array}{l} Qx + pu + p_{\prime}u_{\prime} + p_{\prime\prime}u_{\prime\prime} + \ldots\ldots = (lx) + H'\psi \\ Q'x' + p'u + p_{\prime}'u_{\prime} + p_{\prime\prime}'u_{\prime\prime} + \ldots\ldots = (lx') + J'\psi \\ Q''x'' + p''u + p_{\prime}''u_{\prime} + p_{\prime\prime}''u_{\prime\prime} + \ldots\ldots = (lx'') + K'\psi \\ \text{etc.} \end{array} \right.$$

zur Bestimmung der Unbekannten u, $u_{\prime}$, $u_{\prime\prime}$, etc. x, x', x'', etc. dienen. Es kann noch bemerkt werden, dass jetzt die Bedingungsgleichungen

$$P + P_{\prime} + P_{\prime\prime} + \ldots = Q + Q' + Q'' + \ldots$$

$$(lx) + (lx') + (lx'') + \ldots = 0$$

stattfinden, die zur Prüfung der numerischen Rechnungen dienen können.

69.

Aus den Gleichungen (57) und (58) kann man ohne Mühe sowohl ψ wie u, $u_{\prime}$, $u_{\prime\prime}$, etc. eliminiren. Seien

$$N = \frac{p}{P} H + \frac{p_{,}}{P_{,}} J + \frac{p_{,,}}{P_{,,}} K + \ldots - H'$$

$$N' = \frac{p'}{P} H + \frac{p_{,}'}{P_{,}} J + \frac{p_{,,}'}{P_{,,}} K + \ldots - J'$$

$$N'' = \frac{p''}{P} H + \frac{p_{,}''}{P_{,}} J + \frac{p_{,,}''}{P_{,,}} K + \ldots - K'$$

etc.

$$S = \frac{H^2}{P} + \frac{J^2}{P_{,}} + \frac{K^2}{P_{,,}} + \ldots$$

Multiplicirt man nun die erste Gleichung (57) mit $\frac{H}{P}$, die zweite mit $\frac{J}{P_{,}}$, die dritte mit $\frac{K}{P_{,,}}$, u. s. w. und addirt die Produkte, so erhält man in Folge der Bedingungsgleichung (56)

$$\psi = \frac{N}{S} x + \frac{N'}{S} x' + \frac{N''}{S} x'' + \ldots + \frac{\theta}{S} \quad . \quad . \quad (59)$$

und die Elimination von ψ aus den (57) giebt hierauf

$$\left.\begin{aligned}
u &= \left(\frac{NH}{SP} - \frac{p}{P}\right)x + \left(\frac{N'H}{SP} - \frac{p'}{P}\right)x' + \left(\frac{N''H}{SP} - \frac{p''}{P}\right)x'' \\
&\qquad + \ldots + \frac{H\theta}{SP} \\
u_{,} &= \left(\frac{NJ}{SP_{,}} - \frac{p_{,}}{P_{,}}\right)x + \left(\frac{N'J}{SP_{,}} - \frac{p_{,}'}{P_{,}}\right)x' + \left(\frac{N''J}{SP_{,}} - \frac{p_{,}''}{P_{,}}\right)x'' \\
&\qquad + \ldots + \frac{J\theta}{SP_{,}} \\
u_{,,} &= \left(\frac{NK}{SP_{,,}} - \frac{p_{,,}}{P_{,,}}\right)x + \left(\frac{N'K}{SP_{,,}} - \frac{p_{,,}'}{P_{,,}}\right)x' + \left(\frac{N''K}{SP_{,,}} - \frac{p_{,,}''}{P_{,,}}\right)x'' \\
&\qquad + \ldots + \frac{K\theta}{SP_{,,}}
\end{aligned}\right\} \quad (60)$$

u. s. w. Setzt man diese Werthe von u, $u_{,}$, $u_{,,}$, etc. und ψ in die (58), so ergiebt sich das folgende System von Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
(aa)x + (ab)x' + (ac)x'' + \ldots &= (al) \\
(ab)x + (bb)x' + (bc)x'' + \ldots &= (bl) \\
(ac)x + (bc)x' + (cc)x'' + \ldots &= (cl)
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (61)$$

u. s. w. in welchen die Coefficienten die folgenden Ausdrücke erhalten,

$$(aa) = Q + \frac{N^2}{S} - (pp)$$

$$(ab) = \frac{NN'}{S} - (pp')$$

$$(ac) = \frac{NN''}{S} - (pp'')$$

etc.

$$(al) = (lx) - \frac{N\theta}{S}$$

$$(bb) = Q' + \frac{N'^2}{S} - (p'p')$$
$$(bc) = \frac{N'N''}{S} - (p'p'')$$
etc.
$$(bl) = (lx') - \frac{N'\theta}{S}$$

$$(cc) = Q'' + \frac{N''^2}{S} (p''p'')$$
etc.
$$(cl) = (lx'') - \frac{N''\theta}{S}$$

---

u. s. w. nachdem die folgenden Abkürzungen eingeführt worden sind,

$$(pp) = \frac{p^2}{P} + \frac{p_,^2}{P_,} + \frac{p_{,,}^2}{P_{,,}} + \ldots$$
$$(pp') = \frac{pp'}{P} + \frac{p_,p_,'}{P_,} + \frac{p_{,,}p_{,,}'}{P_{,,}} + \ldots$$
$$(pp'') = \frac{pp''}{P} + \frac{p_,p_,''}{P_,} + \frac{p_{,,}p_{,,}''}{P_{,,}} + \ldots$$
etc.

$$(p'p') = \frac{p'^2}{P} + \frac{p_,'^2}{P_,} + \frac{p_{,,}'^2}{P_{,,}} + \ldots$$
$$(p'p'') = \frac{p'p''}{P} + \frac{p_,'p_,''}{P_,} + \frac{p_{,,}'p_{,,}''}{P_{,,}} + \ldots$$
etc.

$$(p''p'') = \frac{p''^2}{P} + \frac{p_,''^2}{P_,} + \frac{p_{,,}''^2}{P_{,,}} + \ldots$$
etc.

---

u. s. w. womit die Elimination der Unbekannten u, $u_,$, etc. ausgeführt ist.

70.

Suchen wir jetzt den einfachsten Ausdruck für die Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Fehlerquadrate, die wie oben mit W bezeichnet werden soll. Die erste Entwickelung des für diese Summe im Art. 67 aufgestellten Ausdrucks giebt

$$\begin{aligned} W = & \{Qx + pu + p_,u_, + p_{,,}u_{,,} + \ldots - (lx)\}x \\ & + \{Q'x' + p'u + p'_,u_, + p'_{,,}u_{,,} + \ldots - (lx')\}x' \\ & + \{Q''x'' + p''u + p''_,u_, + p''_{,,}u_{,,} + \ldots - (lx'')\}x'' \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \{px + p'x' + p''x'' + \ldots + Pu\}u \\
&+ \{p_{,}x + p'_{,}x' + p''_{,}x'' + \ldots + P_{,}u_{,}\}u_{,} \\
&+ \{p_{,,}x + p'_{,,}x' + p''_{,,}x'' + \ldots + P_{,,}u_{,,}\}u_{,,} \\
&+ \text{etc.} \\
&+ (ll) - \{(lx)x + (lx')x' + (lx'')x'' + \ldots\}
\end{aligned}
$$

wo

$$
\begin{aligned}
(ll) = & \; pl^2 + p'l'^2 + p''l''^2 + \ldots \\
& + p_{,}l_{,}^2 + p'_{,}l'^2_{,} + p''_{,}l''^2_{,} + \ldots \\
& + p_{,,}l_{,,}^2 + p'_{,,}l'^2_{,,} + p''_{,,}l''^2_{,,} + \ldots \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

gesetzt ist. Zufolge der Gleichungen (57) und (58) geht dieser Ausdruck zuerst in den folgenden über

$$
\begin{aligned}
W = & \; \psi\{Hu + Ju_{,} + Ku_{,,} + \ldots + H'x + J'x' + K'x'' + \ldots\} \\
& + (ll) - (lx)x - (lx')x' - (lx'')x'' - \ldots
\end{aligned}
$$

und dieser verwandelt sich zufolge der Gleichungen

$$
\begin{aligned}
(lx) &= (al) + \frac{N}{S}\,\theta \\
(lx') &= (bl) + \frac{N'}{S}\,\theta \\
(lx'') &= (cl) + \frac{N''}{S}\,\theta \\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

und der (56) und (59) in den folgenden

$$
W = \frac{\theta^2}{S} + (ll) - (al)x - (bl)x' - (cl)x'' - \ldots
$$

Wenden wir uns jetzt zum Inhalt des Art. 54, so finden wir, dass die rechte Seite dieses Ausdrucks für W, mit Ausnahme des ersten Gliedes, mit der dort mit $\Omega_{,}$ bezeichneten Function identisch ist. Da nun aber hier alles was sich a. a. O. auf die Bedingungsgleichungen bezieht weggelassen werden muss, weil die einzige hier vorhandene Bedingungsgleichung in den vorstehenden Ausdrücken schon vollständig berücksichtigt worden ist, so ergiebt sich sogleich

$$
W = (ll,n) + \frac{\theta^2}{S}
$$

welches der einfachste Ausdruck dieser Function ist. Die Grösse (ll,n) wird hier bei der numerischen Auflösung der Gleichungen (61) auf dieselbe Art erhalten, wie im Art. 43 allgemein gezeigt wurde.

71.

In der Bedingungsgleichung (56) sind alle Coefficienten unbestimmt gelassen worden, aber es ist von Wichtigkeit zu untersuchen, welche Wirkung die eine oder andere Bestimmung derselben auf die Werthe der Unbekannten, die aus den (61) hervorgehen, so wie auf den Betrag der Function W ausüben. Diese Untersuchung soll jetzt vorgenommen werden. Nehmen wir an, dass die (61) unbestimmt aufgelöst worden sind, und setzen demzufolge

$$(62) \quad \ldots \quad \begin{cases} x = (1,1)(al) + (1,2)(bl) + (1,3)(cl) + \ldots \\ x' = (1,2)(al) + (2,2)(bl) + (2,3)(cl) + \ldots \\ x'' = (1,3)(al) + (2,3)(bl) + (3,3)(cl) + \ldots \end{cases}$$

u. s. w. Man bekommt nun durch die Verbindung dieser mit den (61) auf bekannte Art die folgenden Gleichungen

$$\begin{array}{l} (1,1)(aa) + (1,2)(ab) + (1,3)(ac) + \ldots = 1 \\ (1,1)(ab) + (1,2)(bb) + (1,3)(bc) + \ldots = 0 \\ (1,1)(ac) + (1,2)(bc) + (1,3)(cc) + \ldots = 0 \\ \quad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.} \\ (1,2)(aa) + (2,2)(ab) + (2,3)(ac) + \ldots = 0 \\ (1,2)(ab) + (2,2)(bb) + (2,3)(bc) + \ldots = 1 \\ (1,2)(ac) + (2,2)(bc) + (2,3)(cc) + \ldots = 0 \\ \quad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.} \\ (1,3)(aa) + (2,3)(ab) + (3,3)(ac) + \ldots = 0 \\ (1,3)(ab) + (2,3)(bb) + (3,3)(bc) + \ldots = 0 \\ (1,3)(ac) + (2,3)(bc) + (3,3)(cc) + \ldots = 1 \\ \quad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.} \end{array}$$

Die Ausdrücke der Coefficienten (aa), (ab), etc. etc. des Art. 69 geben aber durch die Addition, mit Berücksichtigung der Ausdrücke für P, $P_{,}$ etc. und Q, Q', etc. die ihrer Seits

$$\begin{array}{l} Q = (pp) + (pp') + (pp'') + \ldots \\ Q' = (pp') + (p'p') + (p'p'') + \ldots \\ Q'' = (pp'') + (p'p'') + (p''p'') + \ldots \\ \quad \text{etc.} \end{array}$$

geben, die folgenden

$$(aa) + (ab) + (ac) + \ldots = \frac{N\Sigma N}{S}$$
$$(ab) + (bb) + (bc) + \ldots = \frac{N'\Sigma N}{S}$$
$$(ac) + (bc) + (cc) + \ldots = \frac{N''\Sigma N}{S}$$
etc.

wenn man

$$\Sigma N = N + N' + N'' + \ldots$$

setzt, und vermittelst dieser erhält man aus den vorstehenden Gleichungen, wenn man jede Gruppe derselben summirt,

$$\left.\begin{array}{l} (1,1)N + (1,2)N' + (1,3)N'' + \ldots = \frac{S}{\Sigma N} \\ (1,2)N + (2,2)N' + (2,3)N'' + \ldots = \frac{S}{\Sigma N} \\ (1,3)N + (2,3)N' + (3,3)N'' + \ldots = \frac{S}{\Sigma N} \\ \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.} \end{array}\right\} \quad . \quad (63)$$

Berücksichtigt man nun in den Ausdrücken für (al), (bl), etc. nur die von θ abhängigen Glieder, setzt demzufolge

$$(al) = -\frac{N}{S}\theta$$
$$(bl) = -\frac{N'}{S}\theta$$
$$(cl) = -\frac{N''}{S}\theta$$
etc.

und substituirt diese Werthe in die (62), so ergiebt sich in Folge der (63)

$$x = x' = x'' = \text{etc.} = -\frac{\theta}{\Sigma N} \cdot$$

Die Einführung des Coefficienten θ der Bedingungsgleichung (56) fügt also allen beobachteten Richtungen eine und dieselbe Grösse hinzu, und hat folglich auf die Unterschiede derselben, das ist auf die aus den Beobachtungen hervorgehenden Winkel zwischen den eingeschnittenen Punkten, gar keinen Einfluss.

72.

Man multiplicire die erste der Gleichungen (63) mit (al), die zweite mit (bl), die dritte mit (cl), u. s. w. und addire die Produkte, so ergiebt sich in Folge der (62)

$$Nx + N'x' + N''x'' + \ldots = \frac{S}{\Sigma N}\{(al) + (bl) + (cl) + \ldots\}$$

Aber die Ausdrücke des Art. 69 für (al), (bl), etc. geben in Verbindung mit der Gleichung

$$(lx) + (lx') + (lx'') + \ldots = 0$$

des Art. 68

$$(al) + (bl) + (cl) + \ldots = -\frac{\Sigma N}{S}\theta$$

und folglich wird

$$(64) \quad . \quad . \quad . \quad Nx + N'x' + N''x'' + \ldots + \theta = 0$$

Hiemit giebt die (59)

$$\psi = 0$$

und die (60) gehen über in

$$(65) \quad . \quad . \quad \begin{cases} u = -\frac{p}{P}x - \frac{p'}{P}x' - \frac{p''}{P}x'' - \ldots \\ u_, = -\frac{p_,}{P_,}x - \frac{p_,'}{P_,}x' - \frac{p_,''}{P_,}x'' - \ldots \\ u_{,,} = -\frac{p_{,,}}{P_{,,}}x - \frac{p_{,,}'}{P_{,,}}x' - \frac{p_{,,}''}{P_{,,}}x'' - \ldots \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Substituirt man hierin den im vor. Art. für die x erhaltenen gemeinschaftlichen Werth, so ergiebt sich

$$u = u_, = u_{,,} = \text{etc.} = \frac{\theta}{\Sigma N}$$

woraus hervorgeht, dass die Einführung der Grösse θ allen u dieselbe Grösse hinzufügt, die sie von den x abzieht. Es bekommen also nicht blos die Winkel zwischen den beobachteten Richtungen, sondern auch die Summen $x + u$, $x' + u$, etc. $x + u_,$, $x' + u_,$, etc. etc. dieselben bestimmten Werthe, wie auch θ angenommen wird.

73.

Aus dem zunächst Vorhergehenden folgt schon, dass die Summe der mit den Gewichten multiplicirten Fehlerquadrate von θ unabhängig sein muss, da sie blos Function von den Summen $x + u$, $x' + u$, etc. $x + u_,$, $x' + u_,$, etc. etc. ist, es soll aber diese Eigenschaft direct bewiesen werden. Nehmen wir zu dem Ende den Ausdruck

$$W = \frac{\theta^2}{S} + (ll) - (al)x - (bl)x' - (cl)x'' - \ldots$$

des Art. 70 vor, und erwägen dass (ll) von θ unabhängig ist, und mit bloser Rücksicht auf die von θ abhängigen Glieder

$$x = x' = x'' = \text{etc.} = -\frac{\theta}{\Sigma N}$$

und

$$(al) = -\frac{N}{S}\theta, \quad (bl) = -\frac{N'}{S}\theta, \quad (cl) = -\frac{N''}{S}\theta, \quad \text{etc.}$$

sind, so erhält man, wieder mit bloser Rücksicht auf die Glieder, die θ enthalten,

$$W = \frac{\theta^2}{S} - \frac{\theta^2}{S} = 0$$

also W von θ unabhängig, w. z. b. w.

74.

Es kommt jetzt die Untersuchung an die Reihe, welchen Einfluss die Coefficienten H, J, K, etc. unserer Bedingungsgleichung (56) auf die Werthe der Unbekannten ausüben. Aus dem Umstande dass $\psi = 0$ ist, wie im vorvor. Art. bewiesen wurde, könnten wir schon den Schluss ziehen, dass diese Coefficienten, gleichwie θ, willkührlich bleiben, allein diese Sache verdient direct untersucht zu werden.

Wie man gesehen hat, treten diese Coefficienten nicht unmittelbar in die Coefficienten der Gleichungen (61) ein, sondern die mit N, N', N'', etc. und S bezeichneten Functionen derselben, aber wenn wir mit den H, J, K, etc. H', J', K', etc. irgend welche beliebige Aenderungen vornehmen, so können wir nicht nur die daraus hervorgehenden Aenderungen von N, N', etc. S mit ΔN, $\Delta N'$, $\Delta N''$, etc. ΔS, sondern auch die daraus folgenden Aenderungen der Coefficienten der (61) mit $\Delta(aa)$, $\Delta(ab)$, etc. etc. und die der Unbekannten mit Δx, $\Delta x'$, $\Delta x''$, etc. bezeichnen. Die Gleichungen (61) gehen daher nach diesen Aenderungen strenge in die folgenden

$$\left.\begin{aligned}
&[(aa)+\Delta(aa)]\Delta x+[(ab)+\Delta(ab)]\Delta x'+[(ac)+\Delta(ac)]\Delta x''+\ldots+F=0\\
&[(ab)+\Delta(ab)]\Delta x+[(bb)+\Delta(bb)]\Delta x'+[(bc)+\Delta(bc)]\Delta x''+\ldots+F'=0\\
&[(ac)+\Delta(ac)]\Delta x+[(bc)+\Delta(bc)]\Delta x'+[(cc)+\Delta(cc)]\Delta x''+\ldots+F''=0
\end{aligned}\right\}(66)$$

u. s. w. über, in welchen die völlig bekannten Glieder die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
F &= x\Delta(aa) + x'\Delta(ab) + x''\Delta(ac) + \ldots - \Delta(al)\\
F' &= x\Delta(ab) + x'\Delta(bb) + x''\Delta(bc) + \ldots - \Delta(bl)\\
F'' &= x\Delta(ac) + x'\Delta(bc) + x''\Delta(cc) + \ldots - \Delta(cl)\\
&\text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

haben. Wir dürfen jetzt, ohne dass die Strenge des Resultats dadurch verletzt würde, die Veränderung ΔS für sich betrachten. Setzt man zu dem Ende

$$r = \frac{1}{S+\Delta S} - \frac{1}{S}$$

so bekommt man

$$\Delta(aa) = N^2 r, \quad \Delta(ab) = NN'r, \quad (\Delta(ac) = NN''r, \text{ etc.} \quad \Delta(al) = -N\theta r$$
$$\Delta(bb) = N'^2 r, \quad \Delta(bc) = N'N''r, \text{ etc.} \quad \Delta(bl) = -N'\theta r$$
$$\Delta(cc) = N''^2 r, \text{ etc.} \quad \Delta(cl) = -N''\theta r$$

u. s. w. und es werden

$$F = Nr(Nx + N'x' + N''x'' + \ldots + \theta)$$
$$F' = N'r(Nx + N'x' + N''x'' + \ldots + \theta)$$
$$F'' = N''r(Nx + N'x' + N''x'' + \ldots + \theta)$$

u. s. w. also in Folge der (64)

$$F = F' = F'' = \text{etc.} = 0$$

Hiemit werden vermöge der (66) auch

$$\Delta x = \Delta x' = \Delta x'' = \text{etc.} = 0$$

oder irgend eine Aenderung von S, sei sie auch noch so gross, bringt keine Aenderung in den Werthen der Unbekannten hervor.

Untersuchen wir jetzt die Wirkung der gleichzeitigen Aenderungen ΔN und $\Delta N'$. Die Annahme dieser giebt strenge

$$\Delta(aa) = 2N\frac{\Delta N}{S} + \frac{\Delta N^2}{S}, \quad \Delta(bb) = 2N'\frac{\Delta N'}{S} + \frac{\Delta N'^2}{S}, \quad \Delta(cc) = 0$$
$$\Delta(ab) = N'\frac{\Delta N}{S} + N\frac{\Delta N'}{S} + \frac{\Delta N \Delta N'}{S}, \quad \Delta(bc) = N''\frac{\Delta N'}{S} \quad \Delta(cd) = 0$$
$$\Delta(ac) = N''\frac{\Delta N}{S} \quad \Delta(bd) = N'''\frac{\Delta N'}{S} \quad \text{etc.}$$
$$\Delta(ad) = N'''\frac{\Delta N}{S} \quad \text{etc.} \quad \Delta(cl) = 0$$
$$\text{etc.} \quad \Delta(bl) = -\frac{\Delta N'}{S}\theta \quad \text{etc. etc.}$$
$$\Delta(al) = -\frac{\Delta N}{S}\theta$$

und setzt man jetzt zur Abkürzung

$$\varrho = \frac{x\Delta N + x'\Delta N'}{S}$$

so findet man mit Zuziehung der Gleichung (64)

$$F = (N + \Delta N)\varrho$$
$$F' = (N' + \Delta N')\varrho$$
$$F'' = N''\varrho$$
$$F''' = N'''\varrho$$

u. s. w. die in die (66) zu setzen sind. Setzt man hiemit zugleich

$$\varDelta x' = \varDelta x + z\,, \quad \varDelta x'' = \varDelta x + z'\,, \text{ etc.}$$

wo z, z', etc. unbestimmte Grössen sind, so erhält man nach einer leichten Reduction

$$\begin{aligned}
&(N + \varDelta N)\,\frac{\Sigma N + \varDelta N + \varDelta N'}{S}\,\varDelta x \\
&+ [(ab) + \varDelta(ab)]z + [(ac) + \varDelta(ac)]z' + \ldots + (N + \varDelta N)\varrho = 0 \\
&(N' + \varDelta N')\,\frac{\Sigma N + \varDelta N + \varDelta N'}{S}\,\varDelta x \\
&+ [(bb) + \varDelta(bb)]z + [(bc) + \varDelta(bc)]z' + \ldots + (N' + \varDelta N')\varrho = 0 \\
&N''\,\frac{\Sigma N + \varDelta N + \varDelta N'}{S}\,\varDelta x + [(bc) + \varDelta(bc)]z + (cc)z' + \ldots + N''\varrho = 0 \\
&\text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

die auf den ersten Blick zeigen, dass ihnen nur durch

$$z = z' = \text{etc.} = 0$$

Gnüge geleistet werden kann, und dass sie

$$\varDelta x = \varDelta x' = \varDelta x'' = \text{etc.} = -\frac{x\varDelta N + x'\varDelta N'}{\Sigma N + \varDelta N + \varDelta N'}$$

geben. Man sieht leicht ein, dass je zwei Aenderungen $\varDelta N$ ein analoges Resultat geben müssen, und da in den Ausdrücken der Coefficienten der Gleichungen (61) die N nur in zwei Dimensionen vorkommen, so muss die Betrachtung der gleichzeitigen Aenderungen aller N auch ein analoges Resultat geben. Ferner ist in Folge des Vorhergehenden leicht einzusehen, dass die Hinzufügung einer Aenderung von S dieses Resultat nicht ändern kann.

Die vorhergehenden Entwickelungen geben daher zu erkennen, dass irgend welche Aenderungen, die man mit N, N', N'', etc. und S vornimmt, höchstens die Werthe der x, x', x'', etc. um eine und dieselbe Grösse ändern können, und folglich ohne Einfluss auf die Winkel sind. Auch findet man durch die (65), gleichwie oben, dass immer diese gemeinschaftliche Aenderung der x, x', etc. die nemliche Aenderung im entgegengesetzten Sinne in den Werthen der u, $u_{,}$, $u_{,,}$, etc. hervorbringt.

Da demzufolge die Aggregate $x + u$, $x' + u$, etc. $x + u_{,}$, $x' + u_{,}$, etc. etc. unverändert bleiben, so folgt aus dem Ausdruck für W, dass diese Grösse stets unverändert bleibt, und also ein absolutes Minimum ist.

Es ist aber hiebei zu bedenken, dass man die N nicht alle gleich Null, und S nicht unendlich gross machen darf, weil dadurch bewirkt

werden würde, dass von den Gleichungen (61) jede in den übrigen enthalten wäre.

75.

Da dem Vorhergehenden zufolge die N, N', N'', etc. und S mit der eben angegebenen Ausnahme völlig willkührlich sind, so kann man sie anwenden, um aus den Gleichungen (61) möglichst viele Glieder fortzuschaffen, wodurch die Rechnung vereinfacht wird. Dass man von den mit denselben zwei Buchstaben bezeichneten Coefficienten keinen fortschaffen darf, zeigt schon die vorhergehende Auflösung der allgemeinen Aufgabe dadurch, dass diese Coefficienten in den Nennern der verschiedenen Ausdrücke eintreten, auch würden dadurch die N imaginäre Werthe bekommen. Aber von den anderen Coefficienten der (61) darf man so viele fortschaffen wie überhaupt möglich ist, und da die Anzahl der N der Anzahl der x gleich ist, so kann man im Allgemeinen, wenn man wieder die Anzahl der x mit n bezeichnet, n Coefficienten, oder Glieder, gleich Null machen, und zwar kann dieses auf vielerlei Arten geschehen.

Eine Art n Glieder fortzuschaffen besteht darin, dass man im Voraus annimmt, dass der Werth irgend einer der x gleich Null werden soll. Sei z. B.

$$x = 0$$

dann giebt die erste Gleichung (58) die Bedingungsgleichung

$$pu + p_{,}u'_{,} + p_{,,}u_{,,} + \ldots = (lx)$$

und vergleicht man diese mit der (56), so werden

$$H = p,\quad J = p_{,},\quad K = p_{,,},\ \text{etc.}\quad H' = J' = K' = \text{etc.} = 0,\quad \theta = (lx)$$

Die Substitution dieser in die Ausdrücke für N, N', etc. des Art. 69 giebt

$$N = (pp),\quad N' = (pp'),\quad N'' = (pp''),\ \text{etc.}\quad S = (pp)$$

womit man die folgenden Ausdrücke der Coefficienten der (61) bekommt,

$$\begin{array}{ll}
(aa) = Q\,, & (bb) = Q' + \frac{(pp')^2}{(pp)} - (p'p') \\
(ab) = 0\,, & (bc) = \frac{(pp')(pp'')}{(pp)} - (p'p'') \\
(ac) = 0\,, & (bd) = \frac{(pp')(pp''')}{(pp)} - (p'p''') \\
(ad) = 0\,, & \\
\text{etc.} & \text{etc.} \\
(al) = 0\,, & (bl) = (lx') - \frac{(pp')}{(pp)}(lx)
\end{array}$$

$$(cc) = Q'' + \frac{(pp'')^2}{(pp)} - (p''p'') \quad , \quad (dd) = Q''' + \frac{(pp''')^2}{(pp)} - (p'''p''')$$

$$(cd) = \frac{(pp'')(pp''')}{(pp)} - (p''p''') \quad ,$$

etc.

$$(cl) = (lx'') - \frac{(pp'')}{(pp)}(lx) \quad , \quad (dl) = (lx''') - \frac{(pp''')}{(pp)}(lx)$$

u. s. w. Die Gleichungen (61) werden hierauf

$$\begin{array}{ll} Qx & = 0 \\ (bb)x' + (bc)x'' + (bd)x''' + \ldots & = (bl) \\ (bc)x' + (cc)x'' + (cd)x''' + \ldots & = (cl) \\ (bd)x' + (cd)x'' + (dd)x''' + \ldots & = (dl) \end{array}$$

u. s. w. woraus $x = 0$ folgt, wie im Voraus bestimmt wurde. Der Art. 70 giebt in diesem Falle

$$W = (ll,n) + \frac{(lx)^2}{(pp)}$$

76.

Das im vor. Art. entwickelte Verfahren ist nicht das zweckmässigste zur Anwendung, denn es ist gar kein reeller Gewinn darin enthalten, dass im ersten Theile der Auflösung die Verbesserung einer der beobachteten Richtungen Null wird. Die Bedingung, die hier dazu angewandt worden ist um (al) Null zu machen, kann zweckmässiger dazu verwandt werden um noch einen Coefficienten einer der Unbekannten z. B. $(bc) = 0$ zu machen, denn hieraus entstehen im Verlaufe der Auflösung wesentliche Vereinfachungen, die darin bestehen, dass eine Anzahl anderer, sonst auch zu berechnender Grössen, zugleich Null werden.

Es sollen daher jetzt die Coefficienten

$$(ab)\,,\ (ac)\,,\ (ad)\,,\ \text{etc. nebst } (bc)$$

gleich Null gemacht werden, deren Anzahl n ist. Da auch S willkührlich ist, so scheint es als könne man noch einen Coefficienten Null machen, allein die Ausdrücke der Coefficienten (aa), (ab), etc. des Art. 69 zeigen, dass dieses unmöglich ist, indem sie alle zu Functionen von $\frac{N}{\sqrt{S}}$, $\frac{N'}{\sqrt{S}}$, etc. und $\frac{\theta}{\sqrt{S}}$ gemacht werden können, wodurch S gänzlich aus denselben entfernt werden kann. Es soll daher zur Vereinfachung

$$S = 1$$

gesetzt werden. Die Grösse θ giebt Veranlassung ausser den oben genannten Coefficienten der Unbekannten auch eins der völlig bekannten Glieder (al), (bl), etc. Null machen zu können, aber da daraus kein reeller Vortheil erwächst, im Gegentheil die Ausdrücke dieser Coefficienten mehr zusammengesetzt werden, so mache ich von diesem Umstande keinen Gebrauch, sondern setze vielmehr

$$\theta = 0$$

Die hierauf zu berechnenden Ausdrücke sind demnach zuerst die (pp), (pp'), etc. $(p'p')$, etc. etc. nach den im Art. 69 gegebenen Ausdrücken. Da nun

$$NN' = (pp')$$
$$NN'' = (pp'')$$
$$NN''' = (pp''')$$
etc.

und

$$N'N'' = (p'p'')$$

werden müssen, so bekommt man

$$N = \sqrt{\frac{(pp')(pp'')}{(p'p'')}}, \qquad N''' = \frac{(pp''')}{N}$$
$$N' = \sqrt{\frac{(pp')(p'p'')}{(pp'')}}, \qquad N^{iv} = \frac{(pp^{iv})}{N}$$
$$N'' = \sqrt{\frac{(pp'')(p'p'')}{(pp')}}, \qquad N^{v} = \frac{(pp^{v})}{N}$$
etc.

die auch zu berechnen sind. Alsdann werden

$$(aa) = Q + N^2 - (pp),$$
$$(ab) = 0$$
$$(ac) = 0$$
$$(ad) = 0$$
$$(ae) = 0$$
etc.
$$(al) = (lx)$$

$$(bb,1) = Q' + N'^2 - (p'p')$$
$$(bc,1) = (bc) = 0$$
$$(bd,1) = N'N''' - (p'p''')$$
$$(be,1) = N'N^{iv} - (p'p^{iv})$$
etc.
$$(bl,1) = (lx')$$

$$(cc,2) = Q'' + N''^2 - (p''p'')$$
$$(cd,2) = N''N''' - (p''p''')$$
$$(ce,2) = N''N^{iv} - (p''p^{iv})$$
etc.
$$(cl,2) = (lx'')$$

$$(dd,1) = Q''' + N'''^2 - (p'''p''')$$
$$(de,1) = N'''N^{iv} - (p'''p^{iv})$$
etc.
$$(dl,1) = (lx''')$$

$(ee,1) = Q^{iv} + N^{iv\,2} - (p^{iv}p^{iv})$
etc.
$(el,1) = (lx^{iv})$

etc. bis

$$
\begin{aligned}
(ll) = {} & pl^2 + p'l'^2 + p''l''^2 + p'''l'''^2 + \ldots \\
& + p_{,}l_{,}^2 + p'_{,}l'^2_{,} + p''_{,}l''^2_{,} + p'''_{,}l'''^2_{,} + \ldots \\
& + p_{,,}l_{,,}^2 + p'_{,,}l'^2_{,,} + p''_{,,}l''^2_{,,} + p'''_{,,}l'''^2_{,,} + \ldots \\
& + p_{,,,}l_{,,,}^2 + p'_{,,,}l'^2_{,,,} + p''_{,,,}l''^2_{,,,} + p'''_{,,,}l'''^2_{,,,} + \ldots \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

welche letzte Function zur gleichzeitigen Berechnung von W dient, und mit welcher

$$W = (ll,n)$$

erhalten wird. Die aufzulösenden Gleichungen (61) gehen hiemit in die folgenden über,

$$
\begin{aligned}
&(aa)x && && && && = (al) \\
&(bb,1)x' && && + (bd,1)x''' && + (be,1)x^{iv} && + \ldots = (bl,1) \\
& && (cc,2)x'' && + (cd,2)x''' && + (ce,2)x^{iv} && + \ldots = (cl,2) \\
&(bd,1)x' && + (cd,2)x'' && + (dd,1)x''' && + (de,1)x^{iv} && + \ldots = (dl,1) \\
&(be,1)x' && + (ce,2)x'' && + (de,1)x''' && + (ee,1)x^{iv} && + \ldots = (el,1) \\
& && \text{etc.} && && && \text{etc.}
\end{aligned}
$$

die auf die vorbeschriebene Art in der Auflösung zu behandeln sind. Es kann noch angemerkt werden, dass in Folge der fehlenden Coefficienten derselben von den Hülfsgrössen des Art. 43

$$\alpha' = \beta' = \gamma' = \delta' = \text{etc.} = \beta'' = 0$$

werden, so wie dass von denen des Art. 44

$$\alpha'' = \alpha''' = \alpha^{iv} = \text{etc.} = 0$$

werden, und die übrigen die folgenden Ausdrücke erhalten,

$$
\begin{aligned}
\beta'' &= \gamma'' \\
\hline
\beta^{iv} &= \delta'' + \delta^{iv}\beta''' \\
\gamma^{iv} &= \delta''' + \delta^{iv}\gamma''' \\
\hline
\beta^{v} &= \varepsilon'' + \varepsilon^{iv}\beta''' + \varepsilon^{v}\beta^{iv} \\
\gamma^{v} &= \varepsilon''' + \varepsilon^{iv}\gamma''' + \varepsilon^{v}\gamma^{iv} \\
\delta^{v} &= \varepsilon^{iv} + \varepsilon^{v}\delta^{iv} \\
\hline
& \text{etc.}
\end{aligned}
$$

worauf die Ausdrücke der Unbekannten

$$\begin{aligned}
-x &= \chi' \\
-x' &= \chi'' + \chi^{IV}\beta''' + \chi^{V}\beta^{IV} \\
-x'' &= \chi''' + \chi^{IV}\gamma''' + \chi^{V}\gamma^{IV} \\
-x''' &= \chi^{IV} + \chi^{V}\delta^{IV} \\
-x^{IV} &= \chi^{V} \\
&\text{etc.} \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

sich ergeben. Die vorbeschriebenen Rechnungen können durch die folgenden Gleichungen, die aus dem Art. 71 hervorgehen, geprüft und wo nöthig berichtigt werden. Die (pp), (pp'), etc. durch

$$\begin{aligned}
(pp) + (pp') + (pp'') + \ldots &= Q \\
(pp') + (p'p') + (p'p'') + \ldots &= Q' \\
(pp'') + (p'p'') + (p''p'') + \ldots &= Q'' \\
\text{etc.} \qquad &\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

die (aa), $(bb,1)$ etc. durch

$$\begin{aligned}
(aa) &= N\Sigma N \\
(bb,1) + (bd,1) + \ldots &= N'\Sigma N \\
(cc,2) + (cd,2) + \ldots &= N''\Sigma N \\
(bd,1) + (cd,2) + (dd,1) + \ldots &= N'''\Sigma N \\
\text{etc.} \qquad &\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

und die Werthe der Unbekannten selbst durch

$$0 = Nx + N'x' + N''x'' + N'''x''' + \ldots$$

die aus dem Art. 72 hervorgeht. Will man hierauf auch die Werthe der u, $u_{,}$, etc. kennen lernen, so dienen hiezu die Gleichungen (65). Wenn eine oder mehrere der (pp'), (pp''), $(p'p'')$ Null werden, so können durch die obigen Ausdrücke die N, N', N'' nicht berechnet werden, aber in diesem Falle kann man durch Abänderung der Reihenfolge, in welcher man anfänglich die Richtungen aufgestellt hat, immer diese Bestimmung wieder möglich machen.

Das eben entwickelte Verfahren den ersten Theil der Auflösung unserer Aufgabe, oder die sogenannte »Ausgleichung auf den Stationen« zu behandeln, bewirkt nicht nur an sich selbst ein kurzes Verfahren, dessen richtige numerische Ausführung durch die zur Controle derselben vorhandenen Gleichungen gesichert wird, sondern die zum Verschwinden gebrachten Coefficienten üben auch auf den zweiten Theil der Auflösung

in Bezug auf die Abkürzung desselben wesentliche Wirkung aus, indem sie bewirken, dass auch dort eine Anzahl von Gliedern verschwinden.

77.

Die Ausdrücke des vor. Art. führen in zwei verschiedenen Fällen die allgemeine Aufgabe, auch in ihrer Anwendung auf die Geodäsie, auf den im Art. 55 betrachteten speciellen Fall zurück. Der eine dieser Fälle tritt jedes Mal auf den Stationen ein, auf welchen nur drei Richtungen eingeschnitten worden sind, denn kürzt man die Gleichungen auf diesen Fall ab, so werden sie

$$x = \frac{(al)}{(aa)} = \frac{(lx)}{(aa)}$$
$$x' = \frac{(bl,1)}{(bb,1)} = \frac{(lx')}{(bb,1)}$$
$$x'' = \frac{(cl,2)}{(cc,2)} = \frac{(lx'')}{(cc,2)}$$

wo

$$(aa) = Q + N^2 - (pp) = N(N+N'+N'')$$
$$(bb,1) = Q' + N'^2 - (p'p') = N'(N+N'+N'')$$
$$(cc,2) = Q'' + N''^2 - (p''p'') = N''(N+N'+N'')$$

sind, und

$$\begin{array}{ccc} (pp), & (pp'), & (pp'') \\ & (p'p'), & (p'p'') \\ & & (p''p'') \end{array}$$

so wie N, N', N'' eben so wie im allgemeinen Falle zu berechnen sind.

Alle mit α, β, γ, etc. und angehängten Strichen bezeichneten Grössen werden hier Null, und zur Berechnung der Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Fehlerquadrate ergiebt sich aus dem Vorhergehenden

$$W = (ll,3) = (ll) - x(lx) - x'(lx') - x''(lx'')$$

Die allgemeinen Bedingungsgleichungen für die (pp), (pp'), etc. und für die Unbekannten selbst bestehen auch hier.

78.

Der zweite Fall, in welchem die allgemeinen Formeln von selbst in den genannten speciellen Fall übergehen, findet auf allen Stationen statt, auf welchen in jedem Gyrus alle vorhandenen Richtungen eingeschnitten

worden sind, und man in jedem Gyrus für sich allen Beobachtungen dasselbe Gewicht beilegen kann. Da in diesem Falle

$$p = p' = p'' = \text{etc.}$$
$$p_{,} = p'_{,} = p''_{,} = \text{etc.}$$
$$p_{,,} = p'_{,,} = p''_{,,} = \text{etc.}$$

u. s. w. ist, so giebt die Gleichung (9) schon zu erkennen, dass

$$x = \frac{(lx)}{p+p_{,}+p_{,,}+\dots}, \quad x' = \frac{(lx')}{p+p_{,}+p_{,,}+\dots}, \quad x'' = \frac{(lx'')}{p+p_{,}+p_{,,}+\dots}$$

u. s. w. werden müssen, und die allgemeinen Ausdrücke des vorvor. Art. bestätigen nicht nur dieses, sondern weisen auch nach, dass in der That der genannte specielle Fall eintritt. Bezeichnet man wieder mit n die Summe aller Richtungen, so werden jetzt

$$P = np, \quad P_{,} = np_{,}, \quad P_{,,} = np_{,,}, \text{ etc.}$$
$$Q = Q' = Q'' = \text{etc.} = p + p_{,} + p_{,,} + \dots$$

und Folge davon ist, dass sich

$$(pp) = (pp') = (pp'') = \text{etc.} = \frac{Q}{n}$$
$$(p'p') = (p'p'') = \text{etc.} = \frac{Q}{n}$$
$$(p''p'') = \text{etc.} = \frac{Q}{n}$$
$$\text{etc.}$$

und

$$N = N' = N'' = \text{etc.} = \sqrt{\frac{Q}{n}}$$

ergeben, die Coefficienten der Endgleichungen werden daher

$$(aa) = (bb,1) = (cc,2) = \text{etc.} = Q$$

und alle übrigen Coefficienten derselben werden Null. Diese Gleichungen gehen daher über in

$$Qx = (lx), \quad Qx' = (lx'), \quad Qx'' = (lx''), \text{ etc.}$$

woraus

$$x = \frac{(lx)}{p+p_{,}+p_{,,}+\dots}$$
$$x' = \frac{(lx')}{p+p_{,}+p_{,,}+\dots}$$
$$x'' = \frac{(lx'')}{p+p_{,}+p_{,,}+\dots}$$

u. s. w. hervorgehen, w. z. b. w.

Wenn alle Gewichte einander gleich gesetzt werden dürfen, so gehen diese Ausdrücke in die arithmetischen Mittel aus den Beobachtungen einer jeden Richtung über.

Alle mit α, β, γ, etc. bezeichneten Grössen werden wieder Null, und ausserdem noch

$$(ll,n) = 0$$

Diese Resultate gelten wie gross auch die Anzahl der Richtungen ist, die den Forderungen dieses Artikels gemäss eingeschnitten worden sind.

79.

Zu den speciellen Fällen die vorkommen können gehört noch, abgesehen von den in den beiden nächstvorhergehenden Artikeln betrachteten, der Fall, dass auf der einen oder anderen Station mit den Richtungen nach den Dreieckspunkten zugleich Richtungen nach anderen Gegenständen, die keinen Dreieckspunkten angehören, beobachtet worden sind. Es können z. B. die Azimuthe dieser Gegenstände genau bestimmt sein, und man will sich derselben daher zur Orientirung des Dreiecksnetzes bedienen; es können auch andere Ursachen die Mitbestimmung solcher Punkte veranlasst haben, wie man weiter unten sehen wird.

Um in diesem Falle die Rechnungen möglichst abzukürzen, ist nichts weiter zu thun wie diese überzähligen Richtungen, wie ich sie nennen will, aus der natürlichen Reihenfolge der Richtungen auszuheben und ihnen die letzten Stellen in der Reihenfolge aller Richtungen der betreffenden Station zuzutheilen. Die Berechnung ist darauf eben so wie sonst auszuführen, und man erlangt durch diese Anordnung den Vortheil, dass in dem zweiten Theil der Auflösung diese überzähligen Richtungen so wenig wie möglich eintreten.

80.

Betrachten wir nun wieder den allgemeinen Fall, den auch der vor. Art. in sich schliesst, in welchem nicht jeder Gyrus, oder kein Gyrus, alle Richtungen enthält, dann sind zuerst in den Ausdrücken für (pp), (pp'), etc. die Gewichte der fehlenden Einstellungen Null zu machen, und demgemäss die numerischen Werthe dieser Grössen zu berechnen. Wenn die Beobachtungen so beschaffen sind, dass man die

Gewichte aller Einstellungen auf der Station einander gleich, und in Folge dessen = 1 setzen kann, (und dieser Fall kommt gewöhnlich vor, weil man selten im Stande ist etwaige Unterschiede in der Güte der Beobachtungen hinreichend genau durch Zahlen ausdrücken zu können,) so werden die Bedeutungen der Hülfsgrössen einfacher als im Art. 67 angegeben ist. Es werden alsdann

P die Anzahl der Einstellungen des ersten Gyrus,
$P_{,}$ » » » » » zweiten »

u. s. w.

Q die Anzahl der Einstellungen der Richtung x,
Q' » » » » » » x',

u. s. w.

(lu) die Summe der im ersten Gyrus durch die Einstellungen erhaltenen Werthe,
$(lu_{,})$ die Summe der im zweiten Gyrus durch die Einstellungen erhaltenen Werthe,

u. s. w.

(lx) die Summe der für x durch die Einstellungen erhaltenen Werthe,
(lx') » » » » x' » » » » »

u. s. w. Mit Rücksicht auf diese Bedeutungen der Hülfsgrössen ist es immer leicht die Werthe der Coefficienten (aa), etc. zu berechnen, aber es ist die Berechnung derselben gar nicht schwieriger, wenn p, $p_{,}$, etc. etc. verschiedene Werthe haben, vorausgesetzt dass diese ganze Zahlen sind, und diesen Fall kann man oft herbeiführen, und zur Abkürzung der Rechnung benutzen.

Wenn auf einer Station viele Gyri beobachtet worden sind, so wird es nicht ausbleiben, dass eine Anzahl von Gyri vorkommen, in welchen dieselben Punkte eingeschnitten worden sind, eine andere Anzahl in welchen ganz oder zum Theil andere Punkte, aber wieder in jedem Gyrus dieselben, u. s. w. Vorausgesetzt nun, dass man das Gewicht einer jeden Einstellung = 1 setzt, kann man aus jeder dieser Gruppen von Gyris zuerst das arithmetische Mittel nehmen, und dieses in der folgenden Rechnung so behandeln, als wäre dessen Gewicht gleich der Anzahl der Gyri, aus welchen es entstanden ist. Man kürzt dadurch die Rechnung wesentlich ab, ohne an der Strenge derselben etwas zu vergeben. Die so entstehenden Gewichte sind selbstverständlich ganze Zahlen, und es sind nun mit Rücksicht auf diese die Hülfsgrössen zu

berechnen. Wenn z. B. die erste Gruppe das arithmetische Mittel aus m Gyris ist, so setze man

$$p = p' = p'' = \text{etc.} = m\,, \quad \text{und} \quad P = \mu m$$

wenn μ die Anzahl der Richtungen ist, die in diesen Gyris eingeschnitten worden sind, u. s. w. Wenn in den Gyris, in welchen x vorkommt, diese Gewichte

$$p = m\,, \quad p_{,} = m_{,}\,, \quad p_{,,} = m_{,,}\,, \text{ etc.}$$

sind, so wird

$$Q = m + m_{,} + m_{,,} + \ldots$$

u. s. w. und auf ähnliche Art verfährt man bei der Berechnung der mit (lx), etc. und (pp), etc. bezeichneten Grössen. Man kann hiebei noch bemerken, dass man durch die im Art. 68 gegebenen Gleichungen

$$P + P_{,} + P_{,,} + \ldots = Q + Q' + Q'' + \ldots$$
$$(lx) + (lx') + (lx'') + \ldots = 0$$

eine Controle der numerischen Rechnung erhält. Man braucht hier nicht die Division, die zur Erlangung des arithmetischen Mittels erforderlich ist, auszuführen, sondern kann sogleich die Summe dieser Gyri ansetzen, die unmittelbar zur Berechnung der mit (lx), (lx'), etc. bezeichneten Grössen dienen.

81.

Es ist hier der Ort die Betrachtung des Falles einzuschalten, in welchem nicht die Richtungen, sondern statt dessen unmittelbar die Winkel zwischen den Dreieckspunkten beobachtet worden sind. Es kann dieser Fall wohl noch hie und da bei neueren Triangulationen vorkommen, aber wenn man ältere Triangulationen zu berechnen oder zu untersuchen hat, so findet man denselben immer vor.

Nehmen wir zuerst den Fall an, dass nur die von einander unabhängigen Winkel auf der Station beobachtet sind, so hindert nichts die durch diese Beobachtungen erhaltenen Werthe derselben mit y, y', y'', etc. zu bezeichnen, und hiemit wird die Aufgabe sofort auf den speciellen Fall des Art. 55 hingeführt. Da jetzt sehr wohl die verschiedenen Winkel verschiedene Gewichte haben können, indem die Beobachtung des einen mehrmals wiederholt worden sein kann wie die irgend eines anderen; so sind demgemäss die a. a. O. vorkommenden, mit p, p', p'', bezeichneten Gewichte zu bestimmen.

Nehmen wir dagegen an, dass ausser den einzelnen Winkeln auch Winkel beobachtet worden sind, in welchen jene enthalten sind, wie die Ergänzung aller übrigen Winkel zum Umkreise, oder Summen zweier oder mehrerer einzelner Winkel, so entstehen hieraus Bedingungsgleichungen, die nicht zu denen gehören, die das Dreiecksnetz an sich darbietet, und die ich daher locale Bedingungsgleichungen nennen will. Verweist man diese Bedingungsgleichungen in den zweiten Theil der allgemeinen Auflösung, wie bisher immer geschehen ist, so bleibt der specielle Fall des Art. 55 zwar bestehen, aber der zweite Theil der Auflösung wird unnöthigerweise verlängert. Da aber die Berechnung dieses zweiten Theils, in den Fällen, wo die Anzahl der Bedingungsgleichungen gross ist, bei Weitem die grössere Arbeit bei der Ausgleichung der Beobachtungen eines Dreiecksnetzes verursacht, so ist es von wesentlichem Vortheil diesen nicht unnöthiger Weise zu verlängern. Die Aufnahme der localen Bedingungsgleichungen in diesen zweiten Theil der Auflösung ist aber eine unnöthige Verlängerung desselben, da sie auf einfache Weise in dem ersten Theile berücksichtigt werden können. Zwar hört alsdann die Auflösung auf, in Bezug auf die betreffenden Stationen, dem speciellen Falle des Art. 55 anzugehören, aber die kleine Vermehrung des ersten Theils der Auflösung, die dadurch entsteht, wird bei Weitem durch die Abkürzung des zweiten Theils aufgewogen.

Man kann jeden gemessenen Winkel in zwei Richtungen zerlegen, oder als den Unterschied von zwei Richtungen betrachten, von welchen die eine ganz willkührlich ist. Jeder gemessene Winkel lässt sich daher wie ein Gyrus von zwei Richtungen betrachten, und stellt man alle auf einer Station beobachteten Winkel in dieser Form auf, und löst die dadurch erhaltenen Gleichungen den Erklärungen des Vorhergehenden gemäss auf, so ergeben sich die Werthe von y, y', y'', etc. in welchen die localen Bedingungsgleichungen volle Berücksichtigung erfahren haben, und daher im zweiten Theil der Auflösung nicht beachtet zu werden brauchen.

Man kann hiebei noch Folgendes bemerken. Nimmt man die vorläufigen Werthe der den unabhängigen Winkeln entsprechenden Richtungen so an, dass sie den Beobachtungen vollständig entsprechen, so werden alle diesen Richtungen zukommenden Werthe der mit l bezeichneten Grössen gleich Null, und in so fern keine abhängigen Winkel auf der betreffenden Station beobachtet worden sind, führt die im Vorher-

gehenden erklärte Auflösung unmittelbar auf die Werthe $y = 0$, $y' = 0$, $y'' = 0$, etc., wodurch der specielle Fall des Art. 55 wieder herbei geführt ist. Sind aber auf dieser Station auch abhängige Winkel beobachtet, dann werden in den aus diesen entspringenden Gyri die beiden dazu gehörigen l nicht gleich Null, und die aus der Auflösung aller Gleichungen hervorgehenden Werthe von y, y', etc. werden im Allgemeinen auch nicht mehr gleich Null.

82.

Ehe ich zur Anwendung des zweiten Theils der allgemeinen Auflösung auf die Geodäsie übergehe, will ich das Vorhergehende durch ein Beispiel erläutern, welches ich aus der von mir vor ohngefähr 30 Jahren zum Zweck einer staatsöconomischen Landesvermessung ausgeführten Triangulation des hiesigen Herzogthums entlehne. Selbstverständlich würde es zu weit führen, wenn ich hier diese ganze Triangulation anführen und berechnen wollte, ich muss mich damit begnügen aus derselben einige zusammenhängende Dreiecke auszuwählen, und die Berechnung dieser, als ein Ganzes betrachtet, zu zeigen.

Es wurden bei dieser Triangulation auf allen Stationen nicht die Winkel für sich, sondern die Richtungen eingeschnitten und beobachtet, und da auf fast jeder Station eine grosse Anzahl von Punkten einzuschneiden war, so wurden in keinem Gyrus Alle eingeschnitten, sondern, wie im Art. 64 erklärt worden ist, verfahren, und möglichst viele Combinationen der einzuschneidenden Punkte gebildet, deren jede einen Gyrus bildete. Da demzufolge die oft genannte Gaussische Auflösung auf die Berechnung dieses Dreiecksnetzes nicht angewandt werden konnte, so entwarf ich schon damals die hier erklärte, wandte sie bei der Berechnung an, und veröffentlichte die Endformeln ohne deren Ableitung im 16. Bande der Schum. A. N.

Ich führe noch an, dass zu dieser Triangulation blos 8zöllige Theodoliten angewandt wurden, deren Nomen unmittelbar 10″ gaben.

83.

Aus der oben genannten Triangulation werde ich nun für das hier zu berechnende Beispiel die fünf Stationen, oder Dreieckspunkte, Seeberg, Inselsberg, Wachsenburg, Warte, Hörselsberg auswählen und berechnen.

Ich bemerke hiezu im Voraus, dass die Bezeichnung der Richtungen und anderer in Betracht kommenden Grössen mit Buchstaben, wie im Vorhergehenden geschehen ist, wohl in der Ableitung der Relationen, auf die die Auflösung der Aufgabe führt, zweckmässig ist, dass man sich aber in der Anwendung, und namentlich bei grossen Triangulationen, weit zweckmässiger der Zahlen zur Bezeichnung bedient. Es sollen daher auch hier diese und zwar so angewandt werden, dass nicht nur jede Station, sondern auch jede Richtung mit einer Zahl bezeichnet wird. Die oben genannten fünf Stationen werde ich mit (1), (2), (3), (4), (5) bezeichnen, so dass

Seeberg . . . (1)
Warte . . . . (2)
Inselsberg . . . (3)
Wachsenburg . . (4)
Hörselsberg . . (5)

zur Bezeichnung erhält. Die Richtungen nach den Dreieckspunkten werde ich gleichfalls mit den fortlaufenden Zahlen so bezeichnen, dass auf jeder Station mit der (1) angefangen wird. Wo es nöthig wird die Stationen zu unterscheiden, kann die Stationsnummer der Richtungsnummer rechts unten als Index angehängt werden, so dass allgemein $(r)_s$, wo r die Richtungsnummer und s die Stationsnummer bedeutet, die Bezeichnung irgend einer Richtung wird. Ins Besondere sollen im Folgenden

$(r)_s$ der vorläufig angenommene Werth irgend einer Richtung

$w(r)_s$ die im ersten Theile der Auflösung zu berechnende Verbesserung derselben,

$y(r)_s$ der hieraus folgende Werth derselben bedeuten, so dass

$$y(r)_s = (r)_s + w(r)_s$$

wird. Die Coefficienten (aa), (ab), etc. (bb), etc. des Vorhergehenden sollen, in so weit sie Dreieckspunkten angehören, mit

$$(1,1)_s\,,\quad (1,2)_s\,,\ \text{etc.}\quad (2,2)_s$$

bezeichnet, und überhaupt diese Bezeichnungsart auch auf andere Grössen ausgedehnt werden. Im ersten Theile der Auflösung wird man den Index s grösstentheils weglassen können, und nur bei jeder Station allgemein angeben.

84.

Mit der Station Seeberg = (1) anfangend, werde ich mit Weglassung der Stationsnummer den hier von den dort überhaupt beobachteten Richtungen aufzunehmenden die folgenden Bezeichnungen geben,

(1)	=	Richtung	nach	Station	(3)
(2)	=	»	»	»	(5)
(4), (3)	=	»	»	»	(2)
(3), (4)	=	»	»	»	(4)
(a)	=	»	nach Trügleben		
(b)	=	»	»	kl. Rettbach.	

Die Richtungen (*a*) und (*b*), die hier mit aufgenommen worden sind, gehören keinem der übrigen hier in Betracht zu ziehenden Dreieckspunkten an, und es tritt daher hier der Fall ein, der im Art. 79 erläutert wurde. Diese beiden Richtungen habe ich, wie dort vorgeschrieben wurde, aus ihrer natürlichen Reihenfolge herausgenommen, und den übrigen nachgestellt. Es ist nothwendig zu erklären, weshalb diese beiden Richtungen hier mit aufgenommen worden sind.

Statt auf dem Dache der vormaligen Sternwarte auf dem Seeberge zu beobachten, wie früher geschehen ist, zog ich vor die Theodoliten auf in die Erde eingemauerte Steinpfeiler aufzustellen, da aber hier das neben liegende Gebäude der Sternwarte fast 180° des Horizonts verdeckte, so mussten zwei solcher Steinpfeiler, einer nördlich und einer südlich vom Gebäude angewandt werden. Um unter diesen Umständen eine sichere Verbindung zwischen den von jedem dieser beiden Standpunkte aus beobachteten Richtungen herzustellen, wurden mehrere Gegenstände aufgesucht, die auf beiden Standpunkten sichtbar waren, und häufig mit eingeschnitten. Solche sind die oben mit (*a*) und (*b*) bezeichneten. Die Wachsenburg war übrigens auch von beiden Standpunkten aus sichtbar.

Da hier nicht bezweckt wird, die definitive Berechnung dieser Triangulation zu geben, sondern einen Auszug aus derselben als Erläuterung des Vorhergehenden aufzustellen, so halte ich es nicht für nothwendig die Beobachtungen jedes einzelnen Gyrus anzugeben, sondern begnüge mich die Summen der Gruppen, nachdem davon die vorläufig angenommenen Werthe der Richtungen abgezogen worden sind, anzu-

führen. Diese sind, nachdem die erforderlichen Centrirungen berücksichtigt worden waren, nebst den vorläufig angenommenen Werthen der Richtungen in dem folgenden Täfelchen enthalten.

Station (1).

	r	Vorl. Werthe.	Anzahl d. Beob. u. die Summen dieser.				
			9	3	1	2	6
	(1)	63°14′10″	—	5″60	—	—	—
	(2)	96 29 52	—	—	2″40	—	—
(4)	(3)	215 58 17	—	—	—	—	4.00
(3)	(4)	308 51 37	—	—	—	4″60	—
	(a)	106 2 29	3″30	3.85	1.70	3.20	2.20
	(b)	269 57 23	1.60	—	—	—	—
		S =	4.90	9.45	4.10	7.80	6.20
		M =	2.45	4.725	2.050	3.900	3.100

	r	7	9	5	1	2	13	5	1
	(1)	—	—	0″20	—	—	—	—	—
	(2)	—	—	15.25	1″15	—	—	—	—
(4)	(3)	3″80	—	—	—	0″20	—	0″70	3″60
(3)	(4)	—	3″10	—	3.42	3.40	27″60	—	1.55
	(a)	—	—	—	—	—	17.70	13.20	—
	(b)	2.75	1.03	—	—	—	0.80	0.15	3.65
	S	6.55	4.13	15.45	4.57	3.60	46.10	14.05	8.80
	M	3.275	2.065	7.225	2.285	1.800	15.367	4.683	2.933

	r	2	1	2	1	2	1	2	2
	(1)	—	3″65	5″40	5″30	0″00	2″15	—	5″90
	(2)	—	—	4,80	4.35	10.20	—	7″00	2.30
(4)	(3)	1″10	—	—	—	—	—	—	—
(3)	(4)	0.20	—	—	—	—	4.10	0.00	0,62
	(a)	4.50	7.70	3.40	—	7.88	3.30	3.20	4.60
	(b)	—	2.12	—	3.05	1.70	6.10	7.00	—
	S	5.80	13.47	13.60	12.70	19.78	15.65	17.20	13.42
	M	1.933	4.490	4.533	4.233	4.945	3.912	4.300	3.355

Ausser den Nummern der Richtungen, und den vorläufigen Werthen derselben giebt diese Tafel in der obersten Zeile die Anzahl der gleichartigen Gyri, deren Summen, nach Abzug der vorläufigen Werthe

darunter stehen. Durch Hinzufügung einer angemessenen Constante zu den Beobachtungen einer jeden Gruppe kann man bewirken, dass jede dieser Summen klein und positiv wird.

Da allen Beobachtungen hier derselbe Werth beigelegt werden wird, so sind die Zahlen der obersten Zeilen zugleich die Gewichte der betreffenden Gruppe von Gyris.

Neben der Bezeichnung S folgt die Summe der Summen jeder Columne, und neben M das arithmetische Mittel derselben.

Es muss nun jedes dieser arithmetischen Mittel von den Zahlen derselben Columne abgezogen werden, und diese Unterschiede dürfen nicht weiter geändert werden. Sie sind in der folgenden Tafel aufgestellt, und zwar in entgegengesetzter Anordnung, nemlich so, dass alle Zahlen, die derselben Gruppe von Gyris angehören, in Einer Zeile stehen. Dieser Tafel sind überdies die Gewichte p, und die Zahlenwerthe P, $P_{,}$, etc. Q, Q', etc. $\frac{p^2}{P}$, $\frac{p_{,}^2}{P'}$, etc. und (lx), (lx'), etc. einverleibt, die nach den im Vorhergehenden dafür entwickelten Regeln berechnet worden sind. Die Gruppen von Gyris habe ich mit laufenden Nummern versehen.

pl'' pl'''

Nr.	pl	pl'	pl''	pl'''	pl^{IV}	pl^{V}	p	P	$p^2:P$
1	—	—	—	—	+0″85	−0″85	9	18	4.5
2	+0″875	—	—	—	−0.875	—	3	6	1.5
3	—	+0″35	—	—	−0.35	—	1	2	0.5
4	—	—	—	+0″70	−0.70	—	3	6	1.5
5	—	—	+0″90	—	−0.90	—	6	12	3.0
6	—	—	+0.525	—	—	−0.525	7	14	3.5
7	—	—	—	+1.035	—	−1.035	9	18	4.5
8	−7.025	+7.025	—	—	—	—	5	10	2.5
9	—	−1.135	—	+1.135	—	—	1	2	0.5
10	—	—	−1.60	+1.60	—	—	2	4	1.0
11	—	—	—	+12.235	+2.332	−14.567	13	39	4.333
12	—	—	−3.983	—	+8.516	−4.533	5	15	1.667
13	—	—	+0.667	−1.383	—	+0.716	1	3	0.333
14	—	—	−0.833	−1.733	+2.566	—	2	6	0.667
15	−0.84	—	—	—	+3.21	−2.37	1	3	0.333
16	+0.866	+0.267	—	—	−1.133	—	2	6	0.667
17	+1.067	+0.416	—	—	—	−1.483	1	3	0.333
18	−4.945	+5.255	—	—	+2.935	−3.245	2	8	0.5
19	−1.763	—	—	+0.488	−0.613	+2.188	1	4	0.25
20	—	+2.70	—	−4.30	−1.10	+2.70	2	8	0.5
21	+2.545	−1.055	—	−2.735	+1.245	—	2	8	0.5
(lx), etc.	−9″220	+13″523	−4″324	+6″742	+15″983	−22″704		195	
Q, etc.	17	16	23	36	52	51			

+6″742 −4″323

36 23

Die Berechnung der (pp), (pp'), etc. gab die nachfolgenden Werthe derselben,

	p	p'	p'' (p''')	p''' (p'')	p^{IV}	p^{V}
p	6.5833	4.5	0	0.75	3.75	1.4167
p'		6.0	0	1.5	2.6667	1.3333
(p''') p''			10.1667	2.0	5.3333	5.5
(p'') p'''				14.0833	7.75	9.9167
p^{IV}					20.4167	12.0833
p^{V}						20.75

Da hier (pp'') und $(p'p'')$ Null sind, so tritt der im Art. 76 vorgesehene Fall ein, dass die Bestimmung der N, N', N'' bei der oben gewählten Reihenfolge der Richtungen unmöglich wird, aber man sieht sogleich, dass die Möglichkeit dieser Bestimmung wieder herbei geführt wird, wenn man die Aufeinanderfolge der Richtungen (3) und (4) umwechselt. Man braucht deshalb die Täfelchen nicht umzuschreiben, sondern die Andeutungen, die ich oben hinzugefügt habe, gnügen vollständig. Nur muss man jetzt die neuen Nummern dieser beiden Richtungen bis ans Ende der ganzen Rechnung unverändert beibehalten. Diesem entsprechend ergaben sich nun die numerischen Werthe der N, N', etc. wie folgt,

$$N = 1.5\,, \quad N' = 3.0$$
$$N'' = 0.5\,, \quad N''' = 0$$
$$N^{IV} = 2.5\,, \quad N^{V} = 0.9444$$

und die der Coefficienten (aa), $(bb,1)$, etc., wobei jedoch zu bemerken ist, dass ich bez. 1, 2, 3, 4, a, b statt a, b, c, d, e, f geschrieben habe, und damit fortfahren werde, da mir in der Anwendung diese Bezeichnung zweckmässiger scheint wie jene, die nur bei der Herleitung der Formeln den Vorzug verdiente. In der Folge muss man daher unter

$$\begin{array}{llllll} (1,1), & (1,l), & (2,2,1), & (2,3,1), & \text{etc.} & (2,l,1) \\ & & (3,3,2), & (3,4,2), & \text{etc.} & (3,l,2) \\ & & & (4,4,3), & \text{etc.} & (4,l,3) \\ & & & & \text{etc.} & \end{array}$$

jene Coefficienten verstehen.

	1	2	3	4	a	b	l
1	12.6667	0	0	0	0	0	— 9″220
2		19.0	0	0	4.8333	1.5	+13.523
3			22.1667	—2.0	—6.5	—9.4444	+ 6.742
4				12.8333	—5.3333	—5.5	— 4.324
a					37.8333	—9.7222	+15.983
b						31.1420	—22.704
l							174.367

Durch die Auflösung der Gleichungen, die von diesen Coefficienten gebildet werden, ergaben sich nach und nach in vollständiger Aufzählung

			χ' +(9.86207)
γ'' 0,	δ'' —(9.40550),	ε'' —(8.89734),	χ'' —(9.85233)
γ''' +(8.95533),	δ''' +(9.46721),	ε''' +(9.62948),	χ''' —(9.48309)
	δ^{IV} +(9.67011),	ε^{IV} +(9.70073),	χ^{IV} +(9.46777)
		ε^{V} +(9.69573),	χ^{V} —(9.60243)
			χ^{VI} +(0.01274)

wo die in Klammern eingeschlossenen Zahlen die Logarithmen sind, ferner

$(1,1)$ 12.6667						$(1,l)$ —9.220
	$(2,2,1)$ 19.0			$(2,a,1)$ +4.8333,	$(2,b,1)$ +1.5,	$(2,l,1)$ +13.523
		$(3,3,2)$ 22.1667,	$(3,4,2)$ —2.0,	$(3,a,2)$ —6.5,	$(3,b,2)$ —9.4444,	$(3,l,2)$ +6.746
			$(4,4,3)$ 12.6528,	$(4,a,3)$ —5.9198,	$(4,b,3)$ —6.3528,	$(4,l,3)$ —3.715
				$(aa,4)$ 31.9281,	$(ab,4)$ —15.8451,	$(al,4)$ +12.782
					$(bb,5)$ 15.9468,	$(bl,5)$ —16.422
						$(ll,6)$ 132.861

und ausserdem noch

$$\beta''' = 0\,,\quad \beta^{IV} = -\,(9.40550)\,,\quad \beta^{V} = -\,(9.31217)$$
$$\gamma^{IV} = +\,(9.52562)\,,\quad \gamma^{V} = +\,(9.80472)$$
$$\delta^{V} = +\,(9.86583)$$

Hieraus erhielt ich die Verbesserungen der Richtungen und die Werthe derselben nach der Ausgleichung auf der Station wie folgt:

$$\begin{aligned} w(1) &= -\,0''728\,, & y(1) &= 63^\circ 40'\ 9''272 \\ w(2) &= +\,0.821\,, & y(2) &= 96\ 29\ 52.821 \\ w(3) &= -\,0.245\,, & y(3) &= 305\ 51\ 36.755 \\ w(4) &= -\,0.862\,, & y(4) &= 215\ 58\ 16.138 \\ w(a) &= -\,0.111\,, & y(a) &= 106\ \ 5\ 28.889 \\ w(b) &= -\,1.030\,, & y(b) &= 269\ 57\ 21.970 \end{aligned}$$

womit diese Rechnung geschlossen ist.

85.

Da ich bei der Berechnung der Ausgleichung auf der Station (1) ausführlich gewesen bin, so kann ich die übrigen Stationen kürzer darstellen. Für die Beobachtungen auf der Station (2) = Warte wurden die folgenden Bezeichnungen angewandt

(1) Richtung nach der Station (1)
(2) » » » » (3)
(3) » » » » (5)
(4) » » » » (4)

Ueberzählige Punkte sind hier nicht vorhanden. Die beiden Täfelchen, die die Vorbereitung der Beobachtungen enthalten, sind hier die folgenden.

Station (2).

r	Vorl. Werthe	Anzahl d. Beob. u. die Summen dieser.							
		4	6	15	12	2	2	1	2
(1)	27°55′ 7″	2″80	4″20	2″50	—	3″70	—	2″10	3″20
(2)	45 16 35	6.20	—	—	—	—	4″00	3.60	2.95
(3)	64 53 36	—	8.00	—	21″50	4.70	7.60	1.90	7.20
(4)	342 17 12	—	—	3.55	0.00	0.10	3.60	—	5.60
	S	9.00	12.20	6.05	21.50	8.50	15.2	7.60	18.95
	M	4.50	6.10	3.025	10.75	2.833	5.067	2.533	4.738

Nr.	pl	pl'	pl''	pl'''	p	P	$p^2:P$
1	−1″700	+1″700	—	—	4	8	2.0
2	−1.900	—	+1″900	—	6	12	3.0
3	−0.525	—	—	+0″525	15	30	7.5
4	—	—	+10.750	−10.750	12	24	6.0
5	+0.867	—	+1.866	−2.733	2	6	0.6667
6	—	−1.067	+2.533	−1.466	2	6	0.6667
7	−0.433	+1.066	−0.633	—	1	3	0.3333
8	−1.538	−1.787	+2.462	+0 863	2	8	0.5
(lx), etc.	−5″229	−0″088	+18″878	−13″561		97	
Q, etc.	30	9	25	33			

Hieraus ergeben sich erstens die folgenden numerischen Werthe der (pp), (pp'), etc.

	p	p'	p''	p'''
p	14.0	2.8333	4.5	8.6667
p'		3.5	1.5	1.1667
p''			11.1667	7.8333
p'''				15.3333

ferner

$$N = 2.9115, \quad N' = 0.9718, \quad N'' = 1.5435, \quad N''' = 2.9726$$

und die $(1,1)$, $(2,2,1)$, etc.

	1	2	3	4	l
1	24.5	0	0	0	−5″229
2		6.4444	0	1.7272	−0.088
3			16.2156	−3.2451	+18.878
4				26.5032	−13.561
l					40.558

Die Auflösung der Gleichungen giebt die Hülfsgrössen

$$(1,1) = 24.5\,, \quad (2,2,1) = 6.4444\,, \quad (3,3,2) = 16.2156$$
$$(4,4,3) = 25.3936\,, \quad (ll,4) = 13.713\,,$$
$$\log \beta''' = 9.42690n\,, \quad \log \gamma''' = 9.30129$$

die weiter unten wieder gebraucht werden, nebst

$$w(1) = -0''213\,,\quad y(1) = 27^\circ 55'\ \ 6''787$$
$$w(2) = +0.089\,,\quad y(2) = 45\ 16\ \ 35.089$$
$$w(3) = +1.087\,,\quad y(3) = 64\ 53\ \ 37.087$$
$$w(4) = -0.384\,,\quad y(4) = 342\ 17\ \ 11.616$$

86.

Die auf der Station (3) = Inselsberg beobachteten Richtungen sind wie folgt bezeichnet worden,

(1) . . Richtung nach der Station (5)
(2) . . » » » » (1)
(3) . . » » » » (4)

und die Beobachtungen gaben die folgenden Zahlenwerthe

Station (3).

r	Vorl. Werthe	Anzahl d. Beob. u. die Summen ders.			
		14	5	9	5
(1)	179°43′ 9″	9″40	4″50	—	2″10
(2)	243 45 35	1.70	—	1″00	3.39
(3)	268 36 50	—	2.90	1.18	5.19
	S	11.10	7.40	2.18	10.68
	M	5.550	3.700	1.090	3.560

Nr.	pl	pl'	pl''	p	P	$p^2 : P$
1	+3″850	−3″850	—	14	28	7.0
2	+0.800	—	−0″800	5	10	2.5
3	—	−0.090	+0.090	9	18	4.5
4	−1.460	−0.170	+1.630	5	15	1.6667
(lx), etc.	+3″190	−4″110	+0″920		71	
Q, etc.	24	28	19			

Hiemit bekommt man

	p	p'	p''
p	11.1667	8.6667	4.1667
p'		13.1667	6.1667
p''			8.6667

$$N = 2.4199\,,\quad N' = 3.5818\,,\quad N'' = 1.7219$$

$$(1,1) = 18.6893$$
$$(2,2,1) = 27.6600$$
$$(3,3,2) = 13.2982\,,\ (ll) = 3.340\,,\ (ll,3) = 2.120$$

$$w(1) = +\,0''171\,,\quad y(1) = 179°43'\ 9''171$$
$$w(2) = -\,0.149\,,\quad y(2) = 243\ 45\ 34.851$$
$$w(3) = +\,0.069\,,\quad y(3) = 268\ 36\ 50.069$$

87.

Die auf der Station (4) = Wachsenburg beobachteten Richtungen sind wie folgt bezeichnet worden,

(1) .. Richtung nach der Station (3)
(2) .. » » » » (1)
(3) .. » » » » (2)

und die Beobachtungen gaben die folgenden Zahlenwerthe,

Station (4).

r	Vorl. Werthe	Anzahl d. Beob. u. d. Summen ders.			
		9	5	7	1
(1)	88°37′44″	5″85	2″50	—	1″60
(2)	128 58 0	0.00	—	0.00	1.90
(3)	170 26 40	—	1.80	21.02	0.00
	S	5.85	4.30	21.02	3.50
	M	2.925	2.150	10.510	1.167

Nr.	pl	pl'	pl''	p	P	$p^2 : P$
1	+2″925	−2″925	—	9	18	4.5
2	+0.35	—	−0″35	5	10	2.5
3	—	−10.51	+10.51	7	14	3.5
4	+0.433	+0.733	−1.166	1	3	0.3333
(lx), etc.	+3.708	−12″702	+8″994		45	
Q, etc.	15	17	13			

	p	p'	p''
p	7.3333	4.8333	2,8333
p'		8.3333	3.8333
p''			6.3333

$$N = 1.8901\,, \quad N' = 2.5572\,, \quad N'' = 1.4991$$

$$(1,1) = 11.2393$$
$$(2,2,1) = 15.2061$$
$$(3,3,2) = 8.9139\,, \quad (ll) = 35.594\,, \quad (ll,3) = 14.686$$

$$w(1) = +\,0''330\,, \quad y(1) = 88^\circ 37' 44''330$$
$$w(2) = -\,0.835\,, \quad y(2) = 128\;57\;59.165$$
$$w(3) = +\,1.009\,, \quad y(3) = 170\;26\;41.009$$

88.

Die auf der Station (5) = Hörselsberg beobachteten Richtungen sind wie folgt bezeichnet worden,

(1) .. Richtung nach der Station (2)
(2) .. » » » » (1)
(3) .. » » » » (3)

und die Beobachtungen gaben die folgenden Zahlenwerthe,

Station (5).

r	Vorl. Werthe	Anzahl d. Beob. u. d. Summen ders.		
		9	5	11
(1)	252°59′37″	8″00	2″50	—
(2)	276 32 47	0.00	—	0″00
(3)	359 40 37	—	0.65	31.15
	S	8.00	3.15	31.15
	M	4.00	1.575	15,575

Nr.	pl	pl'	pl''	p	P	$p^2 : P$
1	+4″00	—4″00	—	9	18	4.5
2	+0.925	—	—0″925	5	10	2.5
3	—	—15.575	+15.575	11	22	5.5
(lx), etc.	+4.925	—19.575	+14.650		50	
Q, etc.	14	20	16			

	p	p'	p''
p	7.0	4.5	2.5
p'		10.0	5.5
p''			8.0

$$N = 1.4302\,, \quad N' = 3.1464\,, \quad N'' = 1.7480$$

$$(1,1) = 9.0455$$
$$(2,2,1) = 19.9000$$
$$(3,3,2) = 11.0556\,, \quad (ll) = 48.002\,, \quad (ll,3) = 6.652$$

$$w(1) = +\,0''544\,, \quad y(1) = 252^\circ 59' 37''544$$
$$w(2) = -\,0.984\,, \quad y(2) = 276\ 32\ 46.016$$
$$w(3) = +\,1.325\,, \quad y(3) = 359\ 40\ 38.325$$

89.

Stellen wir nun die oben erhaltenen Resultate der Ausgleichungen auf den Stationen zusammen, und fügen die Hülfsgrössen hinzu, die im zweiten Theile der Auflösung unserer Aufgabe gebraucht worden.

Station Seeberg = (1)

$$y(1)_1 = 63^\circ 40'\ 9''272$$
$$y(2)_1 = 96\ 29\ 52.821$$
$$y(3)_1 = 308\ 51\ 36.755$$
$$y(4)_1 = 215\ 58\ 16.138$$
$$y(a)_1 = 106\ \ 5\ 28.889$$
$$y(b)_1 = 269\ 57\ 21.970$$

$$(1,1)_1 = (1.10266)\,, \quad (4,4,3)_1 = (1.10219)$$
$$(2,2,1)_1 = (1.27875)\,, \quad (a,a,4)_1 = (1.50417)$$
$$(3,3,2)_1 = (1.34570)\,, \quad (b,b,5)_1 = (1.20268)$$

$$\beta'''_1 = 0\,, \qquad \gamma'''_1 = +(8.95533)$$
$$\beta^{IV}_1 = -(9.40550)\,, \quad \gamma^{IV}_1 = +(9,52562)\,, \quad \delta^{IV}_1 = +(9.67011)$$
$$\beta^{V}_1 = -(9.31217)\,, \quad \gamma^{V}_1 = +(9.80472)\,, \quad \delta^{V}_1 = +(9.86583)\,, \quad \varepsilon^{V}_1 = +(9.69573)$$

Station Warte = (2)

$$y(1)_2 = 27^\circ 55'\ 6''787$$
$$y(2)_2 = 45\ 16\ 35.089$$
$$y(3)_2 = 64\ 53\ 37.087$$
$$y(4)_2 = 342\ 17\ 11.616$$

$$(1,1)_2 = (1.38917)\,,\quad (3,3,2)_2 = (1.20993)\,.$$
$$(2,2,1)_2 = (0.80918)\,,\quad (4,4,3)_2 = (1.40472)$$
$$\beta_2''' = -(9.42690)\,,\quad \gamma_2''' = +(9.30129)$$

Station Inselsberg = (3)

$$y(1)_3 = 179^0\,43'\;9''171$$
$$y(2)_3 = 243\;45\;34.851$$
$$y(3)_3 = 268\;36\;50.069$$

$$(1,1)_3 = (1.27159)$$
$$(2,2,1)_3 = (1.44185)$$
$$(3,3,2)_3 = (1.12378)$$

Station Wachsenburg = (4)

$$y(1)_4 = 88^0\,37'\,44''330$$
$$y(2)_4 = 128\;57\;59.165$$
$$y(3)_4 = 170\;26\;41.009$$

$$(1,1)_4 = (1.05073)$$
$$(2,2,1)_4 = (1.18201)$$
$$(3,3,2)_4 = (0.95006)$$

Station Hörselsberg = (5)

$$y(1)_5 = 252^0\,59'\,37''544$$
$$y(2)_5 = 276\;32\;46.016$$
$$y(3)_5 = 359\;40\;38.325$$

$$(1,1)_5 = (0.95641)$$
$$(2,2,1)_5 = (1.29889)$$
$$(3,3,2)_5 = (1.04356)$$

Zur Berechnung des mittleren Fehlers wird ausserdem noch die Summe der (ll,n) gebraucht, die ich hier mit W_0 bezeichnen will. In unserm Beispiel haben wir oben erhalten,

$$(ll,6)_1 = 132.861$$
$$(ll,4)_2 = 13.713$$
$$(ll,3)_3 = 2.120$$
$$(ll,3)_4 = 14.686$$
$$(ll,3)_5 = 6.652$$
$$W_0 = 170.032$$

Hiemit ist der erste Theil der Auflösung unserer Aufgabe vollständig beendigt.

90.

Mit dem Vorhergehenden ist zwar unser Beispiel in Bezug auf den ersten Theil der Auflösung unserer Aufgabe vollständig ausgeführt, da auch die Berechnung der mit ihren Gewichten multiplicirten Summe der der Quadrate der übrigbleibenden Fehler hinzugefügt worden ist. Ehe ich aber zum zweiten Theil der Auflösung übergehe will ich noch zeigen, wie man die im Art. 65 eingeführten, und mit u, $u_{,}$, etc. bezeichneten Grössen berechnen kann. Im Allgemeinen braucht man die Werthe dieser nicht zu kennen, allein es können Fälle eintreten, wo man sie kennen zu lernen wünscht, z. B. wenn man die von der Ausgleichung auf den Stationen herrührenden Theile der Summen der Fehlerquadrate, nicht nur durch das im Vorhergehenden dafür gegebene Verfahren, sondern auch direct berechnen will. Zur Bezeichnung der u werde ich jetzt $u(m)_s$ wählen, wo m die laufende Summe der Gruppe von Gyris, und s wieder die Stationsnummer bezeichnet. Nehmen wir nun wie früher an, dass

$$\begin{array}{c} p = p' = p'' = \text{etc.} \\ p_{,} = p_{,}' = p_{,}'' = \text{etc.} \\ \text{etc.} \end{array}$$

so geben die Gleichungen (65) zur Berechnung der $u(m)_s$ den folgenden allgemeinen Ausdruck

$$u(m)_s = -\frac{p_{m-1}}{P_{m-1}} \Sigma w(r)_s$$

wo $w(r)_s$ wieder die Verbesserung der Richtungen auf den Stationen bezeichnet, und unter dem Summenzeichen nur die in der betr. Gruppe von Gyris vorhandenen Richtungen aufgenommen werden dürfen, z. B.

$$\begin{aligned}
u(1)_1 &= -\tfrac{1}{2}(w(a)_1 + w(b)_1) &&= +0''571 \\
u(9)_1 &= -\tfrac{1}{2}(w(a)_1 + w(4)_1) &&= +0.021 \\
u(14)_1 &= -\tfrac{1}{3}(w(3)_1 + w(4)_1 + w(a)_1) &&= +0.406 \\
u(21)_1 &= -\tfrac{1}{4}(w(1)_1 + w(2)_1 + w(4)_1 + w(a)_1) &&= +0.220 \\
u(1)_2 &= -\tfrac{1}{2}(w(1)_2 + w(2)_2) &&= +0.062 \\
u(4)_2 &= -\tfrac{1}{2}(w(3)_2 + w(4)_2) &&= -0.352 \\
u(8)_2 &= -\tfrac{1}{4}(w(1)_2 + w(2)_2 + w(3)_2 + w(4)_2) &&= -0.145 \\
u(1)_3 &= -\tfrac{1}{2}(w(1)_3 + w(2)_3) &&= -0.011 \\
u(4)_3 &= -\tfrac{1}{3}(w(1)_3 + w(2)_3 + w(3)_3) &&= -0.030
\end{aligned}$$

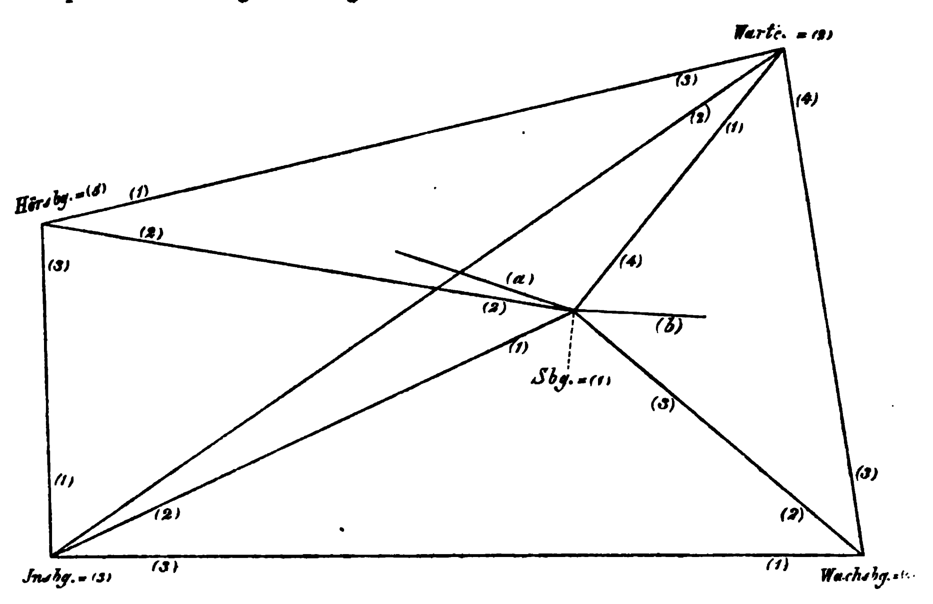
u. s. w. Wenn die oben unter den Gewichten p angenommenen Rela-

tionen nicht stattfinden, so erkennt man aus den Ausdrücken (65) leicht wie verfahren werden muss.

91.

Die Abänderungen, die der zweite Theil der Auflösung der allgemeinen Aufgabe in der Anwendung auf die Geodäsie erfährt, sind von der Beschaffenheit, dass sie am Einfachsten durch ein Beispiel eingesehen werden; es soll daher das im Vorhergehenden angefangene Beispiel sogleich fortgesetzt, und die anzuwendenden Ausdrücke sollen an den betreffenden Stellen erläutert werden.

Vor Allem sind nun die Bedingungsgleichungen, die das Dreiecksnetz liefert, aufzusuchen und aufzustellen, und dazu ist eine Figur desselben sehr dienlich, die jedoch auf keine sonderliche Genauigkeit in Betreff ihrer Verhältnisse Anspruch zu machen braucht. Es ist ausreichend, wenn sie alle Dreiecke ihrer ohngefähren Lage nach, so wie die Angaben aller beobachteten Richtungen oder Winkel enthält. Für unser Beispiel ist die folgende Figur eine solche.



Um die Zahl der vorhandenen Bedingungsgleichungen zu erhalten muss man das Dreiecksnetz als ein Polygon von eben so vielen Seiten betrachten, als Dreieckspunkte vorhanden sind, und von dem Grundsatz ausgehen, dass ein Polygon von n Seiten völlig bestimmt ist, wenn man in demselben ausser Einer Seite $2(n-2)$ von einander unabhängige

Winkel kennt. Sei nun die Anzahl aller beobachteten Richtungen m, die vor Allem so beschaffen sein müssen, dass das Dreiecksnetz in keinem seiner Punkte unbestimmt wird, und darunter q theils willkührliche Richtungen, theils solche, die nicht nach Dreieckspunkten hinzielen, dann wird die Anzahl der vorhandenen Bedingungsgleichungen

$$= m - q - 2(n - 2)$$

In unserm Beispiel ist $m = 19$, und da auf jeder Station Eine Richtung willkührlich ist, und ausserdem die zwei Richtungen $(a)_1$ und $(b)_1$ vorkommen, die nach keinem Dreieckspunkte hinzielen, so ist $q = 7$, ferner ist hier $n = 5$, und folglich sind 6 von einander unabhängige Bedingungsgleichungen vorhanden.

Die Bedingungsgleichungen, die ein Dreiecksnetz darbietet, zerfallen in zwei Gattungen, erstens in die, welche die Summen der Winkel der Drei- oder Mehrecke geben, und die man die Winkelgleichungen nennt, und zweitens in die, welche die Proportionalität der Sinusse der Winkel und der gegenüber liegenden Seiten darbietet, nachdem daraus die Seiten eliminirt worden sind; diese nennt man die Seitengleichungen. Man hat bei der Aufstellung derselben darauf zu sehen, dass keine in den übrigen enthalten sei, und dieses ist leicht zu erreichen, wenn man das Dreiecksnetz nach und nach aus einem einzigen seiner Dreiecke zusammen setzt. Das Dreieck, welches man hiebei als Grundlage wählt, kann man aus allen vorhandenen beliebig auswählen. Dieses Dreieck kann höchstens Eine Winkelgleichung geben. Knüpft man nun erst einen vierten Punkt daran, und findet in den vorhandenen Beobachtungen, dass zur Bestimmung desselben k Winkel nach demselben, und l Winkel von demselben beobachtet worden sind, so bietet er $k + l - 2$ Bedingungsgleichungen dar, unter welchen sich höchstens l Winkelgleichungen befinden, während die übrigen $k - 2$ Seitengleichungen sind. Es kann sich jedoch auch ereignen, dass die Anzahl der Winkelgleichungen kleiner wie l, und die Zahl der Seitengleichungen dem entsprechend grösser wie $k - 2$ wird. Die Anknüpfung eines fünften, sechsten, u. s. w. Punktes wird eben so behandelt, bis das ganze Dreiecksnetz erschöpft ist. Die oben angegebene Anzahl aller Bedingungsgleichungen, die man auch auf beliebige Theile des Netzes anwenden kann, gewährt eine Controle dafür, dass man nicht zu viele oder zu wenige Bedingungsgleichungen angesetzt hat.



Wenden wir diese Sätze auf die obige Figur an, indem wir vom Dreiecke (1), (3), (4) ausgehen. Da in diesem alle drei Winkel beobachtet worden sind, so giebt es die einzig mögliche Bedingungsgleichung

$$(1)_1 - (3)_1 + (3)_3 - (2)_3 + (2)_4 - (1)_4 - 180^0\ 0'\ 0''634 = 0$$

indem 0″634 der sphärische Excess dieses Dreiecks ist. Knüpfen wir hieran den Dreieckspunkt (5), so zeigt die Figur, dass nach demselben 2, und von demselben 1 Winkel beobachtet worden sind. Dieser Punkt giebt daher nur Eine Winkelgleichung, nemlich

$$(2)_1 - (1)_1 + (2)_3 - (1)_3 + (3)_5 - (2)_5 - 180^0\ 0'\ 0''528 = 0$$

Wird hierauf der Dreieckspunkt (2) angeknüpft, so zeigt die Figur, dass nach demselben 3, und von demselben 3 Winkel beobachtet worden sind. Hierauf giebt die Figur ferner zu erkennen, dass statt der 3 Winkelgleichungen, und der einen Seitengleichung, die vermöge der allgemeinen Regel vorhanden sein sollten, in der That 2 Winkel- und 2 Seitengleichungen vorhanden sind. Diese sind

$$(4)_1 - (2)_1 + (3)_2 - (1)_2 + (2)_5 - (1)_5 - 180^0\ 0'\ 0''510 = 0$$
$$(3)_1 - (4)_1 + (1)_2 - (4)_2 + (3)_4 - (2)_4 - 180\ \ 0\ \ 0.420 = 0$$

$$\log . \sin [(2)_1 - (1)_1] \sin [(2)_2 - (1)_2] \sin [(3)_5 - (1)_5]$$
$$- \log . \sin [(4)_1 - (1)_1] \sin [(3)_2 - (2)_2] \sin [(3)_5 - (2)_5] = 0$$

$$\log . \sin [(1)_1 - (3)_1] \sin [(2)_2 - (1)_2] \sin [(3)_4 - (1)_4]$$
$$- \log . \sin [(4)_1 - (1)_1] \sin [(2)_2 - (4)_2] \sin [(2)_4 - (1)_4] = 0$$

Diese beiden Seitengleichungen entstehen aus den Dreiecken (1)(2)(3), (2)(3)(5), (1)(3)(5), und (1)(2)(3), (2)(3)(4), (1)(3)(4), und ich habe sie sogleich in logarithmischer Form angesetzt, weil sie in dieser am Einfachsten behandelt werden können. Mit den vorstehenden Gleichungen ist die Zahl 6 erfüllt, die vorher bestimmt wurde.

92.

Dem Vorhergehenden zufolge muss nun zuerst jede Bedingungsgleichung auf die Form

$$0 = F + \Sigma q(r)_s \,.\, \delta(r)_s$$

gebracht werden, wenn $\delta(r)_s$ irgend welche Aenderungen der Richtungen, und F so wie $q(r)_s$ bestimmte numerische Grössen bezeichnen; letztere sind identisch mit den im Art. 31 u. f. q, q', etc. r, r', etc. etc. benannten Coefficienten, und die F sind im Art. 51 erklärt. Wir bekom-

men demzufolge die vorstehende Form durch die Substitution des allgemeinen Ausdrucks

$$y(r)_s + \delta(r)_s$$

für die Richtungen, die im vor. Art. schlechtweg mit $(r)_s$ bezeichnet worden sind, und dabei nur die ersten Potenzen der $\delta(r)_s$ berücksichtigen. Die Substitution der im Art. 89 zusammen gestellten Werthe der $y(r)_s$ in die strengen Ausdrücke der Bedingungsgleichungen des vor. Art. giebt die Werthe der F, wobei in grösseren Dreiecken erforderlich werden kann, noch folgende Reductionen anzubringen: die Berücksichtigung der Unterschiede zwischen den astronomischen und dem geodätischen Azimuthen, und die des sphäroidischen Ueberschusses in Bezug auf die Kugel*). Man hat früher vorgeschrieben in den Seitengleichungen von jedem Winkel den dritten Theil des sphärischen Ueberschusses abzuziehen, allein dieses ist überflüssig, da sie sowohl für die Kugel wie für die Ebene gelten.

Die Coefficienten $q(r)_s$ bekommt man durch die Differentiation der Bedingungsgleichungen, und in den Winkelgleichungen haben sie immer theils die Werthe $+1$, theils -1. Dieselben Coefficienten der Seitengleichungen kann man auf zwei verschiedene Arten berechnen. Sie sind einestheils die Differenz des betr. log sin für Eine Secunde des Bogens, und anderentheils sind sie der Cotangente des Winkels, mit einer Constante multiplicirt gleich. Damit in den F die siebente Stelle des Briggischen Logarithmus, und in $\delta(r)_s$ die Secunde zur Einheit werden, müssen die Cotangenten der Winkel mit der Constante multiplicirt werden, deren log $= 1.32335$ ist.

E s ist gänzlich einerlei, welches dieser beiden Verfahren man zur Berechnung dieser Coefficienten anwendet, wenn man diese nur in einer hinreichenden Anzahl von Stellen richtig berechnet.

Gleichwie im Vorhergehenden die Richtungen und die Stationen mit fortlaufenden arabischen Ziffern bezeichnet worden, eben so sollen von nun an die Bedingungsgleichungen, in der Reihenfolge in der man sie aufgestellt hat, mit fortlaufenden römischen Ziffern bezeichnet werden, und diese Bezeichnung sowohl wie jene soll, in allen Hülfsgrössen, die noch in Betracht kommen, statt der bei der Entwickelung des Verfahrens eingeführten, angewandt werden.

---

*) S. Geodätische Untersuchungen.

Es sind daher zunächst die Resultate der Substitution der Werthe der $y(r)_s$ in die obigen Bedingungsgleichungen mit $F(I)$, $F(II)$, bis $F(VI)$ zu bezeichnen, und demselben Grundsatze folgend, wird den Differentialquotienten, die oben allgemein mit $q(r)_s$ benannt worden, für die erste Bedingungsgleichung die Bezeichnung $q(r,I)_s$, für die zweite $q(r,II)_s$ u. s. w. gegeben werden. Die Substitution der $y(r)_s$ gab

$$F(I) = +1''936 \qquad F(IV) = -2''788$$
$$F(II) = +1.010 \qquad F(V) = -99.3$$
$$F(III) = +1.579 \qquad F(VI) = -53.5$$

und die beschriebene Differentiation gab zuerst die Ausdrücke

$$\delta(1)_1-\delta(3)_1+\delta(3)_3-\delta(2)_3+\delta(2)_4-\delta(1)_4 \text{ für } I$$
$$\delta(2)_1-\delta(1)_1+\delta(2)_3-\delta(1)_3+\delta(3)_5-\delta(2)_5 \text{ für } II$$
$$\delta(4)_1-\delta(2)_1+\delta(3)_2-\delta(1)_2+\delta(2)_5-\delta(1)_5 \text{ für } III$$
$$\delta(3)_1-\delta(4)_1+\delta(1)_2-\delta(4)_2+\delta(3)_4-\delta(2)_4 \text{ für } IV$$
$$+32.634\delta[(2)_1-(1)_1]+67.360\delta[(2)_2-(1)_2]-6.310\delta[(3)_5-(1)_5]$$
$$+40.106\delta[(4)_1-(1)_1]-59.073\delta[(3)_2-(2)_2]-2.536\delta[(3)_5-(2)_5] \text{ für } V$$
$$-9.733\delta[(1)_1-(3)_1]+67.360\delta[(2)_2-(1)_2]+3.028\delta[(3)_4-(1)_4]$$
$$+40.106\delta[(4)_1-(1)_1]-10.733\delta[(2)_2-(4)_2]-24.794\delta[(2)_4-(4)_4] \text{ für } VI$$

Zuerst ist hiebei zu bemerken, dass die Coefficienten der Seitengleichungen im Allgemeinen viel grösser sind wie die der Winkelgleichungen, und dieses wird immer der Fall sein. Obgleich dieser Umstand für die Erlangung des Endresultats durchaus von keiner Bedeutung ist, so trägt er doch dazu bei, um die Rechnungen etwas unbequem zu machen. Nun ist aber leicht durch das Vorhergehende sich davon zu überzeugen, dass man jede Bedingungsgleichung vor ihrer Anwendung mit einem beliebigen Factor multipliciren darf, und diese Eigenschaft kann man dazu benutzen, um die Coefficienten der Seitengleichungen denen der Winkelgleichungen beiläufig gleich zu machen.

Es sollen in Folge dieser Bemerkung die vorstehenden Ausdrücke für die beiden hier vorhandenen Seitengleichungen vor Allem mit der Zahl 50 dividirt werden, wodurch sie in die folgenden übergehen,

$$+0.65268\delta[(2)_1-(1)_1]+1.3472\ \delta[(2)_2-(1)_2]-0.12620\delta[(3)_5-(1)_5]$$
$$+0.80212\delta[(4)_1-(1)_1]-1.18146\delta[(3)_2-(2)_2]-0.05072\delta[(3)_5-(2)_5] \text{ für } V$$
$$-0.19466\delta[(1)_1-(3)_1]+1.3472\ \delta[(2)_2-(1)_2]+0.06056\delta[(3)_4-(1)_4]$$
$$+0.80212\delta[(4)_1-(1)_1]-0.21466\delta[(2)_2-(4)_2]-0.49588\delta[(2)_4-(1)_4] \text{ für } VI$$

In Folge dessen müssen die vorstehenden Werthe von $F(V)$ und $F(VI)$ mit derselben Zahl dividirt werden, und die weiter unten anzuwendenden Werthe derselben sind also nicht die vorstehenden, sondern die folgenden

$$F(V) = -1.986 \qquad F(VI) = -1.070$$

93.

Für die Berechnung eines so kleinen Dreiecksnetzes wie das unsers Beispiels könnte man sich immerhin begnügen die im vor. Art. erhaltenen Ausdrücke der Coefficienten der Bedingungsgleichungen blos zu ordnen, allein bei grossen Netzen wird man auf diese Art leicht die Uebersicht verlieren können. Es ist daher stets angemessen diese Coefficienten, und nicht minder die folgenden Hülfsgrössen tabularisch zusammen zu stellen, wodurch man bewirkt, dass die klare Uebersicht über das Ganze nie verloren gehen kann. Führen wir nun die im vor. Art. angekündigte neue Bezeichnung dieser Coefficienten ein, und setzen auch die Logarithmen statt der Zahlen an, so bekommen wir die folgende Tafel der Coefficienten der obigen Bedingungsgleichungen.

r	s	$\log q(r,I)_s$	$\log q(r,II)_s$	$\log q(r,III)_s$	$\log q(r,IV)_s$	$\log q(r,V)_s$	$\log q(r,VI)_s$
1	1	0.	0.n	—	—	0.16280n	9.99860n
2		—	0.	0.n	—	9.81470	—
3		0.n	—	—	0.	—	9.28926
4		—	—	0.	0.n	9.90424	9.90424
1	2	—	—	0.n	0.	0.12943n	0.12943n
2		—	—	—	—	0.40289	0.05406
3		—	—	0.	—	0.07242n	—
4		—	—	—	0.n	—	9.33174
1	3	—	0.n	—	—	—	—
2		0.n	0.	—	—	—	—
3		0.	—	—	—	—	—
1	4	0.n	—	—	—	—	9.63885
2		0.	—	—	0.n	—	9.69538n
3		—	—	—	0.	—	8.78220
1	5	—	—	0.n	—	9.10106	—
2		—	0.n	0.	—	8.70523	—
3		—	0.	—	—	9.24778n	—

94.

Gleichwie die bisher berechneten Grössen, so können auch alle folgenden stationsweise aufgestellt und berechnet werden, und die Bezeichnungen sollen den vorher eingeführten analog eingerichtet werden. Wir haben eben

$$\begin{array}{llll} q(1,I)_s\,, & q(2,I)_s\,, & q(3,I)_s\,, & \text{etc. statt } q,\ q',\ q'',\ \text{etc.} \\ q(1,II)_s\,, & q(2,II)_s\,, & q(3,II)_s\,, & \text{etc. statt } r,\ r',\ r'',\ \text{etc.} \\ & \text{etc.} & & \qquad \text{etc.} \end{array}$$

des Art. 31 geschrieben, und demgemäss werden wir auch

$$\begin{array}{llll} \eta(1,I)_s\,, & \eta(2,I)_s\,, & \eta(3,I)_s\,, & \text{etc. statt } \eta,\ \eta',\ \eta'',\ \text{etc.} \\ \eta(1,II)_s\,, & \eta(2,II)_s\,, & \eta(3,II)_s\,, & \text{etc. statt } \varkappa,\ \varkappa',\ \varkappa'',\ \text{etc.} \\ & \text{etc.} & & \qquad \text{etc.} \end{array}$$

des Art. 40, so wie

$$\begin{array}{llll} f(1,I)_s\,, & f(2,I)_s\,, & f(3,I)_s\,, & \text{etc. statt } (\alpha\eta),\ (\beta\eta),\ (\chi\eta),\ \text{etc.} \\ f(1,II)_s\,, & f(2,II)_s\,, & f(3,II)_s\,, & \text{etc. statt } (\alpha\varkappa),\ (\beta\varkappa),\ (\gamma\varkappa),\ \text{etc.} \\ & \text{etc.} & & \qquad \text{etc.} \end{array}$$

des Art. 40 schreiben.

Es sollen nun die Ausdrücke für unser Beispiel diesem entsprechend aus den allgemeinen Ausdrücken ausgeschrieben werden, wobei jedoch sogleich bemerkt wird, dass dieses nicht unumgänglich nothwendig ist. Weiter unten bei der Zusammenstellung aller anzuwendenden Formeln werden diese so aufgestellt werden, dass man sie auf die grösstmögliche Triangulation anwenden kann, ohne specielle Auszüge daraus zu machen.

Mit Rücksichtnahme auf die Grössen, von welchen bei der Erklärung der Ausgleichung auf den Stationen gezeigt wurde, dass sie in unserm Verfahren immer Null werden, findet man aus den allgemeinen Ausdrücken leicht die folgenden, die sich speciell auf unser Beispiel beziehen.

Station (1)

$$\begin{aligned} \eta(1,I)_1 &= q(1,I)_1 \\ \eta(2,I)_1 &= q(2,I)_1 \\ \eta(3,I)_1 &= q(3,I)_1 \\ \eta(4,I)_1 &= \beta'''_1 \,.\, q(2,I)_1 + \gamma'''_1 \,.\, q(3,I)_1 + q(4,I)_1 \\ \eta(a,I)_1 &= \beta^{IV}_1 \,.\, q(2,I)_1 + \gamma^{IV}_1 \,.\, q(3,I)_1 + \delta^{IV}_1 \,.\, q(4,I)_1 \\ \eta(b,I)_1 &= \beta^{V}_1 \,.\, q(2,I) + \gamma^{V}_1 \,.\, q(3,I)_1 + \delta^{V}_1 \,.\, q(4,I)_1 \end{aligned}$$

indem in Bezug auf die überzähligen Richtungen immer $q(a,I)_1$, $q(b,I)_1$, etc. Null sind.

Station (2)

$$\eta(1,I)_2 = q(1,I)_2$$
$$\eta(2,I)_2 = q(2,I)_2$$
$$\eta(3,I)_2 = q(3,I)_2$$
$$\eta(4,I)_2 = \beta'''_2 \, . \, q(2,I)_2 + \gamma'''_2 \, . \, q(3,I)_2 + q(4,I)_2$$

Stationen (3), (4) und (5)

$$\eta(1,I)_s = q(1,I)_s$$
$$\eta(2,I)_s = q(2,I)_s$$
$$\eta(3,I)_s = q(3,I)_s$$

wo für s nach und nach 3, 4, 5 zu schreiben sind.

Diese Ausdrücke sind speciell für die erste Bedingungsgleichung hingeschrieben, um sie auf die übrigen Bedingungsgleichungen auszudehnen ist weiter nichts nöthig wie in denselben statt der Zahl I sich nach und nach die Zahlen II, III, etc. zu denken. Es ist kein q als Null angenommen worden, da aber die vorstehende Tafel zeigt, dass viele derselben Null sind, so fallen die betreffenden Glieder der vorstehenden Ausdrücke von selbst weg. Die Anwendung derselben gab die folgenden Werthe.

r	s	$\log \eta(r,I)_s$	$\log \eta(r,II)_s$	$\log \eta(r,III)_s$	$\log \eta(r,IV)_s$	$\log \eta(r,V)_s$	$\log \eta(r,VI)_s$
1	1	0.	0. n	—	—	0.16280n	9.99860n
2		—	0.	0. n	—	9.81470	—
3		0. n	—	—	0.	—	9.28926
4		8.95533n	—	0.	9.95893n	9.90424	9.91364
a		9.52562n	9.40550n	9.85868	9.12192n	9.32064	9.64402
b		9.80472n	9.31217n	9.97287	8.98394n	9.65802	9.85315
1	2	—	—	0. n	0.	0.12943n	0.12943n
2		—	—	—	—	0.40289	0.05406
3		—	—	0.	—	0.07242n	—
4		—	—	9.30129	0. n	9.96009n	8.94453n
1	3	—	0. n	—	—	—	—
2		0. n	0.	—	—	—	—
3		0.	—	—	—	—	—
1	4	0. n	—	—	—	—	9.63885
2		0.	—	—	0. n	—	9.69538n
3		—	—	—	0.	—	8.78220
1	5	—	—	0. n	—	9.10106	—
2		—	0. n	0.	—	8.70523	—
3		—	0.	—	—	9.24778n	—

Aus dem Art. 40 erhalten wir ferner für unser Beispiel die folgenden Ausdrücke,

Station (1)

$$
\begin{aligned}
f(1,I)_1 &= Q(1,I)_1 \\
f(2,I)_1 &= Q(2,I)_1 + \beta_1'''.Q(4,I)_1 + \beta_1^{IV}.Q(a,I)_1 + \beta_1^{V}.Q(b,I)_1 \\
f(3,I)_1 &= Q(3,I)_1 + \gamma_1'''.Q(4,I)_1 + \gamma_1^{IV}.Q(a,I)_1 + \gamma_1^{V}.Q(b,I)_1 \\
f(4,I)_1 &= Q(4,I)_1 + \delta_1^{IV}.Q(a,I)_1 + \delta_1^{V}.Q(b,I)_1 \\
f(a,I)_1 &= Q(a,I)_1 + \varepsilon_1^{V}.Q(b,I)_1 \\
f(b,I)_1 &= Q(b,I)_1
\end{aligned}
$$

Station (2)

$$
\begin{aligned}
f(1,I)_2 &= Q(1,I)_2 \\
f(2,I)_2 &= Q(2,I)_2 + \beta_2'''.Q(4,I)_2 \\
f(3,I)_2 &= Q(3,I)_2 + \gamma_2'''.Q(4,I)_2 \\
f(4,I)_2 &= Q(4,I)_2
\end{aligned}
$$

Stationen (3), (4), (5)

$$
\begin{aligned}
f(1,I)_s &= Q(1,I)_s \\
f(2,I)_s &= Q(2,I)_s \\
f(3,I)_s &= Q(3,I)_s
\end{aligned}
$$

in welchen zur Abkürzung allgemein

$$Q(1,I)_s = \frac{\eta(1,I)_s}{(1,1)_s}, \quad Q(2,I)_s = \frac{\eta(2,I)_s}{(2,2,1)_s}, \quad Q(3,I)_s = \frac{\eta(3,I)_s}{(3,3,2)_s}, \text{ etc.}$$

gesetzt worden ist. Die oben in Bezug auf die verschiedenen Bedingungsgleichungen aufgestellten Bemerkungen haben hier auch volle Geltung. Für unser Beispiel sind die Resultate der vorstehenden Ausdrücke in den folgenden Tafeln zusammen gestellt. Die Divisoren $(1,1)_s$, $(2,2.1)_s$, $(3,3,2)_s$, etc. findet man im Art. 89.

r	s	$\log Q(r,I)_s$	$\log Q(r,II)_s$	$\log Q(r,III)_s$	$\log Q(r,IV)_s$	$\log Q(r,V)_s$	$\log Q(r,VI)_s$
1	1	8.89734	8.89734n	—	—	9.06014n	8.89594n
2		—	8.72125	8.72125n	—	8.53595	—
3		8.65430n	—	—	8.65430	—	7.94356
4		7.85314n	—	8.89781	8.85674n	8.80205	8.81145
a		8.02145n	7.90133n	8.35451	7.61775n	7.81647	8.13985
b		8.60204n	8.10949n	8.77019	7.78126n	8.45534	8.65047
1	2	—	—	8.61083n	8.61083	8.74026n	8.74026n
2		—	—	—	—	9.59371	9.24488
3		—	—	8.79007	—	8.86249n	—
4		—	—	7.89657	8.59528n	8.55537n	7.53981n
1	3	—	8.72841n	—	—	—	—
2		8.55815n	8.55815	—	—	—	—
3		8.87622	—	—	—	—	—
1	4	8.94927n	—	—	—	—	8.58812
2		8.81799	—	—	8.81799n	—	8.51337n
3		—	—	—	9.04994n	—	7.83214
1	5	—	—	9.04351n	—	8.14465	—
2		—	8.70111n	8.70111	—	7.40634	—
3		—	8.95644	—	—	8.20422n	—

r	s	$\log f(r,I)_s$	$\log f(r,II)_s$	$\log f(r,III)_s$	$\log f(r,IV)_s$	$\log f(r,V)_s$	$\log f(r,VI)_s$
1	1	8.89734	8.89734n	—	—	9.06014n	8.89594n
2		8.03664	8.75814	8.84805n	7.36078	8.42862	8.10332n
3		8.87386n	8.03663n	8.71846	8.52349	8.41694	8.67923
4		8.61715n	8.11976n	9.12342	8.89364n	8.94156	9.01732
a		8.48224n	8.15695n	8.71481	7.85408n	8.31624	8.55619
b		8.60204n	8.10949n	8.77019	7.78126n	8.45534	8,65047
1	2	—	—	8.61083n	8.61083	8.74026n	8.74026n
2		—	—	7.32347n	8.02218	9.60421	9.24717
3		—	—	8.80101	7.89657n	8.90335n	6.84110n
4		—	—	7.89657	8.59528n	8.55537n	7.53981n
1	3	—	8.72841n	—	—	—	—
2		8.55815n	8.55815	—	—	—	—
3		8.87622	—	—	—	—	—
1	4	8.94927n	—	—	—	—	8.58812
2		8.81799	—	—	8.81799n	—	8.51337n
3		—	—	—	9.04994	—	7.83214
1	5	—	—	9.04359n	—	8.14465	—
2		—	8.70111n	8.70111	—	7.40634	—
3		—	8.95644	—	—	8.20422n	—

95.

Es sind nun die Endgleichungen zu bilden und aufzulösen, deren allgemeine Ausdrücke man in den Artt. 36 und 46 findet. Die Coefficienten dieser die a. a. O. mit $(\eta\eta)$, $(\eta\varkappa)$, etc. bezeichnet wurden, sollen von nun an, den übrigen Bezeichnungen analog, mit (I,I), (I,II), etc., und die Unbekannten derselben, die oben $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, etc. genannt wurden, mit (I), (II), etc. bezeichnet werden. Die eben angezogenen Ausdrücke bieten zwei verschiedene Arten dar, um die Coefficienten der Endgleichungen zu berechnen, die, wenn sie beide angewandt werden, nicht nur diese Coefficienten selbst, sondern auch die vorhergehenden Rechnungen, mit Ausnahme der q, vollständig controliren. Jede dieser beiden Arten zerfällt überdiess in zwei Nebenarten. Durch die Ausdrücke des Art. bekommt man

$$(I,I) = \Sigma\{Q(1,I)_s\,.\eta(1,I)_s + Q(2,I)_s\,.\eta(2,I)_s + Q(3,I)_s\,.\eta(3,I)_s + \ldots\}$$
$$(I,II) = \Sigma\{Q(1,II)_s\,.\eta(1,I)_s + Q(2,II)_s\,.\eta(2,I)_s + Q(3,II)_s\,.\eta(3,I)_s + \ldots\}$$
$$(I,III) = \Sigma\{Q(1,III)_s\,.\eta(1,I)_s + Q(2,III)_s\,.\eta(2,I)_s + Q(3,III)_s\,.\eta(3,I)_s + \ldots\}$$
etc. etc.
$$(II,II) = \Sigma\{Q(1,II)_s\,.\eta(1,II)_s + Q(2,II)_s\,.\eta(2,II)_s + Q(3,II)_s\,.\eta(3,II)_s + \ldots\}$$
$$(II,III) = \Sigma\{Q(1,III)_s\,.\eta(1,II)_s + Q(2,III)_s\,.\eta(2,II)_s + Q(3,III)_s\,.\eta(3,II)_s + \ldots\}$$
etc. etc.
$$(III,III) = \Sigma\{Q(I,III)_s\,.\eta(1,III)_s + Q(2,III)_s\,.\eta(2,III)_s + Q(3,III)_s\,.\eta(3,III)_s + \ldots\}$$
etc. etc.
etc. etc.

Die erwähnte Nebenart ergiebt sich daraus, dass man in diesen Ausdrücken die Q und η mit einander verwechseln darf.

Die zweite Berechnungsart, die sich aus den Ausdrücken des Art. 35 ergiebt, führt auf die folgenden,

$$(I,I) = \Sigma\{f(1,I)_s\,.q(1,I)_s + f(2,I)_s\,.q(2,I)_s + f(3,I)_s\,.q(3,I)_s + \ldots\}$$
$$(I,II) = \Sigma\{f(1,I)_s\,.q(1,II)_s + f(2,I)_s\,.q(2,II)_s + f(3,I)_s\,.q(3,II)_s + \ldots\}$$
$$(I,III) = \Sigma\{f(1,I)_s\,.q(1,III)_s + f(2,I)_s\,.q(2,III)_s + f(3,I)_s\,.q(3,III)_s + \ldots\}$$
etc. etc.
$$(II,II) = \Sigma\{f(1,II)_s\,.q(1,II)_s + f(2,II)_s\,.q(2,II)_s + f(3,II)_s\,.q(3,II)_s + \ldots\}$$
$$(II,III) = \Sigma\{f(1,II)_s\,.q(1,III)_s + f(2,II)_s\,.q(2,III)_s + f(3,II)_s\,.q(3,III)_s + \ldots\}$$
etc. etc.
$$(III,III) = \Sigma\{f(1,III)_s\,.q(1,III)_s + f(2,III)_s\,.q(2,III)_s + f(3,III)_s\,.q(3,III)_s + \ldots\}$$
etc. etc.
etc. etc.

Auch hier dürfen die f und q mit einander verwechselt werden. Wie man sieht werden diese Coefficienten auch stationsweise berechnet, nur werden die Resultate die jede Station für jeden Coefficienten giebt, schliesslich zu einander addirt, wie das Summenzeichen Σ anzeigt. Die Endgleichungen selbst nehmen nun die folgende Form an.

$$\begin{array}{l} (I,I)(I) + (I,II)(II) + (I,III)(III) + \ldots = F(I) \\ (I,II)(I) + (II,II)(II) + (II,III)(III) + \ldots = F(II) \\ (I,III)(I) + (II,III)(II) + (III,III)(III) + \ldots = F(III) \\ \quad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.} \end{array}$$

bis alle Bedingungsgleichungen erschöpft sind. Für unser Beispiel ergaben sich die folgenden Werthe dieser Coefficienten,

i	(i,I)	(i,II)	(i,III)	(i,IV)	(i,V)	(i,VI)
I	0.41983	−0.10422	−0.05229	−0.09915	−0.14097	−0.19782
II		0.36661	−0.12072	+0.00229	+0.12313	+0.06601
III			0.46820	−0.12927	+0.02411	+0.17105
IV				0.36981	−0.08036	−0.06841
V					1.44452	+0.71132
VI						0.478084

Die Auflösung der Endgleichungen geschieht durch die Ausdrücke, die in den Artt. 46 und 49 aufgestellt worden sind, nur ist in Bezug auf die Bezeichnung zu bemerken, dass man

$$\begin{array}{l} (II,II,1)\ ,\ (II,III,1)\ ,\ \text{etc.}\ (III,III,2)\ ,\ \text{etc. etc. statt} \\ (\varkappa\varkappa,1)\ ,\quad (\varkappa\lambda,1)\ ,\ \text{etc.}\quad (\lambda\lambda,2)\ ,\ \text{etc. etc.} \end{array}$$

ferner

$$F(II,1),\ F(III,2),\ \text{etc. statt}\ G',\ H'',\ \text{etc.}$$

so wie

$$\begin{array}{l} (2)_1\ ,\quad (3)_1\ ,\quad (4)_1\ ,\ \text{etc.}\quad (3)_2\ ,\quad (4)_2\ ,\ \text{etc. etc. statt} \\ \mathfrak{a}'\ ,\quad \mathfrak{b}'\ ,\quad \mathfrak{c}'\ ,\ \text{etc.}\quad \mathfrak{b}''\ ,\quad \mathfrak{c}''\ ,\ \text{etc. etc.} \end{array}$$

schreiben muss, da man diese Bezeichnung unbeschränkt fortsetzen kann, während die Anwendung von Buchstaben durch die Ausdehnung des Alphabets beschränkt ist.

Für unser Beispiel ergaben sich die folgenden Werthe, die auch weiter unten bei der Berechnung der Gewichte Anwendung finden.

$(2)_1 = +(9.39488)$, $(3)_1 = +(9.09535)$, $(4)_1 = +(9.37322)$, $(5)_1 = +(9.52606)$
$(3)_2 = +(9.59371)$, $(4)_2 = +(8.81627)$, $(5)_2 = -(9.41270)$
$(4)_3 = +(9.56522)$, $(5)_3 = -(9.00219)$
$(5)_4 = +(9.50551)$

$$(6)_1 = +(9.67320)$$
$$(6)_2 = -(8.69547)$$
$$(6)_3 = -(9.57284)$$
$$(6)_4 = +(9.29988)$$
$$(6)_5 = -(9.65565),\ R_6 = 42.604$$

$$(I,I) = (9.62307)\,, \qquad (IV,IV,3) = (9.46190)$$
$$(II,II,1) = (9.53242)\,, \qquad (V,V,4) = (0.12728)$$
$$(III,III,2) = (9.61197)\,, \qquad (VI,VI,5) = (8.61013)$$

und die Unbekannten

$$(I) = +(0.41932)$$
$$(II) = +(0.81322)$$
$$(III) = +(0.81482)$$
$$(IV) = -(0.75236)$$
$$(V) = +(0.23697)$$
$$(VI) = -(0.88997)$$

Da die vollständige Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Fehlerquadrate

$$W = W_0 + Rq$$

zum Ausdruck hat, wenn hier q die Anzahl der Bedingungsgleichungen bezeichnet, so ergiebt sich

$$W = 212{,}636$$

indem der Werth von W_0 schon im Art. 89 gegeben ist.

96.

Nennen wir nun den wahrscheinlichsten Werth einer Richtung $x(r)_s$, und setzen dem Vorhergehenden analog

$$x(r)_s = y(r)_s - z(r)_s$$

so erhält man die Werthe der $z(r)_s$ durch den folgenden allgemeinen Ausdruck

$$z(r)_s = f(r,I)_s.(I) + f(r,II)_s.(II) + f(r,III)_s.(III) + \ldots.$$

die den letzten des Art. 49 entspricht. Die Substitution der für unser Beispiel im Vorhergehenden erhaltenen numerischen Werthe giebt

$$\begin{aligned}
z(1)_1 &= +0''107\,, & z(1)_2 &= -0''165\,, & z(1)_3 &= -0''348\\
z(2)_1 &= +0.073\,, & z(2)_2 &= -0.751\,, & z(2)_3 &= +0.140\\
z(3)_1 &= -0.440\,, & z(3)_2 &= +0.325\,, & z(3)_3 &= +0.198\\
z(4)_1 &= +0.459\,, & z(4)_2 &= +0.239\\
z(a)_1 &= -0.038\\
z(b)_1 &= -0.068
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z(1)_4 &= -0''534\,, & z(1)_5 &= -0''698\\
z(2)_4 &= +0.798\,, & z(2)_5 &= +0.006\\
z(3)_4 &= -0.687\,, & z(3)_5 &= +0.561
\end{aligned}$$

und durch Zuziehung der im Art. 89 gegebenen Werthe der $y(r)_s$,

$$\begin{aligned}
x(1)_1 &= 63^0\,40'\;\;9''165\,, & x(1)_2 &= 27^0\,55'\;\;6''952\\
x(2)_1 &= 96\;\;29\;\;52.748\,, & x(2)_2 &= 45\;\;16\;\;35.840\\
x(3)_1 &= 308\;\;51\;\;37.195\,, & x(3)_2 &= 64\;\;53\;\;36.762\\
x(4)_1 &= 215\;\;58\;\;15.679\,, & x(4)_2 &= 342\;\;17\;\;11.377\\
x(a)_1 &= 106\;\;\;5\;\;28.927\\
x(b)_1 &= 219\;\;57\;\;22.038
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(1)_3 &= 179^0\,43'\;\;9''519\,, & x(1)_4 &= 88^0\,37'\,44''864\\
x(2)_3 &= 243\;\;45\;\;34.711\,, & x(2)_4 &= 128\;\;57\;\;58.367\\
x(3)_3 &= 268\;\;36\;\;49.871\,, & x(3)_4 &= 170\;\;26\;\;41.696
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(1)_5 &= 252^0\,59'\,38''242\\
x(2)_5 &= 276\;\;32\;\;46.010\\
x(3)_5 &= 359\;\;40\;\;37.764
\end{aligned}$$

97.

Die Ermittelung der Gewichte einer Anzahl der Winkel und Seiten eines Dreiecksnetzes ist von grosser Wichtigkeit, weil sich durch die numerische Grösse dieser mit Sicherheit auf zweckmässige Anlage des Netzes schliessen lässt. Es soll daher die Anwendung der, auf die im Vorhergehenden allgemein mit Ω bezeichneten Function, bezüglichen Ausdrücke durch eine Anzahl von Beispielen erläutert werden.

Zuerst soll der Winkel (3)(1)(5) der Figur des Art. 91 nebst dem Gewicht dieser Bestimmung berechnet werden. Da

$$(3)(1)(5) = x(2)_1 - x(1)_1$$

ist, und man den wahrscheinlichsten Werth irgend einer Function bekommt, wenn man die wahrscheinlichsten Werthe der Elemente, aus welchen sie besteht, darin substituirt; so bekommt man in diesem Falle sogleich den wahrscheinlichsten Werth dieses Winkels

$$(3)(1)(5) = 32^{0}\ 49'\ 43''583$$

Zur Berechnung des Gewichts dieser Bestimmung wird mit Weglassung des constanten Gliedes, worauf es hier nicht ankommt, die allgemeine Function

$$\Omega = \delta x(2)_1 - \delta x(1)_1$$

wenn das den Grössen vorgesetzte δ beliebige Aenderungen derselben bezeichnet. Wenn nun die im Art. 31 u. f. mit k, k', etc. bezeichneten Coefficienten des Ausdrucks von Ω mit den Richtungs- und den Stationsnummern, statt der Striche versehen werden, so ergeben sich

$$k(1)_1 = -1\ ,\quad k(2)_1 = +1$$

und alle übrigen k sind Null. Zufolge der Gleichungen (46) werden ferner, wenn man die M auf ähnliche Art bezeichnet,

$$\begin{aligned}
(M,1)_1 &= k(1)_1 = -1 \\
(M,2)_1 &= k(2)_1 = +1 \\
(M,3)_1 &= 0 \\
(M,4)_1 &= 0 \\
(M,a)_1 &= \beta''_1 k(2) = -(9.40550) \\
(M,b)_1 &= \beta'_1 k(2) = -(9.31217)
\end{aligned}$$

Setzt man hierauf zur Abkürzung

$$Q(M,1)_1 = \frac{(M,1)_1}{(1,1)_1}\ ,\quad Q(M,2)_1 = \frac{(M,2)_1}{(2,2,1)_1}\ ,\ \text{etc.}$$

so giebt die Gleichung (47), wenn wir sie für unser Beispiel vollständig ausschreiben,

$$\begin{aligned}
R = Q(M,1)_1 \,.\, (M,1)_1 &+ Q(M,2)_1 \,.\, (M,2)_1 \\
&+ Q(M,a)_1 \,.\, (M,a)_1 + Q(M,b)_1 \,.\, (M,b)_1
\end{aligned}$$

Durch Hülfe der vorstehenden Werthe und der aus dem Art. 89 zu entnehmenden Werthe der Divisoren $(1,1)_1$, $(2,2,1)_1$, etc. fand sich

$$R = 0.13625$$

Die Ausdrücke (48) werden nun für unser Beispiel, wenn wir wieder die Bezeichnungen den im Vorhergehenden eingeführten analog einrichten, und wieder die Glieder weglassen, die im gegenwärtigen Falle Null sind,

$$
\begin{aligned}
(I,M) &= Q(M,1)_1 . \eta(1,I)_1 + Q(M,a)_1 . \eta(a,I)_1 + Q(M,b)_1 . \eta(b,I)_1 \\
(II,M) &= Q(M,1)_1 . \eta(1,II)_1 + Q(M,2)_1 . \eta(2,II)_1 + Q(M,a)_1 . \eta(a,II)_1 \\
&\quad + Q(M,b)_1 . \eta(b,II)_1 \\
(III,M) &= Q(M,2)_1 . \eta(2,III)_1 + Q(M,a)_1 . \eta(a,III)_1 + Q(M,b)_1 . \eta(b,III)_1 \\
(IV,M) &= Q(M,a)_1 . \eta(a,IV)_1 + Q(M,b)_1 . \eta(b,IV)_1 \\
(V,M) &= Q(M,1)_1 . \eta(1,V)_1 + Q(M,2)_1 . \eta(2,V)_1 + Q(M,a)_1 . \eta(a,V)_1 \\
&\quad + Q(M,b)_1 . \eta(b,V)_1 \\
(VI,M) &= Q(M,1)_1 . \eta(1,VI)_1 + Q(M,a)_1 . \eta(a,VI)_1 + Q(M,b)_1 . \eta(b,VI)_1
\end{aligned}
$$

Die Ausdrücke (49) werden in die hier eingeführte Bezeichnung übersetzt,

$$
\begin{aligned}
(II,M,1) &= (II,M) + (I,M)(2)_1 \\
(III,M,1) &= (III,M) + (I,M)(3)_1 \\
(IV,M,1) &= (IV,M) + (I,M)(4)_1 \\
&\text{etc.} \qquad \text{etc.} \\
\hline
(III,M,2) &= (III,M,1) + (II,M,1)(3)_2 \\
(IV,M,2) &= (IV,M,1) + (II,M,1)(4)_2 \\
&\text{etc.} \qquad \text{etc.} \\
\hline
(IV,M,3) &= (IV,M,2) + (III,M,2)(4)_3 \\
&\text{etc.} \\
\hline
&\text{etc.} \\
\hline
\end{aligned}
$$

Der Ausdruck (50) wird hierauf

$$
S = \frac{(I,M)^2}{(I,I)} + \frac{(II,M,1)^2}{(II,II,1)} + \frac{(III,M,2)^2}{(III,III,2)} + \frac{(IV,M,3)^2}{(IV,IV,3)} + \frac{(V,M,4)^2}{(V,V,4)} + \frac{(VI,M,5)^2}{(VI,VI,5)}
$$

und das gesuchte Gewicht

$$
P = \frac{1}{R-S}
$$

Die Werthe der Coefficienten $(2)_1$, $(3)_1$, etc. etc., so wie die der Divisoren sind aus dem Art. 95 zu entnehmen. Die Rechnung gab

$$
\begin{aligned}
(I,M) &= -0.06807 \\
(II,M) &= +0.13625\,, & (II,M,1) &= +0.11935 \\
(III,M) &= -0.07048\,, & (III,M,2) &= -0.03216 \\
(IV,M) &= +0.00230\,, & (IV,M,3) &= -0.01778 \\
(V,M) &= +0.14168\,, & (V,M,4) &= +0.08552 \\
(VI,M) &= +0.06601\,, & (VI,M,5) &= -0.00222
\end{aligned}
$$

$$S = 0.06197$$

und aus diesen Werthen von R und S folgt

$$P = 13.46$$

welches das gesuchte Gewicht ist.

98.

Als zweites Beispiel soll der Winkel $(b)(1)(a)$ der Figur nebst dessen Gewicht berechnet werden. Der wahrscheinlichste Werth desselben wird sogleich nach Art. 96

$$(b)(1)(a) = 163^0\ 51'\ 53''111$$

und für das Gewicht wird zunächst

$$\Omega = \delta x(b) - \delta x(a)$$

folglich

$$k(a) = -1\ ,\quad k(b) = +1$$

$$\begin{aligned} (M,a)_1 &= k(a) &&= -1 \\ (M,b)_1 &= \varepsilon_1{}^{V} k(a) + k(b) &&= +(9.7022) \end{aligned}$$

$$R = 0.04723$$

$$\begin{aligned} (I,M) &= -0.00693 \\ (II,M) &= +0.001485\ , & (II,M,1) &= -0.000235 \\ (III,M) &= +0.00705\ \ , & (III,M,2) &= +0.006095 \\ (IV,M) &= +0.001105\ , & (IV,M,3) &= +0.001692 \\ (V,M) &= +0.007817\ , & (V,M,4) &= +0.005481 \\ (VI,M) &= +0.008728\ , & (VI,M,5) &= +0.001053 \end{aligned}$$

$$S = 0.00026$$

$$P = 21.29$$

99.

Als drittes Beispiel soll der Werth und das Gewicht des Winkels $(5)(2)(3)$ berechnet werden. Jenen bekommt man sogleich

$$(5)(2)(3) = x(3)_2 - x(2)_2 = 19^0\ 37'\ 0''922$$

und da hier

$$k(2)_2 = -1\ ,\quad k(3)_2 = +1$$

sind, so werden

$$(M,2)_2 = k(2)_2 = -1$$
$$(M,3)_2 = k(3)_2 = +1$$
$$(M,4)_2 = \beta'''_2 . k(2)_2 + \gamma'''_2 . k(3)_2 = +(9.6697)$$
$$R = 0.2255$$

$$(I,M) = 0$$
$$(II,M) = 0 \qquad (II,M,1) = 0$$
$$(III,M) = +0.06536\,, \qquad (III,M,2) = +0.06536$$
$$(IV,M) = -0.01841\,, \qquad (IV,M,3) = +0.00561$$
$$(V,M) = -0.4821\,, \qquad (V,M,4) = -0.4869$$
$$(VI,M) = -0.1774\,, \qquad (VI,M,5) = +0.0197$$
$$S = 0.1968$$
$$P = 34.8$$

100.

Als viertes Beispiel soll der Werth und das Gewicht des Winkels (5)(3)(2), welcher zu den nicht beobachteten gehört, berechnet werden. Dieser wird aus den beiden andern Winkeln des Dreiecks, dem er angehört, durch den folgenden Ausdruck gefunden

$$(5)(3)(2) = 180^0\ 0'\ 0''737 - x(3)_2 + x(2)_2 - x(3)_5 + x(1)_5$$

indem der sphärische Exces dieses Dreiecks $= 0''737$ ist. Die Angaben des Art. 96 geben

$$(5)(3)(2) = 53^0\ 41'\ 0''293$$

welches der wahrscheinlichste Werth dieses Winkels ist. Es wird nun

$$\Omega = \delta x(2)_2 - \delta x(3)_2 + \delta x(1)_5 - \delta x(3)_5$$

also

$$k(2)_2 = +1\,, \quad k(3)_2 = -1\,, \quad k(1)_5 = +1\,, \quad k(3)_5 = -1$$
$$(M,2)_2 = k(2)_2 = +1$$
$$(M,3)_2 = k(3)_2 = -1$$
$$(M,4)_2 = \beta'''_2 . k(2)_2 + \gamma'''_2 . k(3)_2 = -(9.66965)$$
$$(M,1)_5 = k(1)_5 = +1$$
$$(M,3)_5 = k(3)_5 = -1$$
$$R = 0.42647$$

ferner

$$
\begin{aligned}
(I,M) &= 0 \\
(II,M) &= -0.090456\,, & (II,M,1) &= -0.090456 \\
(III,M) &= -0.17595\,, & (III,M,2) &= -0.21144 \\
(IV,M) &= +0.018405\,, & (IV,M,3) &= -0.65216 \\
(V,M) &= +0.51198\,, & (V,M,4) &= +0.53574 \\
(VI,M) &= +0.17736\,, & (VI,M,5) &= +0.00323
\end{aligned}
$$

$$S = 0.36228$$
$$P = 15.58$$

Das Gewicht des beobachteten Winkels (3)(1)(5) wurde oben im Art. 97 = 13.44 gefunden, man sieht also hieraus, dass unter Umständen das Gewicht eines berechneten Winkels grösser werden kann wie das eines beobachteten.

101.

Da die Richtungen an sich unbestimmte Grössen sind, so kann eine Bestimmung der Gewichte derselben auch nicht stattfinden, die Formeln werden Zahlen geben, die als Gewichte plus einer unbestimmten Grösse gelten müssen, und ebenso verhält es sich mit den Anfangspunkten der Gyri, oder der Gruppen derselben. Aber die Aggregate $u(m)_s + x(r)_s$ sind bestimmte Grössen, und die Gewichte dieser lassen sich daher bestimmen. Es soll daher als erstes Beispiel dieser Gattung zunächst das Gewicht des Aggregats $u(1)_3 + x(1)_3$ berechnet werden. Da wir hier $x(1)_3$ statt $w(1)_3$ schreiben können, so geben die Gleichungen (65)

$$u(1)_3 + x(1)_3 = \tfrac{1}{2}x(1)_3 - \tfrac{1}{2}x(2)_3$$

und es wird daher die Function

$$\Omega = \tfrac{1}{2}\delta x(1)_3 - \tfrac{1}{2}\delta x(2)_3$$

folglich

$$k(1)_3 = +\tfrac{1}{2}\,, \quad k(2)_3 = -\tfrac{1}{2}$$

Hiemit ergeben sich

$$
\begin{aligned}
(M,1)_3 &= \tfrac{1}{2} \\
(M,2)_3 &= -\tfrac{1}{2} \\
(M,3)_3 &= 0
\end{aligned}
$$

woraus

$$R = 0.02242$$

hervorgeht. Ferner

$$
\begin{array}{llll}
(I,M) = +0.01808 & & & \\
(II,M) = -0.04484\,, & (II,M,1) & = & -0.04035 \\
(III,M) = 0 & (III,M,2) & = & -0.01358 \\
(IV,M) = 0 & (IV,M,3) & = & -0.00336 \\
(V,M) = 0 & (V,M,4) & = & +0.01680 \\
(VI,M) = 0 & (VI,M,5) & = & +0.00733
\end{array}
$$

$$S = 0.00758$$
$$P = 67.37$$

102.

Als zweites Beispiel soll das Gewicht des Aggregats $u(8)_2 + x(4)_2$ berechnet werden. Da hier

$$u(8)_2 = -\tfrac{1}{4}(x(1)_2 + x(2)_2 + x(3)_2 + x(4)_2)$$

ist, so wird

$$\Omega = -\tfrac{1}{4}\delta x(1)_2 - \tfrac{1}{4}\delta x(2)_2 - \tfrac{1}{4}\delta x(3)_2 + \tfrac{3}{4}\delta x(4)_2$$

also

$$k(1)_2 = -\tfrac{1}{4}\,, \quad k(2)_2 = -\tfrac{1}{4}\,, \quad k(3)_2 = -\tfrac{1}{4}\,, \quad k(4)_2 = +\tfrac{3}{4}$$

$$
\begin{array}{l}
(M,1)_2 = -\tfrac{1}{4} \\
(M,2)_2 = -\tfrac{1}{4} \\
(M,3)_2 = -\tfrac{1}{4} \\
(M,4)_2 = +0.7668 \\
R = 0.03926
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
(I,M) = 0 & & & \\
(II,M) = 0 & (II,M,1) & = & 0 \\
(III,M) = +0.00082\,, & (III,M,2) & = & +0.00082 \\
(IV,M) = -0.04040\,, & (IV,M,3) & = & -0.04010 \\
(V,M) = -0.09367\,, & (V,M,4) & = & -0.10645 \\
(VI,M) = -0.03285\,, & (VI,M,5) & = & +0.00702
\end{array}
$$

$$S = 0.01521$$
$$P = 41.58$$

103.

Als letztes Beispiel soll die Dreiecksseite Warte - Wachsenburg aus der als gegeben betrachteten Seite Seeberg - Inselsberg, nebst

dem Gewicht dieser Bestimmung berechnet werden, wobei in Metern ausgedrückt

$$\log (1)(3) = 4.3136765$$

angenommen werden soll. Aus der Figur des Art. 91 findet man leicht auf dem einfachsten Wege

$$(2)(4) = \frac{\sin [x(3)_1 - x(4)_1 - 0''140] \sin [x(3)_3 - x(2)_3 - 0''211]}{\sin [x(1)_2 - x(4)_2 - 0''140] \sin [x(2)_4 - x(1)_4 - 0''211]} (1)(3)$$

Die Zahlen 0″140 und 0″211 sind der dritte Theil der sphärischen Ueberschüsse der beiden in Betracht kommenden Dreiecke. Man hätte hier, gleichwie oben in den beiden letzten Bedingungsgleichungen geschehen ist, diesen weglassen können, wenn man statt der Seiten selbst ihre Sinusse angesetzt hätte, ich finde aber hier die Anwendung der Seiten selbst für einfacher. Die Substitution der obigen wahrscheinlichsten Werthe der Richtungen giebt nun zuerst

$$\log (2)(4) = 4.2713762.5$$

$$\text{Warte-Wachsenburg} = 18679^m972$$

Die Function Ω ist hier nicht unmittelbar gegeben, sondern wird durch die Differentiation des vorstehenden Ausdrucks für (2)(4) in Bezug auf die darin vorkommenden Richtungen erhalten. Zu dem Ende braucht man nur den numerischen Werth der rechten Seite derselben mit den Cotangenten der darin vorkommenden Winkel zu multipliciren, und um die Aenderungen in Bezug auf die Secunde zu erhalten, diese Produkte mit 206265″ zu dividiren; für die im Nenner vorkommenden Winkel müssen überdies die Zeichen umgekehrt werden. Auf diese Art ergab sich mit Weglassung des constanten Gliedes

$$\begin{aligned} \Omega = & -0^m004571\,\delta[x(3)_1 - x(4)_1] + 0^m19551\,\delta[x(3)_3 - x(2)_3] \\ & -0.08559\,\delta[x(1)_2 - x(4)_2] - 0.10665\,\delta[x(2)_4 - x(1)_4] \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck giebt

$$\begin{aligned} k(3)_1 &= -0.004571 & k(2)_3 &= -0.19551 \\ k(4)_1 &= +0.004571 & k(3)_3 &= +0.19551 \\ k(1)_2 &= -0.08859 & k(1)_4 &= +0.10665 \\ k(4)_2 &= +0.08859 & k(2)_4 &= -0.10665 \end{aligned}$$

Es werden ferner

$$\begin{aligned} (M,3)_1 &= k(3)_1 &&= -0.004571 \\ (M,4)_1 &= \gamma'''_1 \,.\, k(3)_1 + k(4)_1 &&= +0.004119 \\ (M,a)_1 &= \gamma''_1 \,.\, k(3)_1 + \delta''_1 \,.\, k(4) &&= +0.000605 \\ (M,b)_1 &= \gamma'_1 \,.\, k(3)_1 + \delta'_1 \,.\, k(4) &&= +0.000441 \end{aligned}$$

$$(M,1)_2 = k(1)_2 = -0.08859$$
$$(M,4)_2 = k(4)_2 = +0.08859$$
$$(M,2)_3 = k(2)_3 = -0.19551$$
$$(M,3)_3 = k(3)_3 = +0.19551$$
$$(M,1)_4 = k(1)_4 = +0.10665$$
$$(M,2)_4 = k(2)_4 = -0.10665$$

und hiemit

$$R = 0.0066477$$

Ferner

$$(I,M) = +0.005420$$
$$(II,M) = -0.007079 \quad (II,M,1) = -0.005733$$
$$(III,M) = +0.004679 \quad (III,M,2) = +0.003104$$
$$(IV,M) = -0.000596 \quad (IV,M,3) = +0.001449$$
$$(V,M) = +0.001966 \quad (V,M,4) = +0.005421$$
$$(VI,M) = +0.012427 \quad (VI,M,5) = +0.011940$$
$$S = 0.0037176$$

und das gesuchte Gewicht

$$P = 341.2$$

104.

Wenn in einem Dreiecksnetze mehr Winkel beobachtet worden sind, als hinreichend und nothwendig um nebst Einer Seite dieses Netz vollständig berechnen zu können, so können die verschiedenen Stücke desselben auf mehr wie Eine Art berechnet werden. Wenn aber die Winkel dem hier entwickelten Verfahren gemäss ausgeglichen worden sind, so muss jede mögliche Berechnungsart irgend eines Stückes dieses Dreiecksnetzes nicht nur auf den nemlichen Werth desselben hinführen, sondern auch das Gewicht der Bestimmung desselben muss bei jeder Berechnungsart denselben Werth bekommen. Um zu zeigen, dass dieses in der That der Fall ist, werde ich das erste und das letzte der vorhergehenden Beispiele auf andere Weise berechnen wie im Vorhergehenden geschehen ist.

Man findet leicht, dass man dem Ausdruck des Winkels (3)(1)(5) auch die folgende Form geben kann,

$$(3)(1)(5) = 180^0\ 0'\ 0''528 + x(1)_3 - x(2)_3 + x(2)_5 - x(3)_5$$

und es ist an sich klar, dass hieraus derselbe wahrscheinlichste Werth dieses Winkels hervorgehen muss wie oben. Wir brauchen uns daher nur mit der Berechnung des Gewichts dieser Bestimmung zu beschäftigen. Es werden hier

$$(M,1)_3 = k(1)_3 = +1$$
$$(M,2)_3 = k(2)_3 = -1$$
$$(M,2)_5 = k(2)_5 = +1$$
$$(M,3)_5 = k(3)_5 = -1$$

und hieraus findet sich zuerst

$$R = 0.23035$$

Ferner werden

$$\begin{array}{llll}
(I,M) = +0.03615 & & & \\
(II,M) = 0 & (II,M,1) & = & +0.00854 \\
(III,M) = +0.05025 & (III,M,2) & = & +0.05824 \\
(IV,M) = -0.23035 & (IV,M,3) & = & -0.20023 \\
(V,M) = +0.9275 & (V,M,4) & = & +4.274 \\
(VI,M) = 0 & (VI,M,5) & = & -0.112
\end{array}$$

$$S = 0.15613$$
$$P = 13.47$$

mit dem im Art. 97 erhaltenen Werthe übereinstimmend.

105.

Die Dreiecke unserer Figur geben die folgenden Gleichungen

$$x(3)_3 - x(2)_3 = 180^0\ 0'\ 0''634 - x(1)_1 + x(3)_1 - x(2)_4 + x(1)_4$$
$$x(1)_2 - x(4)_2 = 180^0\ 0'\ 0''420 + x(4)_1 - x(3)_1 - x(3)_4 + x(2)_4$$

und es ist klar, dass nach der Substitution dieser Ausdrücke in den Ausdruck für die Seite (2)(4) des Art. 103 genau derselbe Werth dieser Dreiecksseite wieder hervor gehen muss. Substituirt man aber diese Ausdrücke in den Ausdruck für Ω desselben Art., so bekommt man

$$\begin{aligned}
\Omega = & -0^m00457\delta[x(3)_1 - x(4)_1] \\
& -0.19551\delta[x(1)_1 - x(3)_1 - x(1)_4 + x(2)_4] \\
& +0.08859\delta[x(3)_1 - x(4)_1 - x(2)_4 + x(3)_4] \\
& +0.10665\delta[x(1)_4 - x(2)_4]
\end{aligned}$$

und es werden jetzt

$$\begin{aligned} k(1)_1 &= -0.19551 & k(1)_4 &= +0.30216 \\ k(3)_1 &= +0.27953 & k(2)_4 &= -0.39075 \\ k(4)_1 &= -0.08402 & k(3)_4 &= +0.08859 \end{aligned}$$

Hieraus ergaben sich

$$\begin{aligned} (M,1)_1 &= k(1)_1 && = -0.19551 \\ (M.3)_1 &= k(3)_1 && = +0.27953 \\ (M,4)_1 &= \gamma'''_1 \,.\, k(3)_1 + k(4)_1 && = -0.05880 \\ (M,a)_1 &= \gamma^{iv}_1 \,.\, k(3)_1 + \delta^{iv}_1 \,.\, k(4)_1 && = +0.05446 \\ (M,b)_1 &= \gamma^{v}_1 \,.\, k(3)_1 + \delta^{v}_1 \,.\, k(4)_1 && = +0.11661 \\ (M,1)_4 &= k(1)_4 && = +0.30216 \\ (M,2)_4 &= k(2)_4 && = -0.39075 \\ (M,3)_4 &= k(3)_4 && = +0.08859 \end{aligned}$$

$$R = 0.026806$$

ferner

$$\begin{aligned} (I,M) &= -0.085444 \\ (II,M) &= +0.013500 & (II,M,1) &= -0.007711 \\ (III,M) &= +0.003455 & (III,M,2) &= -0.010213 \\ (IV,M) &= +0.051544 & (IV,M,3) &= +0.027108 \\ (V,M) &= +0.022413 & (V,M,4) &= +0.005424 \\ (VI,M) &= +0.045048 & (VI,M,5) &= +0.011941 \end{aligned}$$

$$S = 0.023877$$
$$P = 341.3$$

mit dem Art. 103 bis auf 0.1 übereinstimmend.

106.

Ein ganz anderer Ausdruck für dieselbe Dreiecksseite ist der folgende,

$$(2)(4) = \frac{\sin[x(2)_2 - x(4)_2 + x(3)_4 - x(1)_4 - 0''904] \sin[x(4)_1 - x(1)_1 - 0''400]}{\sin[x(3)_4 - x(1)_4 - 0''452] \sin[x(2)_2 - x(1)_2 - 0''100]} (1)(3)$$

der auch aus der Figur leicht zu erhalten ist. Substituirt man hierin die wahrscheinlichsten Werthe der Richtungen, so bekommt man

$$\log (2)(4) = 4.2713762.8$$
$$(2)(4) = 18679^m973$$

bis auf Unbedeutendes wie oben. Es wird aber jetzt

$$\Omega = 18679^m973 - 0^m12841\delta[x(2)_2 - x(4)_2 + x(3)_4 - x(1)_4]$$
$$- 0.17251\delta[x(4)_1 - x(1)_1]$$
$$- 0.01303\delta[x(3)_4 - x(1)_4]$$
$$- 0.28973\delta[x(2)_2 - x(1)_2]$$

und folglich

$$k(1)_1 = +0.17251 \qquad k(4)_2 = +0.12841$$
$$k(4)_1 = -0.17251 \qquad k(1)_4 = +0.14144$$
$$k(1)_2 = +0.28973 \qquad k(3)_4 = -0.14144$$
$$k(2)_2 = -0.41814$$

Hieraus bekommt man

$$(M,1)_1 = k(1)_1 = +0.17251$$
$$(M,4)_1 = k(4)_1 = -0.17251$$
$$(M,a)_1 = \delta''_1 \,.\, k(4)_1 = -(8.90693)$$
$$(M,b)_1 = \delta'_1 \,.\, k(4)_1 = -(9.10265)$$
$$(M,1)_2 = k(1)_2 = +0.28973$$
$$(M,2)_2 = k(2)_2 = -0.41814$$
$$(M,4)_2 = \beta'''_2 k(2)_2 + k(4)_2 = +(9.38049)$$
$$(M,1)_4 = k(1)_4 = +0.14144$$
$$(M,3)_4 = k(3)_4 = -0.14144$$
$$R = 0.042766$$

$$(I,M) = +0.008179$$
$$(II,M) = -0.011346 \qquad (II,M,1) = -0.009316$$
$$(III,M) = -0.032856 \qquad (III,M,2) = -0.035492$$
$$(IV,M) = +0.000005 \qquad (IV,M,3) = -0.011716$$
$$(V,M) = -0.223522 \qquad (V,M,4) = -0.218549$$
$$(VI,M) = -0.117261 \qquad (VI,M,5) = -0.003109$$
$$S = 0.039833$$
$$P = 341.2$$

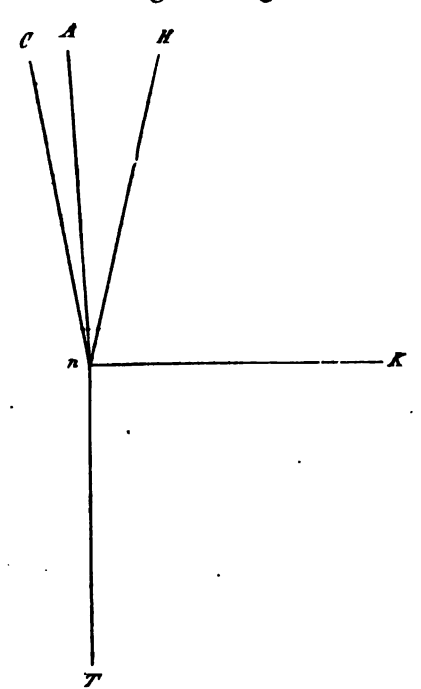
mit den vorhergehenden Bestimmungen dieses Gewichts übereinstimmend. Ich mache darauf aufmerksam, dass in allen diesen Gewichten eine einzelne Beobachtung irgend einer Richtung die Einheit bildet.

107.

Um auch den Inhalt des Art. 81 durch ein Beispiel zu erläutern soll die Maupertuis'sche Gradmessung dienen, die ich bekanntlich kurz

nach dem Erscheinen der Gaussischen, oben mehrmals angezogenen Abhandlung theils nach dem in dieser gegebenen Verfahren, theils nach einem eigenthümlichen, welches mit dem hier im Art. 28 u. f. erklärten identisch ist, berechnet habe. Bei dieser Gradmessung sind im Ganzen 18 Bedingungsgleichungen vorhanden, und ich habe daher, den Gaussischen Vorschriften folgend, ein System von 18 Gleichungen auflösen müssen. Unter diesen Gleichungen befinden sich aber vier locale, und zwar die, welche ich mit *J*, *L*, *M*, *O* bezeichnet habe*), und die dem Art. 81 zufolge von den übrigen getrennt werden können. Wenn ich damals diesen Satz angewandt hätte, so hätte ich ein System von nur 14 Gleichungen aufzulösen, und daher eine weit kürzere Rechnung gehabt.

Es gnügt für den hier zu verfolgenden Zweck blos Eine Station dieser Gradmessung zu behandeln, und hiefür wähle ich diejenige aus, die Rosenberger mit *n* bezeichnet hat**). Die auf dieser Station gemessenen Winkel lassen sich durch die folgende Figur anschaulich machen,



und haben nach der Reduction derselben auf den Horizont die folgenden Werthe,

*) S. Schum. Astr. Nachr. B. IX. p. 215.

**) S. Schum. Astr. Nachr. B. VI. Nr. 121 u. 122.

$$CnH = 31^\circ 57' \; 3''63$$
$$AnH = 21 \; 32 \; 16.30$$
$$AnK = 95 \; 29 \; 54.43$$
$$HnK = 73 \; 58 \; \; 5.64$$
$$KnT = 87 \; 44 \; 19.40$$

Man sieht, dass zwischen diesen Winkeln eine Bedingungsgleichung vorkommt, zufolge welcher

$$AnK = AnH + HnK$$

sein muss, und es ist diese die ich a. a. Orte mit J bezeichnet habe. Ich bezeichne nun die fünf Richtungen nC, nA, nH, nK, nT, bez. mit (1), (2), (3), (4), (5), nehme dafür die vorläufigen Werthe

$$(1) = 0^\circ \; 0' \; 0''$$
$$(2) = 10 \; 24 \; 47.33$$
$$(3) = 31 \; 57 \; \; 3.63$$
$$(4) = 105 \; 55 \; \; 9.27$$
$$(5) = 193 \; 39 \; 28.67$$

an, und bilde, indem ich die daraus folgenden Winkel von den beobachteten abziehe, wie oben erklärt worden ist, die folgenden Werthe der l, und zugleich lege ich jeder Richtung das Gewicht $= 1$ bei. Hiemit entsteht die folgende Tafel, die den bez. zweiten Tafeln des vorhergehenden Beispiels ähnlich ist.

Nr.	(2)	(3)	(4)	(5)	(1)	p	P
1		0″00			0″00	1	2
2	0″00	0.00				1	2
3		0.00	0″00			1	2
4			0.00	0″00		1	2
5	+13.755		−13.755			1	2
(lx)	+13″755	0″00	−13″755	0″00	0″00		10
Q	2	3	3	1	1		

Der Richtung (1) ist deshalb der letzte Platz gegeben worden, weil sonst nicht die im Art. 76 bezeichneten Coefficienten hätten Null gemacht werden können. Durch die Ausdrücke des gen. Art. findet sich nun

$$(pp) = 1, \quad (pp') = \tfrac{1}{2}, \quad (pp'') = \tfrac{1}{2}, \quad (pp''') = 0, \quad (pp^{IV}) = 0$$
$$(p'p') = \tfrac{3}{2}, \quad (p'p'') = \tfrac{1}{2}, \quad (p'p''') = 0, \quad (p'p^{IV}) = \tfrac{1}{2}$$
$$(p''p'') = \tfrac{3}{2}, \quad (p''p''') = \tfrac{1}{2}, \quad (p''p^{IV}) = 0$$
$$(p'''p''') = \tfrac{1}{2}, \quad (p'''p^{IV}) = 0$$
$$(p^{IV}p^{IV}) = \tfrac{1}{2}$$

$$N = N' = N'' = \sqrt{\tfrac{1}{2}}, \quad N''' = N^{IV} = 0$$

$$(aa) = 1{,}5, \; (ab) = 0, \; (ac) = 0, \; (ad) = 0, \; (ae) = 0, \; (al) = +13''755$$
$$(bb) = 2, \; (bc) = 0, \; (bd) = 0, \; (be) = -0.5, \; (bl) = 0$$
$$(cc) = 2, \; (cd) = -0.5, \; (ce) = 0, \; (cl) = -13.755$$
$$(dd) = 0.5, \; (de) = 0, \; (dl) = 0$$
$$(ee) = 0.5, \; (el) = 0$$
$$(ll) = 378.4$$

und hiemit

$$(bb,1) = 2, \quad (bl,1) = 0$$
$$(cc,2) = 5, \quad (cl,2) = -13''755$$
$$(dd,3) = 0.375, \quad (dl,3) = -3.438$$
$$(ee,4) = 0.375, \quad (el,4) = 0$$
$$(ll,5) = 126.4$$

$$\log\chi' = 0.9622n, \quad \log\chi''' = 0.8373, \quad \log\chi^{IV} = 0{,}9623$$
$$\log\delta'' = 9.3980, \quad \log\gamma''' = 9.3980, \quad \log\beta^{IV} = 9.3980$$

und alle übrigen Grössen dieser Gattung sind Null. Hieraus folgen nun die Verbesserungen

$$w(1) = 0$$
$$w(2) = +9''17$$
$$w(3) = 0$$
$$w(4) = -9.17$$
$$w(5) = -9.17$$

Addirt man diese zu den angenommenen Werthen der Richtungen, so erhält man diese wie folgt

$$y(1) = 0^{0}\ 0'\ 0''$$
$$y(2) = 10\ 24\ 56.50$$
$$y(3) = 31\ 57\ 3.63$$
$$y(4) = 105\ 55\ 0.10$$
$$y(5) = 193\ 39\ 19.50$$

die nebst den obigen Werthen von (aa), $(bb,1)$, $(cc,2)$, etc und β^{IV}, γ''', δ'', in dem zweiten Theil der Auflösung anzuwenden sind. Aus den

vorstehenden Werthen der y erkennt man leicht, wie vorher gesehen werden konnte, dass die Winkel $CnH = (3) - (1)$ und $KnT = (5) - (4)$ unverändert geblieben sind, und die Verbesserungen sich zu gleichen Theilen, aber mit verschiedenen Zeichen, auf die übrigen drei Winkel erstrecken. Wenn auf einer Station mehr wie Eine locale Bedingungsgleichung vorhanden ist, dann findet der letzt genannte Umstand nicht mehr statt.

In unserem Beispiel kommen ausserdem noch drei Stationen vor, die auf dieselbe Weise behandelt werden können, so dass, wie oben angeführt, in dem zweiten Theil der Auflösung nur ein System von 14 Gleichungen aufzulösen ist, wodurch die Arbeit wesentlich abgekürzt wird. Es ist noch zu bemerken, dass auf den Stationen, auf welchen keine locale Bedingungsgleichungen vorhanden sind, die Winkel als Unbekannte beibehalten werden können, und nicht in die Richtungen aufgelöst zu werden brauchen, nur muss man, wenn übrigens alle Beobachtungen für gleich gut gehalten werden können, das Gewicht der Winkel $= \frac{1}{2}$ setzen, wenn wie oben das Gewicht der Richtungen $= 1$ angenommen worden ist.

b) Zweites Verfahren.

108.

Das im Vorhergehenden gegebene Verfahren zur Ausgleichung der Winkel eines Dreiecksnetzes ist einer Abänderung fähig, die ich nicht unterlassen will hinzuzufügen.

Wenden wir uns zu den Gleichungen (61) des Art. 69, und entfernen in den Ausdrücken der Coefficienten derselben Alles, was sich auf die Bedingungsgleichung (56) bezieht, mit anderen Worten, setzen wir darin $N = N' = N'' = \text{etc.} = 0$, hierauf werden

$$
\begin{aligned}
(aa) &= Q - (pp) \\
(ab) &= \quad\;\, - (pp') \\
(ac) &= \quad\;\, - (pp'') \\
&\text{etc.} \\
(al) &= (lx) \\
\hline
(bb) &= Q' - (p'p') \\
(bc) &= \quad\;\, - (p'p'') \\
&\text{etc.} \\
(bl) &= (lx') \\
\hline
\end{aligned}
$$

$$(cc) = Q'' - (p''p'')$$
etc.
$$(cl) = (lx'')$$
etc.

wo (pp), (pp'), etc. dieselben sind wie vorher. Aber aus dem Art. 71 folgt jetzt

$$\begin{aligned} (aa) + (ab) + (ac) + \dots &= 0 \\ (ab) + (bb) + (bc) + \dots &= 0 \\ (ac) + (bc) + (cc) + \dots &= 0 \\ \text{etc.} \qquad & \text{etc.} \end{aligned}$$

und zufolge des Art. 68 ist

$$(lx) + (lx') + (lx'') + \dots = 0$$

Die Summe der Gleichungen (61) ist also identisch Null, woraus folgt, dass jede derselben in den übrigen enthalten ist. Die (61) kann man aber auch wie folgt schreiben,

$$\begin{aligned} \{(aa) + (ab) + (ac) + \dots\}x + (ab)(x'-x) + (ac)(x''-x) + \dots &= (lx) \\ \{(ab) + (bb) + (bc) + \dots\}x + (bb)(x'-x) + (bc)(x''-x) + \dots &= (lx') \\ \{(ac) + (bc) + (cc) + \dots\}x + (bc)(x'-x) + (cc)(x''-x) + \dots &= (lx'') \\ \text{etc.} \qquad & \text{etc.} \end{aligned}$$

Zufolge der obigen Bedingungsgleichungen sind hier alle Coefficienten von x gleich Null, x verschwindet daher aus diesen Gleichungen, und bleibt völlig willkührlich, wie auch die Natur der Sache mit sich bringt. Es entsteht hiemit ein System von Gleichungen, welches nur die Unterschiede $x'-x$, $x''-x$, etc. enthält, und von welchen wieder jede in den übrigen enthalten ist. Denn mit Zuziehung der vorstehenden Bedingungsgleichungen erkennt man, dass auch nach der Entfernung der mit x multiplicirten Glieder die Summe der Gleichungen identisch Null ist. Aber jetzt ist die Anzahl der Gleichungen um Eins grösser wie die Anzahl der Unbekannten, und man kann also Eine Gleichung weglassen. Lässt man die erste weg, so bekommt man das System

$$\left.\begin{aligned} (bb)(x'-x) + (bc)(x''-x) + (bd)(x'''-x) + \dots &= (lx') \\ (bc)(x'-x) + (cc)(x''-x) + (cd)(x'''-x) + \dots &= (lx'') \\ (bd)(x'-x) + (cd)(x''-x) + (dd)(x'''-x) + \dots &= (lx''') \\ \text{etc.} \qquad & \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad (67)$$

aus welchem auf dieselbe Art wie vorher die Unbekannten $x'-x$, $x''-x$, $x'''-x$. etc. bestimmt werden können.

109.

Bei der Anwendung der Gleichungen (67) sind auf jeder Station wieder dieselben Täfelchen zu bilden, wie im Art. 84 u. d. f., auch sind die Grössen (pp), (pp'), etc nebst (ll) ganz eben so zu bilden wie vorher, nur die Coefficienten (bb), (bc), etc. sind nach den Ausdrücken des vor. Art. zu berechnen, und man kann statt dieser Bezeichnung sogleich (2,2,1), (2,3,1), (3,3,2), etc. etc. einführen. Es wird dadurch eine Uebereinstimmung mit dem Vorhergehenden zu Wege gebracht. Die Rechnung giebt wieder die Grössen die im Vorhergehenden mit $w(r)_s$ und $y(r)_s$ bezeichnet wurden, wenn man auf jeder Station, in Bezug auf die Richtungen, deren Verbesserung eliminirt worden ist, jene Null macht, oder diese Richtung so lässt wie man sie vorläufig angenommen hat.

Da in den Bedingungsgleichungen, die das Dreiecksnetz liefert nur Unterschiede der Richtungen vorkommen, so sind jetzt in den Differentialen derselben die Coefficienten der eben bezeichneten Richtungen gleich Null zu machen, und die Folge davon ist, dass auch die betreffenden zweiten, mit $z(r)_s$ bezeichneten, Verbesserungen Null werden.

110.

Es scheint mir angemessen das im Vorhergehenden ausgeführte Beispiel auch durch das hier gegebene Verfahren zu behandeln, wobei es aber gnügen wird, die einzelnen Resultate kurz anzugeben.

Resultate der Ausgleichung auf den Stationen.

Station (1).

	$y(1)_1 =$	63°14′10″000
$w(2)_1 = +$ 1″549,	$y(2)_1 =$	96 29 53.549
$w(3)_1 = +$ 0.483,	$y(3)_1 =$	308 51 37.483
$w(4)_1 = -$ 0.134,	$y(4)_1 =$	215 58 16.866
$w(a)_1 = +$ 0.617,	$y(a)_1 =$	106 5 29.617
$w(b)_1 = -$ 0.302,	$y(b)_1 =$	269 57 22.698

$(ll,6) = 132.862$

$\beta_1'' = +(9.17609)$

$\beta_1''' = +(8.14082)$, $\gamma_1''' = +(8.96473)$

$\beta_1^{IV} = +(9.51809)$, $\gamma_1^{IV} = +(9\ 62332)$, $\delta_1^{IV} = +(9.68218)$

$\beta_1^{V} = +(9.66883)$, $\gamma_1^{V} = +(9.92410)$, $\delta_1^{V} = +(9.94563)$, $\varepsilon_1^{V} = +(9.89042)$

$(2,2,1)_1 = 10.0 \qquad (a,a,4)_1 = (1.39590)$

$(3,3,2)_1 = (1.33630), \quad (b,b,5)_1 = (0.84881)$

$(4,4,3)_1 = (1.10206),$

Station (2).

$y(1)_2 = 27^\circ 55' \; 7''000$

$w(2)_2 = +0''302, \quad y(2)_2 = 45 \; 16 \; 35.302$

$w(3)_2 = +1.301, \quad y(3)_2 = 64 \; 53 \; 37.301$

$w(4)_2 = -0.171, \quad y(4)_2 = 342 \; 17 \; 11.829$

$(ll,4) = 14.077$

$\beta_2'' = +(9.43573), \quad \beta_2''' = +(9.57719), \quad \gamma_2''' = +(9.78336)$

$(2,2,1)_2 = (0.74036), \quad (3,3,2)_2 = (1.12788), \quad (4,4,3)_2 = (1.09584)$

Station (3).

$y(1)_3 = 179^\circ 43' \; 9''000$

$w(2)_3 = -0''319, \quad y(2)_3 = 243 \; 45 \; 34.681$

$w(3)_3 = -0.102, \quad y(3)_3 = 268 \; 36 \; 49.898$

$(ll,3) = 2.121$

$\beta_3'' = +(9.61881)$

$(2,2,1)_3 = (1.17124), \quad (3,3,2)_3 = (0.89040)$

Station (4).

$y(1)_4 = 88^\circ 37' 44''000$

$w(2)_4 = -1''165, \quad y(2)_4 = 128 \; 57 \; 58.835$

$w(3)_4 = +0.679, \quad y(3)_4 = 170 \; 26 \; 40.679$

$(ll,3) = 14.685$

$\beta_4'' = (9.64573)$

$(2,2,1)_4 = (0.93785), \quad (3,3,2)_4 = (0.69646)$

Station (5).

$y(1)_5 = 252^\circ 59' 37''000$

$w(2)_5 = -1''528, \quad y(2)_5 = 276 \; 32 \; 45.472$

$w(3)_5 = +0.781, \quad y(3)_5 = 359 \; 40 \; 37.781$

$(ll,3) = 6.652$

$\beta_5'' = (9.74036)$

$(2,2,1)_5 = (1.00000), \quad (3,3,2)_5 = (0.69680)$

Die Werthe der Winkel, die sich aus den vorstehenden Richtungen ergeben, so wie die Summen der Fehlerquadrate stimmen mit denen, die die vorhergehende Methode ergeben hat, überein, wie aus der Vergleichung mit dem Art. 89 hervorgeht; die Werthe der Hülfsgrössen sind verschieden, wie nicht anders sein kann.

111.

Die Berechnung der $u(m)_s$ geschieht hier durch denselben Ausdruck wie im vorhergehenden Verfahren, nemlich durch

$$u(m)_s = -\frac{p_{m-1}}{P_{m-1}} \Sigma w(r)_s$$

wobei hier ausser den im Art. 90 beigefügten Bemerkungen noch angeführt werden kann, dass jetzt in diesem Ausdruck immer $w(1)_s = 0$ zu setzen ist. Dieselben a. a. O. angeführten Beispiele geben hier

$$\begin{array}{lll}
u(1)_1 = -0''158\,, & u(1)_2 = -0''151\,, & u(1)_3 = +0''160 \\
u(9)_1 = -0.708\,, & u(4)_2 = -0.565\,, & u(4)_3 = +0.140 \\
u(14)_1 = -0.322\,, & u(8)_2 = -0.358\,, & \\
u(21)_1 = -0.508\,, & &
\end{array}$$

die gleichwie die $w(r)_s$ und $y(r)_s$ von denen des ersten Verfahrens verschieden sind. Aber aus demselben Grunde, aus welchem in beiden Verfahren die Unterschiede der $y(r)_s$ einander gleich sein müssen, müssen auch die Aggregate $u(m)_s + w(r)_s$, die denselben Gruppen von Gyris angehören, in beiden Verfahren einander gleich werden, die Richtung mag in der betr. Gruppe beobachtet sein, oder nicht. Z. B.

Erstes Verfahren.	Zweites Verfahren.
$u(1)_1 + w(a)_1 = +0''571 - 0''111 = +0''460$	$= -0''158 + 0''617 = +0''459$
$u(1)_1 + w(b)_1 = +0.571 - 1.030 = -0.459$	$= -0.158 - 0.302 = -0.460$
$u(1)_1 + w(1)_1 = +0.571 - 0.728 = -0.157$	$= -0.158 \quad 0 \quad = -0.158$
$u(1)_1 + w(2)_1 = +0.571 + 0.821 = +1.392$	$= -0.158 + 1.549 = +1.391$
$u(1)_1 + w(3)_1 = +0.571 - 0.245 = +0.326$	$= -0.158 + 0.483 = +0.325$
$u(1)_1 + w(4)_1 = +0.571 - 0.862 = -0.291$	$= -0.158 - 0.134 = -0.292$
$u(21)_1 + w(1)_1 = +0.220 - 0.728 = -0.508$	$= -0.508 \quad 0 \quad = -0.508$
$u(1)_2 + w(1)_2 = +0.062 - 0.213 = -0.151$	$= -0.151 \quad 0 \quad = -0.151$
$u(1)_2 - w(3)_2 = +0.062 + 1.087 = +1.149$	$= -0.151 + 1.301 = +1,150$

Nicht nur die Aggregate $u(m)_s + x(r)_s$, sondern auch die $u(m)_s$ selbst sind bei dem gegenwärtigen Verfahren eben so wie die Winkel, oder die Unterschiede der Richtungen, bestimmte Grössen.

112.

Die Bedingungsgleichungen bleiben nun eben so wie sie im Art. 91 aufgestellt worden sind, und nach der Substitution der vorstehenden Werthe der $y(r)_s$, ergeben sich dieselben Werthe der $F(I)$, $F(II)$, etc.

Die Differentiale der Bedingungsgleichungen, die im Art. 92 enthalten sind, erleiden daher keine weiteren Veränderungen als dass die Glieder, die mit $\delta(1)_1$, $\delta(1)_2$, $\delta(1)_3$, $\delta(1)_4$, $\delta(1)_5$ multiplicirt sind, wegfallen. In der im Art. 93 gegebenen Zusammenstellung der Coefficienten dieser Gleichungen muss man jetzt die erste Zeile jeder Abtheilung der Tafel sich hinweg denken. Zur Berechnung der $\eta(r,I)_s$ ergeben sich jetzt die folgenden Ausdrücke, die mehr oder minder abgekürzt, auf allen Stationen Geltung haben, und durch die Vertauschung der Zahl I mit II, III, etc. auf alle Bedingungsgleichungen anzuwenden sind.

$$\eta(2,I)_s = q(2,I)_s$$
$$\eta(3,I)_s = \beta_s''.q(2,I)_s + q(3,I)_s$$
$$\eta(4,I)_s = \beta_s'''.q(2,I)_s + \gamma_s'''.q(3,I)_s + q(4,I)_s$$
$$\eta(a,I)_s = \beta_s^{IV}.q(2,I)_s + \gamma_s^{IV}.q(3,I)_s + \delta_s^{IV}.q(4,I)_s$$
$$\eta(b,I)_s = \beta_s^{V}.q(2,I)_s + \gamma_s^{V}.q(3,I)_s + \delta_s^{V}.q(4,I)_s$$

Die beiden letzten kürzen sich ab, weil $q(a,I)$ und $q(b,I)$ Null sind. Die Rechnung gab

r	s	$\log\eta(r,I)_s$	$\log\eta(r,II)_s$	$\log\eta(r,III)_s$	$\log\eta(r,IV)_s$	$\log\eta(r,V)_s$	$\log\eta(r,VI)_s$
2	1	—	0.	0. n	—	9.81470	—
3		0. n	9.17609	9.17609n	0.	8.99079	9.28926
4		8.96417n	8.14082	9.99395	9.95799n	9.90910	9.91385
a		9.62332n	9.51809	9.18002	8.78509n	9.77889	9.66989
b		9.92410n	9.66883	9.61894	8.63010n	0.00527	9.94010
2	2	—	—	—	—	0.40289	0.05406
3		—	—	0.	—	9.69181n	9.48979
4		—	—	9.78336	0. n	9.37606	9.80784
2	3	0. n	0.	—	—	—	—
3		9.76662	9.61881	—	—	—	—
2	4	0.	—	—	0. n	—	9.69538n
3		9.64573	—	—	9.74639	—	9.20078n
2	5	—	0. n	0.	—	9.70523	-
3		—	9.65322	9.74036	—	9.17325n	-

113.

Zur Berechnung der $f(r,I)_s$, etc. dienen jetzt die folgenden allgemeinen Ausdrücke,

$$f(2.I)_s = Q(2,I)_s + \beta_s''.Q(3,I)_s + \beta_s'''.Q(4,I)_s + \beta_s^{IV}.Q(a,I)_s + \beta_s^{V}.Q(b,I)_s$$
$$f(3,I)_s = Q(3,I)_s + \gamma_s'''.Q(4,I)_s + \gamma_s^{IV}.Q(a,I)_s + \gamma_s^{V}.Q(b,I)_s$$
$$f(4,I)_s = Q(4,I)_s + \delta_s^{IV}.Q(a,I)_s + \delta_s^{V}.Q(b,I)_s$$
$$f(a,I)_s = Q(a,I)_s + \varepsilon_s^{V}.Q(b,I)_s$$
$$f(b,I)_s = Q(b,I)_s$$

in welchen die $Q(2,I)_s$, etc. dieselbe Bedeutung haben wie in dem ersten Verfahren, und die auch auf alle Bedingungsgleichungen auszudehnen sind. Für das Beispiel ergab sich

r	s	$\log Q(r,I)_s$	$\log Q(r,II)_s$	$\log Q(r,III)_s$	$\log Q(r,IV)_s$	$\log Q(r,V)_s$	$\log Q(r,VI)_s$
2	1	—	9.00000	9.00000n	—	8.81470	—
3		8.66370n	7.83979	7.83979n	8.66370	7.65449	7.95296
4		7.86211n	7.03876	8.89189	8.85593n	8.80704	8.81179
a		8.22742n	8.12219	7.78412	7.38919n	8.38299	8.27399
b		9.07529n	8.82002	8.77013	7.78129n	9.15646	9.09129
2	2	—	—	—	—	9.66253	9.31370
3		—	—	9.25964	—	8.56393n	8.36191
4		—	—	8.68752	8.90416n	8.28022	9.71200
2	3	8.82876n	8.82876	—	—	—	—
3		8.87622	8.72841	—	—	—	—
2	4	9.06215	—	—	9.06215n	—	8.75753n
3		8.94927	—	—	9.04993	—	8.50432n
2	5	—	9.00000n	9.00000	—	6.70523	—
3		—	8.95642	9.04356	—	8.47645n	—

r	s	$\log f(r,I)_s$	$\log f(r,II)_s$	$\log f(r,III)_s$	$\log f(r,IV)_s$	$\log f(r,V)_s$	$\log f(r,VI)_s$
2	1	8.83288n	9.13431	8.84806n	7.36078	9.15129	8.81953
3		9.18673n	8.83288	8.71839	8.52349	9.14907	9.10192
4		9.08039n	8.81798	9.12339	8.89365n	9.30588	9.26185
a		9.03858n	8.81015	8.71475	7.85406n	9.13210	9.05945
b		9.07529n	8.82002	8.77013	7.78129n	9.15646	9.09129
2	2	—	—	8.58784	8.48134n	9.65988	9.36485
3		—	—	9.01731	8.68752n	8.39901n	8.73477
4		—	—	8.68752	8.90416n	8.28022	8.71200
2	3	8.55814n	8.95260	—	—	—	—
3		8.87622	8.72841	—	—	—	—
2	4	9.18960	—	—	8.81799n	—	8.85336n
3		8.94927	—	—	9.04993	—	8.50432n
2	5	—	8.70116n	9.20629	—	8.05697n	—
3		—	8.95642	9.04356	—	8.47645n	—

114.

Die Berechnung der Coefficienten der Endgleichungen wird hier eben so ausgeführt wie in dem ersten Verfahren. Es ergab sich

i	(i,I)	(i,II)	(i,III)	(i,IV)	(i,V)	(i,VI)
I	0.41981	—0.10421	—0.05229	—0.09915	—0.14096	—0.19780
II		0.36660	—0.12073	+0.00229	+0.12312	+0.06600
III			0.46821	—0.12928	+0.02412	+0.17104
IV				0.36980	—0.08036	—0.06841
V					1.44453	+0.71131
VI						0.47808

Vergleicht man diese Coefficienten mit denen des Art. 95, die das erste Verfahren gegeben hat, so wird man finden, dass sie, abgesehen von den kleinen Unterschieden der letzten Stelle, die von den Fehlern der letzten Stelle der angewandten Logarithmen herrühren, mit diesen identisch sind, obgleich die Hülfsgrössen, die zu ihrer Berechnung gedient haben, in beiden Verfahren sehr von einander verschieden sind. Es ist dieses kein Zufall, sondern es lässt sich leicht zeigen, dass die Endgleichungen identisch dieselben werden müssen, wie man auch das vorhergehende Verfahren eingerichtet haben mag.

Wir brauchen also die Endgleichungen nicht von Neuem aufzulösen, sondern die Werthe der Unbekannten (I), (II), etc., die im Art. 95 gefunden wurden, haben auch hier Geltung.

Auch die Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Fehlerquadrate wird dieselbe, die durch das erste Verfahren gefunden wurde.

115.

Um die Werthe der letzten Verbesserungen $z(r)_s$ zu finden, dient nun wieder die allgemeine Gleichung

$$z(r)_s = f(r,I)_s.(I) + f(r,II)_s.(II) + f(r,III)_s.(III) + \dots$$

in welcher aber die Werthe der $f(r,I)_s$, etc. angewandt werden müssen, die das gegenwärtige Verfahren gegeben hat. Es folgt von selbst daraus, dass alle $z(1)_s = 0$ sind. Wir bekommen nun

$z(2)_1 = -0''033\,,\quad z(2)_2 = -0''585\,,\quad z(2)_3 = +0''488$
$z(3)_1 = -0.547\,,\quad z(3)_2 = +0.490\,,\quad z(3)_3 = +0.546$
$z(4)_1 = +0.352\,,\quad z(4)_2 = +0.404$
$z(a)_1 = -0.144$
$z(b)_1 = -0.174$
$z(2)_4 = +1''332\,,\quad z(2)_5 = +0''703$
$z(3)_4 = -0.153\,,\quad z(3)_5 = +1.258$

und zieht man diese von den im Art. 110 enthaltenen Werthen der $y(r)_s$ ab, so ergeben sich die folgenden wahrscheinlichsten Werthe der Richtungen,

$x(1)_1 = 63^0 14' 10''000\,,\quad x(1)_2 = 27^0 55'\ 7''000$
$x(2)_1 = 96\ 29\ 53.582\,,\quad x(2)_2 = 45\ 16\ 35.887$
$x(3)_1 = 308\ 51\ 38.030\,,\quad x(3)_2 = 64\ 53\ 36.811$
$x(4)_1 = 215\ 58\ 16.514\,,\quad x(4)_2 = 342\ 17\ 11.425$
$x(a)_1 = 106\ \ 5\ 29.761\,,$
$x(b)_1 = 269\ 57\ 22.872\,,$

$x(1)_3 = 179^0 43'\ 9''000\,,\quad x(1)_4 = 88^0 37' 44''000$
$x(2)_3 = 243\ 45\ 34.193\,,\quad x(2)_4 = 128\ 57\ 57.503$
$x(3)_3 = 268\ 36\ 49.352\,,\quad x(3)_4 = 170\ 26\ 40.832$

$x(1)_5 = 252^0 59' 37''000$
$x(2)_5 = 276\ 32\ 44.769$
$x(3)_5 = 359\ 40\ 36.523$

Vergleicht man die hieraus folgenden Winkel mit denen des Art. 96, die durch das erste Verfahren erhalten worden sind, so wird man eine Uebereinstimmung finden, die nichts zu wünschen übrig lässt.

Will man auch die wahrscheinlichsten Werthe der $u(m)_s$ kennen lernen, so dient dazu wieder der Ausdruck

$$u(m)_s = \frac{p_{m-1}}{P_{m-1}} \Sigma (z(r)_s - w(r)_s)\,,$$

für welchen die Bemerkungen des Art. 111 wieder gelten.

116.

Die Berechnung der Gewichte ist bei dem gegenwärtigen Verfahren im Allgemeinen dieselbe wie beim ersten Verfahren, nur findet in Bezug auf die der Winkel $x(r)_s - x(1)_s$ eine Ausnahme statt. Da diese Winkel gegenwärtig die Unbekannten selbst sind, so fällt die Berech-

nung der Grössen in deren Bezeichnung M vorkommt weg, und es ist nach den Ausdrücken der Artt. 44 u. 48 zu verfahren.

Als Beispiel soll hier das Gewicht des Winkels

$$x(2)_1 - x(1)_1$$

berechnet werden, welches im Art. 97 nach dem ersten Verfahren schon berechnet wurde. In der hier eingeführten Bezeichnung giebt der Art. 44 sogleich

$$\pi(2)_1 = \frac{1}{(2,2,1)_1} + \frac{\beta_1''^2}{(3,3,2)_1} + \frac{\beta_1'''^2}{(4,4,3)_1} + \frac{\beta_1^{\prime v 2}}{(a,a,4)_1} + \frac{\beta_1^{v2}}{(b,b,5)_1}$$

und aus dem Art. 48 bekommt man

$$\begin{array}{rcl}
f(2,II,1)_1 & = & f(2,II)_1 + f(2,I)_1 \cdot (2)_1 \\
f(2,III,1)_1 & = & f(2,III)_1 + f(2,I)_1 \cdot (3)_1 \\
f(2,IV,1)_1 & = & f(2,IV)_1 + f(2,I)_1 \cdot (4)_1 \\
\text{etc.} & & \text{etc.} \\
\hline
f(2,III,2)_1 & = & f(2,III,1)_1 + f(2,II,1)_1 \cdot (3)_2 \\
f(2,IV,2)_1 & = & f(2,IV,1)_1 + f(2,II,1)_1 \cdot (4)_2 \\
\text{etc.} & & \text{etc.} \\
\hline
f(2,IV,3)_1 & = & f(2,IV,2)_1 + f(2,III,2)_1 \cdot (4)_3 \\
\text{etc.} & & \text{etc.} \\
\text{etc.} & & \text{etc.}
\end{array}$$

woraus

$$\mu(2)_1 = \frac{f(2,I)_1^2}{(I,I)} + \frac{f(2,II,1)_1^2}{(II,II,1)} + \frac{f(2,III,2)_1^2}{(III,III,2)} + \text{etc.}$$

folgt. Das Gewicht P wird hierauf

$$P = \frac{1}{\pi(2)_1 - \mu(2)_1}$$

Für unser Beispiel bekommt man

$$\pi(2)_1 = 0.13625$$

$$\begin{array}{rlrl}
f(2,I)_1 = & -\ 0.06807\,, & f(2,IV,3)_1 = & -\ 0.01777 \\
f(2,II,1)_1 = & +\ 0.11934\,, & f(2,V,4)_1 = & +\ 0.08540 \\
f(2,III,2)_1 = & -\ 0.03215\,, & f(2,VI,5)_1 = & -\ 0.00217
\end{array}$$

$$\mu(2)_1 = 0.06200$$

und hiemit

$$P = 13,47$$

wie im Art. 97.

117.

Es soll als zweites Beispiel hier noch das Gewicht von

$$u(1)_3$$

berechnet werden, welcher Bogen mit dem Aggregat $u(1)_3 + x(1)_3$ des ersten Verfahrens identisch ist. Das Verfahren des vor. Art. ist hier nicht zulässig, sondern es muss statt dessen das allgemeine Verfahren angewandt werden. Da hier

$$u(1)_3 = -\tfrac{1}{2}x(2)_3$$

ist, so wird $\Omega = -\tfrac{1}{2}\delta x(2)_3$ und folglich

$$k(2)_3 = -\tfrac{1}{2}, \quad k(3)_3 = 0$$

und ferner wird

$$(M,2)_3 = k(2)_3 = -\tfrac{1}{2}$$
$$(M,3)_3 = \beta_3''.\,k(2)_3 = -(9.3178)$$

Hiemit wird zuerst

$$R = 0.02242$$

mit dem Art. 101 übereinstimmend, obgleich die Hülfsgrössen hier ganz andere Werthe haben wie dort. Man erhält ferner

$$(I,M) = +0.01809, \quad (II,M) = -0.04484$$
$$(III,M) = (IV,M) = (V.M) = (VI,M) = 0$$

wie im Art. 101, und hieraus folgt schon ohne weitere Fortsetzung der Rechnung, dass dasselbe Gewicht wie dort, nemlich

$$P = 67,37$$

erhalten wird. Man sieht hieraus, dass beide Verfahren, ungeachtet ihrer Verschiedenheit, für die Winkel, die übrigen bestimmten Bögen, und für die Gewichte dieselben Resultate geben, wie auch nicht anders sein kann.

118.

Vergleicht man diese beiden Verfahrungsarten in Bezug auf die Arbeit, die sie verursachen mit einander, so scheint das Urtheil darüber sich zu Gunsten des ersten Verfahrens zu neigen. Das letzte Verfahren führt freilich in seinem letzten Theil auf eine geringere Anzahl von Ausdrücken wie jenes, indem in den für die η und z auf jeder Station Ein Ausdruck weniger vorhanden ist, dagegen sind aber die zu berechnenden Hülfsgrössen in diesem Verfahren zusammengesetzter wie in dem Vorhergehenden, da sie aus einer grösseren Anzahl von Gliedern bestehen. Mir scheint, dass die Gesammtwirkung dieser beiden, einander entgegengesetzten, Umstände zu Gunsten des ersten Verfahrens ausfällt. Es kann übrigens Jeder bei der Ausgleichung eines Dreiecksnetzes sich ohne

vergebliche Mühe ein Urtheil über die relative Kürze dieser beiden Verfahrungsarten bilden, denn Nichts hindert sie untermischt anzuwenden. Man kann ohne Nachtheil für das Resultat auf einigen Stationen die eine, und auf anderen Stationen die andere dieser beiden Verfahrungsarten anwenden.

§. 5. Ausdehnung des im Vorhergehenden entwickelten Verfahrens auf den Fall, in welchem mehr wie Eine Grundlinie gemessen worden ist, oder man das Dreiecksnetz an ein benachbartes anschliessen will.

119.

Im Vorhergehenden ist immer angenommen worden, dass in dem Dreiecksnetz nur Eine Seite gegeben, oder mit anderen Worten nur Eine Grundlinie gemessen worden sei, wir wollen aber jetzt zur Betrachtung des Falles, wo zwei oder mehr Grundlinien gemessen worden sind, übergehen. Nehmen wir zuerst zwei gemessene Grundlinien an, dann ist klar, dass ausser den im Vorhergehenden erklärten Bedingungsgleichungen noch Eine vorhanden ist. Diese kann immer auf dieselbe Form gebracht werden wie die zweite Gattung der übrigen Bedingungsgleichungen, nur statt des Gliedes $= 1$ tritt das Verhältniss der beiden Grundlinien ein. Die neue Bedingungsgleichung ist daher immer

$$\frac{\sin\,[x(a)-x(b)]\,\sin\,[x(c)-x(d)]\,\ldots}{\sin\,[x(a')-x(b')]\,\sin\,[x(c')-x(d')]\,\ldots} - \frac{B'}{B} = 0$$

wenn B und B' die beiden gemessenen Grundlinien, und $x(a)$, $x(b)$, $x(c)$, $x(d)$, etc. $x(a')$, $x(b')$, $x(c')$, $x(d')$, etc. gewisse gemessene oder beobachtete Richtungen sind. Wenn mehr wie zwei Grundlinien gemessen worden sind, so kommen noch mehrere Bedingungsgleichungen wie die vorstehende hinzu, und zwar ist die Anzahl dieser dritten Gattung immer $= (m-1)$, wenn m Grundlinien gemessen worden sind.

Wenn z. B. in dem oben behandelten Beispiel die Linien Seeberg-Inselsberg und Warte-Wachsenburg unmittelbar gemessen wären, so würde ausser den angeführten sechs Bedingungsgleichungen, noch die folgende siebente vorhanden sein,

$$\frac{\sin\,[x(3)_1-x(4)_1-0''140]\,\sin\,[x(3)_3-x(2)_3-0''211]}{\sin\,[x(1)_2-x(4)_2-0.140]\,\sin\,[x(2)_4-x(1)_4-0.211]} - \frac{B'}{B} = 0$$

wo

$B' =$ Seite (Warte-Wachsenburg)

$B =$ Seite (Seeberg-Inselsberg)

sind, und diese Bedingungsgleichung hätte sofort den übrigen sechs des Art. 91 hinzugefügt, und eben so behandelt werden müssen.

120.

Bleiben wir bei der Annahme von zwei gemessenen Grundlinien stehen, da das Hinzukommen von mehreren nur die Wiederholung desselben Verfahrens verlangt. Nachdem die Ausgleichungen auf den Stationen ausgeführt worden sind, sind in die Bedingungsgleichung des vor. Art. nicht nur die Werthe der Richtungen, die im Vorhergehenden mit $y(r)$, bezeichnet worden sind, sondern auch die durch die Messungen gefundenen Werthe der Grundlinien B und B' zu substituiren. Diese Gleichung wird nun im Allgemeinen so wenig wie die übrigen Bedingungsgleichungen den Werth Null geben, sondern statt dessen einen anderen, den ich den früheren Bezeichnungen analog $F(B)$ nennen werde. Die Einheit von $F(B)$ sei, wie oben bei den ähnlichen Grössen, die siebente Stelle des Briggischen Logarithmus.

Durch die Differentiation unserer Gleichung, nachdem sie auf die logarithmische Form gebracht worden ist, erhalten wir

$$\frac{M}{r}\operatorname{cotg}[x(a)-x(b)]\delta[x(a)-x(b)]+\frac{M}{r}\operatorname{cotg}[x(c)-x(d)]\delta[x(c)-x(d)]+\ldots$$
$$-\frac{M}{r}\operatorname{cotg}[x(a')-x(b')]\delta[x(a')-x(b')]-\frac{M}{r}\operatorname{cotg}[x(c')-x(d')]\delta[x(c')-x(d')]-\ldots$$
$$+\frac{M}{B}\delta B-\frac{M}{B'}\delta B'+F(B)=0$$

und in dieser Form ist diese Gleichung als eine der Gleichungen (30) der allgemeinen Aufgabe zu betrachten, und demgemäss eben so zu behandeln wie im Vorhergehenden von den übrigen Bedingungsgleichungen gezeigt worden ist. Damit in den Verbesserungen der Richtungen wieder die Secunde, und in den Verbesserungen δB und $\delta B'$ der Grundlinien dieselbe Einheit, in welcher diese ausgedrückt sind zur Einheit werde, ist mit Rücksicht auf die schon festgesetzte Einheit von $F(B)$, M dem Zehnmillionfachen des Moduls der Briggischen Logarithmen, und $r=206265''$ zu setzen. Es wird daher

$$\log M = 6.63778$$
$$\log r = 5.31443$$

Die Coefficienten der Verbesserungen der Richtungen werden also eben so berechnet wie oben in den Bedingungsgleichungen zweiter Gattung.

121.

Man würde nun die Auflösung der vorliegenden Aufgabe, blos mit dem Unterschiede, dass zu den Unbekannten der vorhergehenden Aufgabe, in welcher nur Eine Grundlinie vorausgesetzt ist, die beiden neuen Unbekannten δB und $\delta B'$ hinzugekommen sind, nach den im Vorhergehenden abgeleiteten Erklärungen und Vorschriften rationel zu Ende führen können, wenn nicht noch eine Bedingung zu erfüllen wäre, die so beschaffen ist, dass sie, gegenwärtig wenigstens, gar nicht erfüllt werden kann.

Das Messen eines Winkels (oder einer Richtung) und das Messen einer Grundlinie sind zwei gänzlich von einander verschiedene Operationen, die eine directe Vergleichung ihrer relativen Genauigkeit gar nicht zulassen, aber dennoch muss man, um die im vor. Art. erhaltene Gleichung in Verbindung mit den übrigen Bedingungsgleichungen der Aufgabe weiter behandeln zu können, ein Maass der relativen Genauigkeit zwischen Winkel- oder Richtungsmessungen und Grundlinienmessungen kennen, indem in derselben sowohl die wahrscheinlichsten Verbesserungen dieser wie die jener die Unbekannten sind. Man muss, mit anderen Worten, den Fehler der Grundlinienmessungen kennen, der dieselbe Wahrscheinlichkeit besitzt, wie der Fehler von einer Secunde in den Winkel- oder Richtungsmessungen, und hieraus die Gewichte bestimmen, welche δB und $\delta B'$ beizulegen sind, während die Gewichte der Winkel- oder Richtungsmessungen gleich Eins gesetzt werden.

Von den mittleren Fehlern, womit die Messungen verschiedener Grundlinien behaftet sind, lässt sich im Voraus nur wenig sagen. Von zwei Grundlinien, die unter völlig gleichen Umständen gemessen sind, lässt sich mit Gewissheit behaupten, dass der mittlere Fehler der längeren grösser sein muss, wie der der kürzeren, denn die Fehlerquellen wiederholen sich bei jener öfterer wie bei dieser, aber dass die mittleren Fehler solcher Grundlinien ihren Längen proportional sein sollten, wie zuweilen behauptet worden ist, muss bestritten werden. Wenn angenommen werden dürfte, dass bei allen möglichen Fehlerquellen gleiche positive und negative Fehler gleiche Wahrscheinlichkeit hätten, so würde man die mittleren Fehler mehrerer unter völlig gleichen Umständen gemessenen Grundlinien den Quadratwurzeln aus ihren Längen proportional setzen können, aber diese Annahme ist auch nicht in aller Strenge

richtig, da es Fehlerquellen giebt, die stets in demselben Sinne wirken, z. B. die Fehler der Etalonirung der Messstangen.

Um die Wahrscheinlichkeit irgend eines gegebenen Fehlers in der Messung einer Grundlinie mit annehmbarer Annäherung bestimmen zu können, müsste man diese Grundlinie zu vielen wiederholten Malen gemessen haben, aber solche Wiederholungen dieser Messungen liegen gegenwärtig, wenigstens öffentlich, gar nicht vor, und die Schwierigkeit derselben, so wie der Zeit- und Kostenaufwand, den sie erfordern, veranlassen die Annahme, dass sie so bald noch nicht in der im Allgemeinen erforderlichen Ausdehnung vorhanden sein werden*). Man kann daher auch nicht die zur rationellen Anwendung der Gleichungen des vor. Art. erforderliche Bestimmung der Gewichte der Messungen der Grundlinien in Bezug auf die der Winkel- oder Richtungsmessungen ausführen, und muss daher vor der Hand von der strengen Benutzung derselben absehen.

122.

Der Fehler in den Messungen der Grundlinien, die mit den besten Apparaten und der grössten Sorgfalt ausgeführt sind, dessen Wahrscheinlichkeit der Wahrscheinlichkeit eines Fehlers von Einer Secunde in den Winkel- oder Richtungsmessungen gleichkommt, ist gewiss ein sehr kleiner Theil eines Meters, und bezeichnet man ihn für die verschiedenen Grundlinien mit $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{p'}$, etc. Meter, so werden p, p', etc. grosse Zahlen sein. Dem Vorhergehenden zufolge müssen nun den Bestimmungen der Grundlinien die Gewichte p^2, p'^2, etc. beigelegt werden wenn man den Bestimmungen der Richtungen das Gewicht $= 1$ beilegt. Aber im Laufe der Auflösung unserer Aufgabe treten diese Gewichte in die Nenner der Coefficienten der Gleichungen ein, und es wird dadurch bewirkt, dass in den Endgleichungen die Coefficienten der Verbesserungen der Grundlinien mit weit kleineren Coefficienten behaftet sind, wie die der Richtungen oder Winkel. Die Verbesserungen der Grundlinien werden daher selbst sehr klein, und äussern eine geringe Rückwirkung

*) Dem Vernehmen nach besitzt die Sternwarte Pulkowa, als Lehrmittel für die angehenden Geodäten, eine Probebasis nebst den dazu gehörigen Messapparaten. Es würde gewiss von Nutzen sein, wenn die damit gewonnenen Erfahrungen veröffentlicht würden.

auf die der Richtungen oder Winkel, und können daher ohne erhebliche Fehler in den letzteren zu veranlassen, übergangen werden; man kann, mathematisch zu reden, die Gewichte der Grundlinien in Bezug auf die der Winkel oder Richtungen unendlich gross setzen, wodurch die Verbesserungen jener Null werden. Die Gleichung des Art. 119 nimmt hierauf die folgende Form an,

$$\frac{M}{r}\text{cotg}[x(a)-x(b)]\delta[x(a)-x(b)]+\frac{M}{r}\text{cotg}[x(c)-x(d)]\delta[x(c)-x(d)]+\ldots$$
$$-\frac{M}{r}\text{cotg}[x(a')-x(b')]\delta[x(a')-x(b')]-\frac{M}{r}\text{cotg}[x(c')-x(d')]\delta[x(c')-x(d')]-\ldots+F(B) = 0$$

und wird den Bedingungsgleichungen zweiter Gattung völlig ähnlich. Die Auflösung unserer Aufgabe besitzt nun die Eigenschaft, dass nicht nur den Bedingungen zwischen den Winkeln desselben vollständig Genüge geleistet wird, sondern auch alle gemessenen Grundlinien genau dargestellt werden.

123.

Es wird nicht undienlich sein das Vorhergehende mit einigen Beispielen der einfachsten Art zu erläutern. Es soll zuerst das Dreiecksnetz aus einem einzigen Dreieck bestehen, in welchem alle drei Winkel und zwei Seiten gemessen worden sind. Ich nehme an, dass man erhalten habe

$$\begin{aligned}\alpha &= 40^\circ\ 0'\ 0''00\\ \beta &= 65\ \ 0\ \ 0.00\\ \gamma &= 75\ \ 0\ \ 3.00\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}a &= 1000.000\\ b &= 1409.978\end{aligned}\right\}\text{Meter}$$

und dass die Seite a dem Winkel α, die Seite b dem Winkel β gegenüber liege. Hier finden zwei Bedingungsgleichungen statt, nemlich, wenn der sphärische Ueberschuss übergangen wird,

$$\alpha+\beta+\gamma-180^\circ = 0$$
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}-\frac{a}{b} = 0$$

Die Substitution der vorstehenden Werthe hierin giebt

$$F(I) = +3''00\,,\quad F(II) = +41$$

und durch die Differentiation erhält man, mit Weglassung der Aenderungen von a und b,

$$\delta\alpha + \delta\beta + 3''00 = 0$$
$$+ 25.092\delta\alpha - 9.818\delta\beta + 41 = 0$$

und hieraus entsteht die folgende Zusammenstellung

r	q(r,I)	q(r,II)
α	+1	+(1.39951)
β	+1	−(0.99202)
γ	+1	0

Setzt man nun das Gewicht der Winkel = 1, so werden $q(r,I) = f(r,I)$, u. s. w. und folglich

$$(I,I) = 3\ ,\quad (I,II) = +15.274\ ,\quad (II,II) = 726.02$$

woraus man

$$(I) = +0''7979\ ,\quad (II) = +(8.59862)\ ,\quad W = 4.021$$

und hiemit

$$z(\alpha) = +1''794$$
$$z(\beta) = +0.408$$
$$z(\gamma) = +0.798$$

bekommt. Die wahrscheinlichsten Werthe der Winkel werden also

$$\alpha = 39^0\ 59'\ 58''206$$
$$\beta = 64\ \ 59\ \ 59.592$$
$$\gamma = 75\ \ 0\ \ 2.202$$

während die Seiten oder Grundlinien unverändert bleiben.

124.

Es soll jetzt dasselbe Beispiel mit der Abänderung vorgenommen werden, dass für die relative Genauigkeit der Messungen der Winkel und der Grundlinien eine Hypothese aufgestellt wird. Indem ich annehme, dass Eine Secunde Fehler in den Winkelmessungen dieselbe Wahrscheinlichkeit habe wie der Fehler von einem halben Millimeter in der Messung einer Grundlinie von Tausend Metern Länge, meine ich eine Hypothese aufgestellt zu haben, die wohl zuweilen mit dem wahren Sachverhalt übereinstimmen kann, lasse übrigens Jedem unbenommen, dafür eine andere einzuführen, wenn grössere Erfahrungen im Messen

von Grundlinien dafür sprechen sollten. Da meine Annahme hypothetisch ist, so soll sie für beide Grundlinien unverändert gelten. Die erste Zusammenstellung wird jetzt

r	$q(r,I)$	$q(r,II)$
α	$+1$	$+(1.39954)$
β	$+1$	$-(0.99202)$
γ	$+1$	0
a	0	$-(3.63778)$
b	0	$+(3.48857)$

wo die a und b gegenüberstehenden Zahlen, dem Art. 120 gemäss, die Werthe von $-\frac{M}{a}$ und $+\frac{M}{b}$ sind. Da der obigen Hypothese zufolge das Gewicht der Grundlinien $= (2000)^2$ gesetzt werden muss, während das der Winkel $= 1$ ist, so ergiebt sich die folgende Zusammenstellung

r	$f(r,I)$	$f(r,II)$
α	$+1$	$+(1.39954)$
β	$+1$	$-(0.99202)$
γ	$+1$	0
a	0	$-(7.03572-10)$
b	0	$+(6.88651-10)$

Hiemit werden nach und nach

$$(I,I) = 3\,, \quad (I,II) = +15.274\,, \quad (II,II) = 733.11$$

$$(I) = +\,0''8001$$

$$(II) = +(8.59390)$$

$$W = 4.010$$

$$z(\alpha) = +1''785\,, \qquad z(a) = -0^m000044$$

$$z(\beta) = +0.415\,, \qquad z(b) = +0.000030$$

$$z(\gamma) = +0.800\,,$$

$$\alpha = 39^0\,59'\,58''215\,, \qquad a = 1000^m000044$$

$$\beta = 64\;\;59\;\;59.585\,, \qquad b = 1409.977970$$

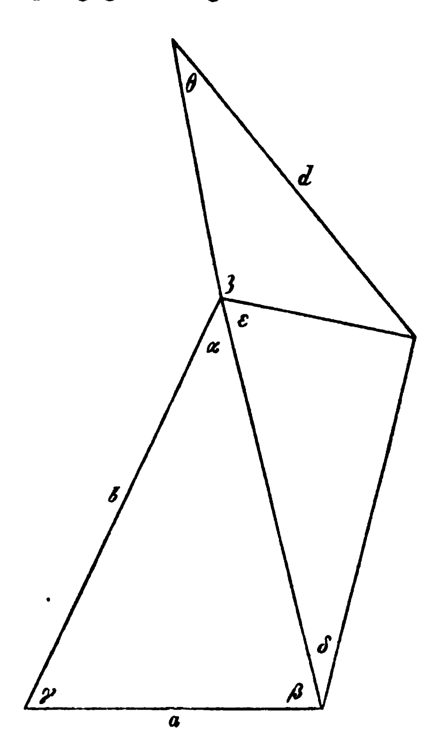
$$\gamma = 75\;\;0\;\;2.200$$

Diese Werthe der Winkel sind keine volle Hundertstelsecunde von den vorher erhaltenen verschieden, und die Aenderungen der Grundlinien höchst unbedeutend. Auch die Summe der Fehlerquadrate hat sich un-

bedeutend verkleinert, indem sie nur 0.011 kleiner geworden ist, wie bei der vorhergegangenen Behandlung dieser Aufgabe.

125.

Um einen zusammengesetzteren Fall vorzuführen nehme ich an, dass im Dreiecksnetze, welches die folgende Figur darstellt, die eingeschriebenen Winkel und Seiten gemessen seien, die ich so gewählt habe, dass nur drei Bedingungsgleichungen vorhanden sind.



Die erhaltenen Werthe seien die folgenden,

$$\begin{aligned}
\alpha &= 40^0\ 0'\ 0''00 \\
\beta &= 65\ \ 0\ 0.00 \\
\gamma &= 75\ \ 0\ 3.00 \\
\delta &= 29\ 45\ 0.00 \\
\varepsilon &= 66\ 30\ 0.00 \\
\zeta &= 111\ 40\ 0.00 \\
\theta &= 31\ \ 0\ 0.00 \\
a &= 1000^m000 \\
b &= 1409.978 \\
d &= 1353.567
\end{aligned}$$

Die beiden ersten Bedingungsgleichungen sind nun dieselben wie im vorhergehenden Beispiel, und die dritte wird

$$\frac{\sin\gamma \sin\delta \sin\zeta}{\sin\alpha \sin(\delta+\varepsilon) \sin\theta} - \frac{d}{a} = 0$$

Ferner wird

$$F(I) = +3''00\,,\quad F(II) = +41\,,\quad F(III) = -27$$

$$-(1.39954)\delta\alpha + (0.75142)\delta\gamma + (1.59267)\delta\delta + (0.36283)\delta\varepsilon$$
$$-(0.92244)\delta\zeta - (1.54458)\delta\theta - 27 = 0$$

und man bekommt, wenn die Seiten unveränderlich angenommen werden,

r	$q(r,I)$	$q(r,II)$	$q(r,III)$
α	+1	+(1.39954)	−(1.39954)
β	+1	−(0.99202)	0
γ	+1	0	+(0.75142)
δ	0	0	+(1.59267)
ε	0	0	+(0.36283)
ζ	0	0	−(0.92244)
θ	0	0	−(1.54458)

$$(I,I) = 3\,,\quad (I,II) = +15.274\,,\quad (I,III) = -\ 19.450$$
$$(II,II) = 726.02\,,\quad (II,III) = -\ 629.63$$
$$(III,III) = 3496.9$$

$$(I) = +0''9045$$
$$(II) = +(8.88837)$$
$$(III) = +(8.66273)$$
$$W = 4.642$$

$$z(\alpha) = +1''691\,,\qquad z(\delta) = +1''801$$
$$z(\beta) = +0.145\,,\qquad z(\varepsilon) = +0.106$$
$$z(\gamma) = +1.164\,,\qquad z(\zeta) = -0.385$$
$$z(\theta) = -1.612$$

und die wahrscheinlichsten Werthe

$$\alpha = 39^0\,59'\,58''309\,,\qquad \delta = 29^0\,44'\,58''199$$
$$\beta = 64\ \ 59\ \ 59.855\,,\qquad \varepsilon = 66\ \ 29\ \ 59.894$$
$$\gamma = 75\ \ 0\ \ 1.836\,,\qquad \zeta = 111\ \ 40\ \ 0.385$$
$$\theta = 31\ \ 0\ \ 1.612$$

126.

Nimmt man auch auf die Aenderungen der Seiten oder Grundlinien dieses Beispiels Rücksicht, und nimmt das Gewicht derselben eben so an wie oben, so ergeben sich die folgenden Zusammenstellungen

r	$q(r,I)$	$q(r,II)$	$q(r,III)$	$f(r,I)$	$f(r,II)$	$f(r,III)$
α	$+1$	$+(1.39954)$	$-(1.39954)$	$+1$	$+(1.39954)$	$-(1.39954)$
β	$+1$	(0.99202)	0	$+1$	$-(0.99202)$	0
γ	$+1$	0	$+(0.75142)$	$+1$	0	$+(0.75142)$
δ	0	0	$+(1.59267)$	0	0	$+(1.59267)$
ε	0	0	$+(0.36283)$	0	0	$+(0.36283)$
ζ	0	0	$-(0.92244)$	0	0	$-(0.92244)$
θ	0	0	$-(1.54458)$	0	0	$-(1.54458)$
a	0	$-(3.63778)$	$+(3.63778)$	0	$-(7.03572)$	$+(7.03572)$
b	0	$+(3.48857)$	0	0	$+(6.88651)$	0
d	0	0	$-(3.50630)$	0	0	$-(6.90424)$

$$(I,I) = 3\,,\quad (I,II) = +15.274\,,\quad (I,III) = -\ 19.450$$
$$(II,II) = \ 733.11\,,\quad (II,III) = -634.35$$
$$(III,III) = \ 3504.2$$

$$(I) = +\ 0''9065$$
$$(II) = +(8.88453)$$
$$(III) = +(8.66071)$$
$$W = \ 4.626$$

$$z(\alpha) = +1''681\,,\quad z(\delta) = +1''792\,,\quad z(a) = -0^m0000335$$
$$z(\beta) = +0.154\,,\quad z(\varepsilon) = +0.106\,,\quad z(b) = +0.0000590$$
$$z(\gamma) = +1.165\,,\quad z(\zeta) = -0.383\,,\quad z(d) = -0.0000367$$
$$z(\theta) = -1.604$$

und die wahrscheinlichsten Werthe

$$\alpha = 39^\circ\ 59'\ 58''319\,,\qquad \delta = 29^\circ\ 44'\ 58''208$$
$$\beta = 64\ \ 59\ \ 59.846\,,\qquad \varepsilon = 66\ \ 29\ \ 59.894$$
$$\gamma = 75\ \ 0\ \ 1.835\,,\qquad \zeta = 111\ \ 40\ \ 0.383$$
$$\theta = 31\ \ 0\ \ 1.604$$

$$a = 1000^m0000335$$
$$b = 1409.9779410$$
$$d = 1353.5670367$$

Diese Werthe der Winkel sind von denen des vor. Art. höchstens 0″01 verschieden, und die Verbesserungen der Seiten oder Grundlinien sind wieder sehr klein. Auch die Summe der Fehlerquadrate ist durch die Zuziehung der Aenderungen der Grundlinien nur 0.016 kleiner geworden.

127.

Das Messen von mehr wie Einer Grundlinie in einem Dreiecksnetze trägt wesentlich zur genaueren Bestimmung der einzelnen Stücke desselben bei, und darf daher nie in einem Netze von bedeutender Ausdehnung unterlassen werden. In der Ausgleichung des Dreiecksnetzes spricht sich diese grössere Genauigkeit dadurch aus, dass die Gewichte der Unbekannten grösser werden, und die Vergrösserung dieser kann in einzelnen Fällen bedeutend werden. Um hievon ein Beispiel zu geben, will ich annehmen, dass in dem Dreiecksnetze, welches im Vorhergehenden zum Hauptbeispiel gedient hat, und im Art. 91 abgebildet ist, die beiden Seiten (1)(3) und (2)(4) direct gemessen worden seien. Ausser den bisherigen sechs Bedingungsgleichungen erhalten wir jetzt eine siebente, und diese ist die im Art. 103 erhaltene Relation zwischen den beiden eben genannten Seiten, die aber jetzt wie folgt gestellt werden muss,

$$\frac{\sin\,[x(3)_1-x(4)_1-0''140]\,\sin\,[x(3)_3-x(2)_3-0''211]}{\sin\,[x(1)_2-x(4)_2-0''140]\,\sin\,[x(2)_4-x(1)_4-0''211]}-\frac{(2)(4)}{(1)(3)}=0$$

Um diese Sache möglichst kurz behandeln zu können will ich annehmen, dass die für diese beiden Seiten oder Grundlinien erhaltenen Werthe dieselben seien die a. a. O. erhalten wurden, woraus die Folge ist, dass die oben für die Winkel dieses Dreiecksnetzes erhaltenen, wahrscheinlichsten Werthe sowohl wie die Summe der übrig bleibenden Fehlerquadrate dieselben bleiben müssen.

128.

Das Differential der eben aufgestellten neuen Bedingungsgleichung ist nun

$$\begin{aligned}&+1.0627\delta x(4)_1-1.0627\delta x(3)_1-20.596\delta x(1)_2+20.596\delta x(4)_2\\&-45.454\;\delta x(2)_3+45.454\delta x(3)_3+24.794\delta x(1)_4-24.794\delta x(2)_1-21.1=0\end{aligned}$$

indem die Substitution der Werthe der $y(r)_s$ des Art. 89 in diese Bedingungsgleichung

$$F(VII) = -21.1$$

giebt. Die Tafeln der Artt. 93 u. 94 bekommen jetzt in Bezug auf die neu eingeführte Bedingungsgleichung die folgenden Zusätze,

r	s	$\log q(r, VII)_s$	$\log \eta(r, VII)_s$	$\log Q(r, VII)_s$	$\log f(r, VII)_s$
1	1	—	—	—	—
2		—	—	—	7.38719n
3		0.02641n	0.02641n	8.68071n	8.54988n
4		0.02641	9.98535	8.88316	8.92007
a		—	9.14832	7.64415	7.88050
b		—	9.01038	7.80770	7.80770
1	2	1.31378n	1.31378n	9.92461n	9.92461n
2		—	—	—	9.33596n
3		—	—	—	9.21035
4		1.31378	1.31378	9.90906	9.90906
1	3	—	—	—	—
2		1.65757n	1.65757n	0.21572n	0.21572n
3		1.65757	1.65757	0.53379	0.53379
1	4	1.39436	1.39436	0.34363	0.34363
2		1.39436n	1.39436n	0.21235n	0.21235n
3		—	—	—	—
1	5	—	—	—	—
2		—	—	—	—
3		—	—	—	—

und hieraus ergeben sich die folgenden Werthe der Coefficienten der Endgleichungen, die denen des Art. 95 hinzuzufügen sind,

$$(I, VII) = +1.2603\,, \quad (V, VII) = +0.4577$$
$$(II, VII) = -1.6457\,, \quad (VI, VII) = +2.8900$$
$$(III, VII) = +1.0885\,, \quad (VII, VII) = 359.35$$
$$(IV, VII) = -0.1398$$

Die Ergänzung der Auflösung der Endgleichungen giebt nun

$$(7)_1 = -(0.47740)\,, \quad (7)_4 = -(0.06444)$$
$$(7)_2 = +(0.59234)\,, \quad (7)_5 = -(9.97330)$$
$$(7)_3 = -(0.24687)\,, \quad (7)_6 = -(1.83334)$$
$$(VII, VII, 6) = (2.19962)\,, \quad R_7 - R_6 = 0.000001 = 0$$
$$(VII) = +0.00024 = 0$$

die sich den, auf ähnliche Weise bezeichneten Grössen des Art. 95 anschliessen. Aus diesen Werthen von (VII) und $R_7 - R_6$, welche $= 0$ zu erachten sind, zeigt sich die obige Behauptung bestätigt, dass sowohl die Werthe der Unbekannten, wie die Summe der Fehlerquadrate unverändert bleiben.

129.

Im Art. 103 fanden wir das Gewicht der Seite Warte-Wachsenburg, oder (2)(4), in sofern dieselbe aus der Seite Seeberg-Inselsberg, oder (1)(3), bestimmt wird, $= 341.2$, es folgt aber aus dem Art. 52, dass dieses Gewicht jetzt unendlich gross gefunden werden muss. Um zu zeigen, dass die Rechnung es jetzt in der That so giebt, ist zu bemerken, dass dem im Art. 103 erhaltenen Werthe von S der Werth des Gliedes

$$\frac{(VII,M,6)^2}{(VII,VII)}$$

hinzugefügt werden muss, und die Rechnung weiter keine Aenderung erleidet. Nun findet man aber leicht aus den vorhergehenden Zahlenangaben

$$(VII,M) = +1.54558\,, \quad (VII,M,6) = +0.68116$$

hieraus

$$\frac{(VII,M,6)^2}{(VII,VII)} = 0.0029301$$

und wenn man diesen Werth dem a. a. O. für S erhaltenen hinzufügt

$$S = 0.0066477 = R$$

folglich

$$P = \infty$$

wie es sein muss.

130.

Um an einem Beispiel zu zeigen wie gross die Vergrösserung des Gewichts unter Umständen werden kann, soll das Gewicht der Seite Seeberg-Warte, oder (1)(2), in Bezug auf die Seite Seeberg-Inselsberg, oder (1)(3), berechnet werden. Der Ausdruck ist, mit Weglassung der sphärischen Ueberschüsse, die hier nicht in Betracht kommen, da die genaue Berechnung der Seite selbst für unsern Zweck überflüssig ist,

$$(1)(2) = \frac{\sin\,[x(2)_3 - x(1)_3]\ \sin\,[x(2)_5 - x(1)_5]}{\sin\,[x(3)_2 - x(1)_2]\ \sin\,[x(3)_5 - x(2)_5]}\ (1)(3)$$

Da hieraus mit ausreichender Genauigkeit

$$\log (1)(2) = 4.09301$$

folgt, so giebt die Differentiation

$$\begin{aligned}\Omega = \text{const.} &+ 0^m029241\,\delta[(2)_3 - (1)_3] + 0^m137781\,\delta[(2)_5 - (1)_5] \\ &- 0.079774\,\delta[(3)_2 - (1)_2] - 0.007235\,\delta[(3)_5 - (2)_5]\end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned}(M,1)_2 &= +0.079974\,, & (M,2)_3 &= +0.029241 \\ (M,3)_2 &= -0.079974\,, & (M,1)_5 &= -0.137781 \\ (M,4)_2 &= -(8.20315)\,, & (M,2)_5 &= +0.145016 \\ (M,1)_3 &= -0.29241\,. & (M,3)_5 &= -0.007235\end{aligned}$$

$$R = 0.0038990$$

$$\begin{aligned}(I,M) &= -0.001507 \\ (II,M) &= -0.005319\,, & (II,M,1) &= -0.005582 \\ (III,M) &= +0.014220\,, & (III,M,2) &= +0.011898 \\ (IV,M) &= +0.003884\,. & (IV,M,3) &= +0.007640 \\ (V,M) &= +0.000564\,. & (V,M,4) &= +0.002903 \\ (VI,M) &= -0.004330\,, & (VI,M,5) &= -0.008790\end{aligned}$$

$$S = 0.0025438$$
$$P = 738.0$$

Dieses ist das Gewicht der Seite Seeberg-Warte, wenn man annimmt, dass nur die Grundlinie Seeberg-Inselsberg vorhanden ist, nimmt man hingegen an, dass auch die Grundlinie Warte-Wachsenburg gemessen worden ist, so kommen zu den vorstehenden Grössen noch

$$(VII,M) = -0.12806\,, \quad (VII,M,6) = +0.41955$$

hinzu, und es werden

$$S = 0.0036554$$
$$P = 4105$$

also das Gewicht beinahe sechs Mal grösser.

Im Allgemeinen verhält sich diese Sache so. Denkt man sich ein aus einer grossen Anzahl von Dreiecken bestehendes Netz und nur Eine gemessene Grundlinie, so werden, unter sonst gleichen Umständen, die Dreiecksseiten, die in der Nähe der Grundlinie liegen, die grössten Gewichte bekommen, je weiter aber eine Dreiecksseite von der Grundlinie entfernt ist, desto kleiner wird ihr Gewicht ausfallen. Stellt man sich nun vor, dass möglichst weit von jener entfernt eine zweite

Grundlinie gemessen werde, so werden zwar die Gewichte aller Dreiecksseiten vergrössert werden, aber die bedeutendste Vergrösserung der Gewichte wird die Dreiecksseiten treffen, die in der Nähe der zweiten Grundlinie liegen, und vorher die kleinsten Gewichte bekamen; eben so verhält es sich wenn mehr wie zwei Grundlinien gemessen worden sind.

131.

Mit dem Vorhergehenden steht der Fall in der engsten Beziehung, dass man ein auszugleichendes Dreiecksnetz an ein benachbartes, schon ausgeglichenes, anschliessen will. Man kann nemlich immer zwischen der Anschlussseite des benachbarten Netzes und der nächsten Grundlinie des auszugleichenden eine Bedingungsgleichung von derselben Form, wie die des Art. 119, aufstellen, in welcher im letzten Gliede statt der einen Grundlinie die Anschlusslinie eintritt. Diese Bedingungsgleichung ist den übrigen, die das auszugleichende Dreiecksnetz darbietet, hinzuzufügen, und eben so wie diese zu behandeln. Da die Anschlussseite genau dargestellt werden muss, so ist im Differential dieser Bedingungsgleichung das Differential der Anschlussseite gleich Null zu setzen.

132.

Die vorstehenden Betrachtungen führen uns auf einen Fall hin, der einer gleichen Behandlung unterworfen werden kann.

Wenn das auszugleichende Dreiecksnetz sehr gross ist, so kann es sich ereignen, dass die Zahl der Bedingungsgleichungen so gross wird, dass eine völlig rationelle Berechnung derselben nach dem im Vorhergehenden entwickelten Verfahren ihres grossen Umfanges wegen praktisch unausführbar wird, und an die Grenze des Unmöglichen streift. In diesem Falle kann man das ganze Netz in so viele Abtheilungen theilen, dass für jede derselben die Ausgleichung gewiss praktisch ausführbar wird. Die erste Abtheilung wird nun ohne Abänderung so ausgeglichen, wie im Vorhergehenden erklärt ist, für alle übrigen Abtheilungen führe man aber die oben erklärte Bedingungsgleichung ein, wodurch bewirkt wird, dass die Anschlussseite denselben Werth bekommt, wie in der vorhergehenden Abtheilung, und da man annehmen muss, dass in

einem so grossen Dreiecksnetze mehrere Grundlinien gemessen worden seien, so wird die Bedingungsgleichung zwischen der Anschlussseite und einer in den vorhergehenden Abtheilungen noch nicht benutzten Grundlinie aufzustellen sein.

Durch dieses Verfahren wird nun zwar nicht in aller Strenge die Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Fehlerquadrate zu einem Minimum gemacht, aber der sich für diese Summe ergebende Werth wird sehr wenig grösser sein, wie das Minimum.

Es liegt hier der Satz zu Grunde, der so häufig in der angewandten Mathematik benutzt wird, nemlich in den Fällen, wo sich der strengen Behandlung einer Aufgabe unübersteigliche Hindernisse entgegen stellen, eine genäherte Auflösung Platz greifen zu lassen.

Uebrigens werden bei dem hier erklärten Verfahren alle vorhandenen trigonometrischen Bedingungsgleichungen vollständig erfüllt, und man kann daher das mit den obigen Modificationen ausgeglichene Dreiecksnetz fernerhin eben so wie jedes andere, völlig strenge ausgeglichene, benutzen.

§. 6. Recapitulation der zur Ausgleichung eines Dreiecksnetzes erforderlichen Vorschriften und Formeln.

133.

Es sind zwar im Vorhergehenden alle Vorschriften und Formeln zum angeführten Zwecke ausführlich abgeleitet und erklärt worden, allein es ist nicht zu vermeiden gewesen, dass sie abgesondert von einander an verschiedenen Stellen sich befinden, da die Erklärungen und Beweise zwischen denselben eingeschaltet werden mussten. Es scheint daher von Nutzen zu sein, diese Vorschriften und Formeln hier neben einander gestellt nochmals anzuführen. Der grösseren Einfachheit wegen, und weil es am häufigsten so angenommen werden darf, werde ich hier annehmen, dass auf jeder Station allen Einstellungen oder Beobachtungen dasselbe Gewicht, welches $= 1$ zu setzen ist, beigelegt werden darf, aber den Fall nicht ausschliessen, dass auf verschiedenen Stationen den einzelnen Beobachtungen ein anderes Gewicht beigelegt werden muss. Sollte auf einer und derselben Station der Fall eintreten, dass verschiedenen Beobachtungen verschiedene Gewichte beigelegt werden müssten,

so bietet diese Abhandlung in ihrem vorhergegangenen Inhalt das Verfahren dar, welches anzuwenden ist.

134.

Allgemeine Vorbereitung der Beobachtungen.

Die einzuführenden Bezeichnungen sollen im Allgemeinen dieselben sein, die im Vorhergehenden bei der Berechnung des Beispiels angewandt worden sind. Es sollen also, um das wiederholte Hinschreiben oft langer Namen zu vermeiden, oder der Unbestimmtheit vorzubeugen, die durch eine Abkürzung dieser Namen entstehen könnte, sowohl die Stationen, wie die auf jeder dieser beobachteten Richtungen mit in Klammern eingeschlossenen arabischen Zahlen bezeichnet werden; letztere sollen auf jeder Station mit der Eins anfangen, und es sollen denselben, wo eine Unterscheidung nothwendig wird, rechts unten als Index die Stationsnummern in kleinerer Schrift angehängt werden. Bei ausgedehnten Triangulationen kann man sich ein für alle Mal ein Verzeichniss anlegen, welches neben den Namen aller Dreieckspunkte, und den auf jeder derselben beobachteten Richtungen, die Stations- und Richtungsnummern enthält, wodurch jedem Irrthum vorgebeugt wird. Man kann auch diese Nummern in die Karte des Dreiecksnetzes eintragen.

Es sollen nun namentlich, wenn r die Richtungs- und s die Stationsnummern bezeichnen, gleichwie im obigen Beispiel,

$(r)_s$ der vorläufig angenommene Werth irgend einer Richtung,

$w(r)_s$ die durch die Ausgleichung auf der Station erhaltene Verbesserung von $(r)_s$, und

$y(r)_s$ das Resultat dieser Ausgleichung

bedeuten, so dass

$$y(r)_s = (r)_s + w(r)_s$$

wird. Im ganzen ersten Theile der Auflösung kann man die Stationsnummer weglassen, und sich begnügen (r), $w(r)$, $y(r)$ zu schreiben, wenn nur die Stationsnummer ein für alle Mal angegeben wird.

135.

Nachdem auf irgend einer Station die Messungen (oder die Beobachtungen der Richtungen) vollendet sind, kann man in Bezug auf diese



schon den ersten Theil der Auflösung unserer Aufgabe, nemlich die Ausgleichung auf dieser Station, ausführen, ohne dass man die Vollendung der Messungen auf den andern Stationen abzuwarten braucht.

Da die Beobachtungen selbst, von Gyrus zu Gyrus, immer so ausgeführt werden müssen, dass verschiedene Punkte des Kreises des Theodoliten in Anspruch genommen werden, so besteht die erste Arbeit darin, dass man zu den Originalbeobachtungen eines jeden Gyrus eine solche constante Zahl addirt, dass die Richtungen nach jedem Gegenstande, der eingeschnitten worden ist, einander nahe gleich werden; es ist zweckmässig diese Constanten ausserdem so zu wählen, dass die Richtungen nahe die Azimuthe der Gegenstände darstellen. Die Azimuthe muss man immer vom Südpunkt des Horizonts nach Westen durch den ganzen Umkreis zählen.

Man theile nun alle beobachteten Gyri je nach den in denselben eingeschnittenen Richtungen derart in Gruppen, dass in jeder dieser dieselben Richtungen ohne Lücken enthalten sind. Die Beobachtungen einer jeden Richtung jeder Gruppe für sich addire man, nehme hierauf eine dem Mittel dieser Summe beiläufig entsprechende Zahl als vorläufigen Werth der Richtung an, und ziehe das entsprechende Vielfache derselben von der Summe der Richtungen ab. Die erhaltenen Unterschiede stelle man für die verschiedenen Gruppen von Gyris tabularisch so zusammen, dass jede Columne die Resultate Einer Gruppe enthält, und die Beobachtungen jeder Richtung, neben dem vorläufig angenommenen Werthe dieser letzteren, eine Zeile bilden.

Unter der Bezeichnung p, $p_{,}$, $p_{,,}$, etc. stelle man jeder Columne die Zahl der Gyri, aus welcher die in derselben enthaltenen Summen bestehen, voran, die nachher die denselben beizulegenden Gewichte sind; auch füge man die arithmetischen Mittel aus den Zahlen jeder Columne hinzu.

Seien σ, σ', σ'', etc. die Summen der einzelnen Beobachtungen der Richtungen der erst in Betracht gezogenen Gruppe von Gyris; $\sigma_{,}$, $\sigma'_{,}$, $\sigma''_{,}$, etc., $\sigma_{,,}$, $\sigma'_{,,}$, $\sigma''_{,,}$, etc. etc. die Summen der weiter in Betracht zu ziehenden Gruppen,

$$\sigma - p\,.\,(1) = s\,,\quad \sigma' - p\,.\,(2) = s'\,,\quad \sigma'' - p\,.\,(3) = s''\,,\ \text{etc.}$$
$$\sigma_{,} - p_{,}\,.\,(1) = s_{,}\,,\quad \sigma'_{,} - p_{,}\,.\,(2) = s'_{,}\,,\quad \sigma''_{,} - p_{,}\,.\,(3) = s''_{,}\,,\ \text{etc.}$$
$$\sigma_{,,} - p_{,,}\,.\,(1) = s_{,,}\,,\quad \sigma'_{,,} - p_{,,}\,.\,(2) = s'_{,,}\,,\quad \sigma''_{,,} - p_{,,}\,.\,(3) = s''_{,,}\,,\ \text{etc.}$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

$$S = s + s' + s'' + \dots$$
$$S_{,} = s_{,} + s'_{,} + s''_{,} + \dots$$
$$S_{,,} = s_{,,} + s'_{,,} + s''_{,,} + \dots$$
etc.

und

$$M = \frac{S}{m}, \quad M' = \frac{S_{,}}{m_{,}}, \quad M'' = \frac{S_{,,}}{m_{,,}}, \quad \text{etc.}$$

wenn m, $m_{,}$, $m_{,,}$, etc. die Zahl der Richtungen bezeichnen, die in jeder Gruppe eingeschnitten worden sind, dann wird die Tafel den folgenden Inhalt bekommen,

r	Vorl. Werthe.	Anzahl d. Beob. u. die Summen dieser.					
		p	$p_{,}$	$p_{,,}$	etc.	etc.	etc.
(1)	. . .	s	$s_{,}$	$s_{,,}$	etc.	. .	. .
(2)	. . .	s'	$s'_{,}$	$s'_{,,}$	etc.	. .	. .
(3)	. . .	s''	$s''_{,}$	$s''_{,,}$	etc.	. .	. .
etc.	. . .	etc.	etc.	etc.	etc.	. .	. .
		S	$S_{,}$	$S_{,,}$	etc.	. .	. .
		M	$M_{,}$	$M_{,,}$	etc.	. .	. .

wo aber in den verschiedenen Columnen die Stellen derjenigen Summen leer bleiben werden, die den Richtungen angehören, die in der betr. Gruppe von Gyris nicht eingeschnitten worden sind. Beispiele dieser Tafel findet man in dem Art. 84 u. d. f.

Die Summirungen, die hier verlangt werden, müssen sorgfältig ausgeführt werden, aber in Folge der vorangegangenen Vorbereitungen sind sie einfach, da man bei jeder Richtung nur auf die Secunden und deren Bruchtheile Rücksicht zu nehmen braucht, und am häufigsten auch die Zehnersecunden entweder gar nicht, oder höchstens ihre Unterschiede zu beachten nöthig hat. Bei der Bestimmung der vorläufigen Werthe der Richtungen ist nur darauf zu sehen, dass sie ohngefähr dem Mittel der eben genannten Summen entsprechen.

Den im Vorhergehenden enthaltenen Entwickelungen und Erklärungen zufolge sind nun

$$pl = s - M, \quad pl' = s' - M, \quad pl'' = s'' - M, \quad \text{etc.}$$
$$p_{,}l_{,} = s_{,} - M_{,}, \quad p_{,}l'_{,} = s'_{,} - M_{,}, \quad p_{,}l''_{,} = s''_{,} - M_{,}, \quad \text{etc.}$$
$$p_{,,}l_{,,} = s_{,,} - M_{,,}, \quad p_{,,}l'_{,,} = s'_{,,} - M_{,,}, \quad p_{,,}l''_{,,} = s''_{,,} - M_{,,}, \quad \text{etc.}$$
etc. etc.

Diese Unterschiede trage man in eine zweite Tafel ein, die auf entgegengesetzte Weise anzuordnen ist wie die erste, nemlich so, dass jede beobachtete Richtung ihre Columne bekommt, und die Resultate einer jeden Gruppe von Gyris eine Zeile bilden. Jeder Gruppe füge man die schon oben erklärten Gewichte, nebst den P und den Quotienten $\frac{p^2}{P}$ bei, und in ihrem unteren Theile setze man die (lx) und die Q an. Auch versehe man jede Gruppe von Gyris mit seiner laufenden Nummer. Der Inhalt dieser Tafel ist also der folgende,

Nr.	(1)	(2)	(3)	etc.			
1	pl	pl'	pl''	etc.	p	P	$p^2 : P$
2	$p_{,}l_{,}$	$p_{,}l'_{,}$	$p_{,}l''_{,}$	etc.	$p_{,}$	$P_{,}$	$p^2_{,} : P_{,}$
3	$p_{,,}l_{,,}$	$p_{,,}l'_{,,}$	$p_{,,}l''_{,,}$	etc.	$p_{,,}$	$P_{,,}$	$p^2_{,,} : P_{,,}$
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.
	(lx)	(lx')	(lx'')	etc.			
	Q	Q'	Q''	etc.			

in welcher, wie in der ersten Tafel, die entsprechenden Stellen leer bleiben werden. Auch von dieser Tafel findet man in dem Art. 84 u. d. f. Beispiele.

Dem Vorhergehenden zufolge ist nun

$$\begin{aligned}(lx) &= pl + p_{,}l_{,} + p_{,,}l_{,,} + \dots \\ (lx') &= pl' + p_{,}l'_{,} + p_{,,}l'_{,,} + \dots \\ (lx'') &= pl'' + p_{,}l''_{,} + p_{,,}l''_{,,} + \dots \\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

zwischen welchen die Bedingungsgleichung

$$(lx) + (lx') + (lx'') + \dots = 0$$

stattfindet. Die P, $P_{,}$, etc. bestehen aus dem Produkt des betreffenden p in die Anzahl der in derselben Zeile vorkommenden beobachteten Richtungen, und die Q, Q', etc. sind die Summen der p, für welche in der betreffenden Columne beobachtete Richtungen vorhanden sind. Zur Controle kann hier die Bedingungsgleichung

$$P + P_{,} + P_{,,} + \text{etc.} = Q + Q' + Q'' + \text{etc.}$$

benutzt werden.

136.

Es sind hierauf die folgenden Coefficienten zu berechnen,

(pp) = der Summe der Quotienten $\frac{p^2}{P}$ aller derjenigen Gruppen von Gyris, in welchen die Richtung (1) eingeschnitten worden ist,

(pp') = der Summe der Quotienten $\frac{p^2}{P}$ derjenigen Gruppen, in welchen die Richtungen (1) und (2) beide eingeschnitten worden sind,

(pp'') = der Summe u. s. w. Richtungen (1) und (3) beide u. s. w.

etc.

$(p'p')$ = der Summe u. s. w. Richtung (2) u. s. w.

$(p'p'')$ = der Summe u. s. w. Richtungen (2) und (3) beide u. s. w.

etc.

$(p''p'')$ = der Summe u. s. w. Richtung (3) u. s. w.

etc.

bis alle auf der Station eingeschnittenen Richtungen erschöpft sind. Zur Controle dieser Rechnung dienen die Gleichungen

$$\begin{aligned}
(pp) + (pp') + (pp'') + \ldots &= Q \\
(pp') + (p'p') + (p'p'') + \ldots &= Q' \\
(pp'') + (p'p'') + (p''p'') + \ldots &= Q'' \\
\text{etc} \qquad\qquad &\quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Die allgemeinen Vorbereitungen der Beobachtungen, welche beiden im Vorhergehenden entwickelten Verfahrungsarten gemeinschaftlich sind, können hiemit als beendigt betrachtet werden, und es muss nun jedes Verfahren besonders vorgenommen werden.

137.

Erstes Verfahren.

1) Erster Theil der Auflösung, oder die Ausgleichung auf den Stationen.

α) Wenn auf der Station in jedem Gyrus alle Richtungen eingeschnitten worden sind.

Die allgemeinen, im Vorhergehenden erklärten, Vorbereitungen fallen bis auf die erste derselben weg, die sich darauf beschränkt, dass man zu den Originalbeobachtungen eines jeden Gyrus eine solche con-

stante Zahl addirt, wodurch die Beobachtungen einer jeden Richtung nahe einander gleich werden, und nahe die Azimuthe darstellen. Man nehme hierauf aus den Beobachtungen einer jeden Richtung das arithmetische Mittel; diese Mittel sind ohne Weiteres die mit $y(r)$ zu bezeichnenden Resultate der Ausgleichung auf solchen Stationen. Nennt man ferner die Anzahl der einzelnen Gyri p, so ist das Gewicht

$$p = (1,1) = (2,2,1) = (3,3,2) = \text{etc.}$$

welche Grössen im zweiten Theile der Auflösung gebraucht werden. Es wird hier überdies

$$(ll,n) = 0$$

Wenn auf einer Station nur zwei Richtungen eingeschnitten worden sind, so tritt immer der gegenwärtige Fall ein, der daher im Folgenden nicht betrachtet zu werden braucht.

β) Wenn auf der Station nicht in jedem, oder in keinem, Gyrus alle Richtungen eingeschnitten worden sind, so sind vor Allem alle, in den Artt. 134—136 erklärten, Vorbereitungen auszuführen, und darauf die folgenden Berechnungen vorzunehmen.

a) Wenn auf der Station drei Richtungen eingeschnitten worden sind,

rechne man

$$M = \sqrt{(pp')(pp'')(p'p'')}$$

$$N = \frac{M}{(p'p'')}, \quad N' = \frac{M}{(pp'')}, \quad N'' = \frac{M}{(pp')}$$

$$(1,1) = Q + N^2 - (pp)$$
$$(2,2,1) = Q' + N'^2 - (p'p')$$
$$(3,3,2) = Q'' = N''^2 - (p''p'')$$

zu deren Controle man auch

$$(1,1) = N\Sigma N$$
$$(2,2,1) = N'\Sigma N$$
$$(3,3,2) = N''\Sigma N$$

rechnen kann, wo $\Sigma N = N + N'' + N'''$ ist. Hierauf werden

$$w(1) = \frac{(lx)}{(1,1)}$$
$$w(2) = \frac{(lx')}{(2,2,1)}$$
$$w(3) = \frac{(lx'')}{(3,3,2)}$$

zu deren Controle

$$N \,.\, w(1) + N' \,.\, w(2) + N'' \,.\, w(3) = 0$$

dient. Die Grösse (ll) wird am dienlichsten nach dem folgenden Ausdruck berechnet,

$$\begin{aligned}(ll) &= \frac{(pl)^2 + (pl')^2 + (pl'')^2 + \ldots}{p} \\ &+ \frac{(p_{,}l_{,})^2 + (p_{,}l_{,}')^2 + (p_{,}l_{,}'')^2 + \ldots}{p_{,}} \\ &+ \frac{(p_{,,}l_{,,})^2 + (p_{,,}l_{,,}')^2 + (p_{,,}l_{,,}'')^2 + \ldots}{p_{,,}} \\ &+ \text{etc.}\end{aligned}$$

dessen Anordnung seinen Grund in dem Inhalt der im Art. 135 erklärten zweiten Tafel findet. Endlich wird

$$\begin{aligned}(ll,3) &= (ll) - (lx) \,.\, w(1) - (lx') \,.\, w(2) - (lx'') \,.\, w(3) \\ &= (ll) - \frac{(lx)^2}{(1,1)} - \frac{(lx')^2}{(2,2,1)} - \frac{(lx'')^2}{(3,3,2)}\end{aligned}$$

Ausser den $y(1)$, $y(2)$, $y(3)$ werden auch die Coefficienten

$$(1,1)\,, \quad (2,2,1)\,, \quad (3,3,2)$$

im zweiten Theile der Auflösung gebraucht werden

b) Wenn auf der Station vier Richtungen eingeschnitten worden sind.

Die drei Grössen N, N', N'' werden wie unter *a*) berechnet, und ausserdem

$$N''' = \frac{(pp''')}{N}$$

hierauf

$$\begin{array}{llll}(1,1) = Q + N^2 - (pp)\,, & (2,2,1) = Q' + N'^2 - (p'p') \\ & (2,4,1) = N'N''' - (p'p''') \\ \underline{(1,l) = (lx)}\,, & \underline{(2,l,1) = (lx')} \\ (3,3,2) = Q'' + N''^2 - (p''p'')\,, & (4,4,1) = Q''' + N'''^2 - (p'''p''') \\ (3,4,2) = N''N''' - (p''p''')\,, & \\ (3,l,2) = (lx'')\,, & (4,l,1) = (lx''')\end{array}$$

Zur Controle dienen hier

$$\begin{array}{rcl}(1,1) & & = N\Sigma N \\ (2,2,1) & + (2,4,1) & = N'\Sigma N \\ (3,3,2) & + (3,4,2) & = N''\Sigma N \\ (2,4,1) + (3,4,2) & + (4,4,1) & = N'''\Sigma N\end{array}$$

wo $\Sigma N = N + N' + N'' + N'''$ ist. (ll) wird wie unter a) berechnet. Ferner

$$\chi' = -\frac{(1,l)}{(1,1)}$$

$$(ll,1) = (ll) + (1,l)\chi'$$

$$\gamma'' = -\frac{(2,4,1)}{(2,2,1)}, \quad \chi'' = -\frac{(2,l,1)}{(2,2,1)}$$

$$(4,4,2) = (4,4,1) + (2,4,1)\gamma''$$

$$(4,l,2) = (4,l,1) + (2,l,1)\gamma''$$

$$(ll,2) = (ll,1) + (2,l,1)\chi''$$

$$\gamma''' = -\frac{(3,4,2)}{(3,3,2)}, \quad \chi''' = -\frac{(3,l,2)}{(3,3,2)}$$

$$(4,4,3) = (4,4,2) + (3,4,2)\gamma'''$$

$$(4,l,3) = (4,l,2) + (3,l,2)\gamma'''$$

$$(ll,3) = (ll,2) + (3,l,2)\chi'''$$

$$\chi^{IV} = -\frac{(4,l,3)}{(4,4,3)}$$

$$(ll,4) = (ll,3) + (4,l,3)\chi^{IV}$$

$$\beta''' = \gamma''$$

worauf

$$-w(1) = \chi'$$

$$-w(2) = \chi'' + \chi^{IV}\beta'''$$

$$-w(3) = \chi''' + \chi^{IV}\gamma'''$$

$$-w(4) = \chi^{IV}$$

werden. Zur Controle dient hier

$$N \,.\, w(1) + N' \,.\, w(2) + N'' \,.\, w(3) + N''' \,.\, w(4) = 0$$

Im zweiten Theile der Auflösung werden ausser den $y(1)$, etc. nur

$$(1,1)\,, \quad (2,2,1)\,, \quad (3,3,2)\,, \quad (4,4,3)\,, \quad \beta''', \quad \gamma'''$$

gebraucht.

c) Wenn auf der Station fünf Richtungen eingeschnitten worden sind.

Die drei Grössen N, N', N'' werden wieder wie unter a) berechnet, ausserdem

$$N''' = \frac{(pp''')}{N}, \quad N^{IV} = \frac{(pp^{IV})}{N}$$

und hierauf

$$(1,1) = Q + N^2 - (pp) \quad , \quad (2,2,1) = Q' + N'^2 - (p'p')$$
$$(2,4,1) = N'N''' - (p'p''')$$
$$(2,5,1) = N'N^{iv} - (p'p^{iv})$$
$$(1,l) = (lx) \qquad (2,l,1) = (lx')$$
$$(3,3,2) = Q'' + N''^2 - (p''p'') \, , \quad (4,4,1) = Q''' + N'''^2 - (p'''p''')$$
$$(3,4,2) = N''N''' - (p''p''') \quad , \quad (4,5,1) = N'''N^{iv} - (p'''p^{iv})$$
$$(3,5,2) = N''N^{iv} - (p''p^{iv}) \quad , \quad (4,l,1) = (lx''')$$
$$(3,l,2) = (lx'')$$
$$(5,5,1) = Q^{iv} + N^{iv 2} - (p^{iv}p^{iv})$$
$$(5,l,1) = (lx^{iv})$$

zu deren Controle die Gleichungen

$$(1,1) = N\Sigma N$$
$$(2,2,1) + (2,4,1) + (2,5,1) = N'\Sigma N$$
$$(3,3,2) + (3,4,2) + (3,5,2) = N''\Sigma N$$
$$(2,4,1) + (3,4,2) + (4,4,1) + (4,5,1) = N'''\Sigma N$$
$$(2,5,1) + (3,5,2) + (4,5,1) + (5,5,1) = N^{iv}\Sigma N$$

dienen, wo $\Sigma N = N + N' + N'' + N''' + N^{iv}$ ist. (ll) wird immer wie unter a) berechnet. Ferner werden

$$\chi' = -\frac{(1,l)}{(1,1)}$$
$$(ll,1) = (ll) + (1,l)\chi'$$

$$\gamma'' = -\frac{(2,4,1)}{(2,2,1)}\, , \quad \delta'' = -\frac{(2,5,1)}{(2,2,1)}\, , \quad \chi'' = -\frac{(2,l,1)}{(2,2,1)}$$
$$(4,4,2) = (4,4,1) + (2,4,1)\gamma''$$
$$(4,5,2) = (4,5,1) + (2,5,1)\gamma''$$
$$(4,l,2) = (4,l,1) + (2,l,1)\gamma''$$
$$(5,5,2) = (5,5,1) + (2,5,1)\delta''$$
$$(5,l,2) = (5,l,1) + (2,l,1)\delta''$$
$$(ll,2) = (ll,1) + (2,l,1)\chi''$$

$$\gamma''' = -\frac{(3,4,2)}{(3,3,2)}\, , \quad \delta''' = -\frac{(3,5,2)}{(3,3,2)}\, , \quad \chi''' = -\frac{(3,l,2)}{(3,3,2)}$$
$$(4,4,3) = (4,4,2) + (3,4,2)\gamma'''$$
$$(4,5,3) = (4,5,2) + (3,5,2)\gamma'''$$
$$(4,l,3) = (4,l,2) + (3,l,2)\gamma'''$$
$$(5,5,3) = (5,5,2) + (3,5,2)\delta'''$$
$$(5,l,3) = (5,l,2) + (3,l,2)\delta'''$$
$$(ll,3) = (ll,2) + (3,l,2)\chi'''$$

$$\delta^{IV} = -\frac{(4,5,3)}{(4,4,3)}, \quad \chi^{IV} = -\frac{(4,l,3)}{(4,4,3)}$$

$$(5,5,4) = (5,5,3) + (4,5,3)\delta^{IV}$$
$$(5,l,4) = (5,l,3) + (4,l,3)\delta^{IV}$$
$$(ll,4) = (ll,3) + (4,l,3)\chi^{IV}$$

$$\chi^{V} = -\frac{(5,l,4)}{(5,5,4)}$$
$$(ll,5) = (ll,4) + (5,l,4)\chi^{V}$$

$$\beta''' = \gamma'', \quad \beta^{IV} = \delta'' + \delta^{IV}\beta'''$$
$$\gamma^{IV} = \delta''' + \delta^{IV}\gamma'''$$

worauf man

$$-w(1) = \chi'$$
$$-w(2) = \chi'' + \chi^{IV}\beta''' + \chi^{V}\beta^{IV}$$
$$-w(3) = \chi''' + \chi^{IV}\gamma''' + \chi^{V}\gamma^{IV}$$
$$-w(4) = \chi^{IV} + \chi^{V}\delta^{IV}$$
$$-w(5) = \chi^{V}$$

bekommt, und die Gleichung

$$N \,.\, w(1) + N' \,.\, w(2) + N'' \,.\, w(3) + N''' \,.\, w(4) + N^{IV} w(5) = 0$$

zur Controle dient. Ausser den $y(1)$, etc. werden noch die Coefficienten

$$(1,1), \quad (2,2,1), \quad (3,3,2), \quad (4,4,3), \quad (5,5,4)$$
$$\beta''', \quad \gamma''', \quad \beta^{IV}, \quad \gamma^{IV}, \quad \delta^{IV}$$

in dem zweiten Theile der Auflösung gebraucht.

Aus dem Vorhergehenden lässt sich schon vollkommen erkennen, wie verfahren werden muss, wenn auf der Station mehr wie fünf Richtungen eingeschnitten worden sind. Zur deutlicheren Uebersicht will ich jedoch noch die Ausdrücke für die β, γ, etc., die hinzukommen, für zwei Fälle anführen.

d) Wenn auf der Station sechs Richtungen eingeschnitten worden sind,

so kommen zu den vorhergehenden ähnlichen Ausdrücken noch die folgenden hinzu

$$\beta^{V} = \varepsilon'' + \varepsilon^{IV}\beta''' + \varepsilon^{V}\beta^{IV}$$
$$\gamma^{V} = \varepsilon''' + \varepsilon^{IV}\gamma''' + \varepsilon^{V}\gamma^{IV}$$
$$\delta^{V} = \varepsilon^{IV} + \varepsilon^{V}\delta^{IV}$$

e) Wenn auf der Station sieben Richtungen eingeschnitten worden sind,

so kommen zu den vorhergehenden ähnlichen Ausdrücken noch die folgenden hinzu

$$
\begin{aligned}
\beta^{vi} &= \zeta'' + \zeta^{iv}\beta''' + \zeta^{v}\beta^{iv} + \zeta^{vi}\beta^{v} \\
\gamma^{vi} &= \zeta''' + \zeta^{iv}\gamma''' + \zeta^{v}\gamma^{iv} + \zeta^{vi}\gamma^{v} \\
\delta^{vi} &= \zeta^{iv} + \zeta^{v}\delta^{iv} + \zeta^{vi}\delta^{v} \\
\varepsilon^{vi} &= \zeta^{v} + \zeta^{vi}\varepsilon^{v}
\end{aligned}
$$

u. s. w. wenn mehr Richtungen eingeschnitten worden sind.

In Bezug auf die N ist zu bemerken, dass ihre Berechnung unmöglich wird, wenn zufällig eine oder zwei der drei Grössen (pp'), (pp''), $(p'p'')$ Null sind. Aber in diesem Falle kann man durch Aenderung der zuerst angenommenen Reihenfolge der Richtungen immer bewirken, dass die N bestimmbar werden. Auch kann man oftmals dieses dadurch möglich machen, dass man ohne die Reihenfolge der Richtungen zu ändern, die oben mit M bezeichnete Wurzelgrösse aus anderen (pp) bildet*).

Die auf den verschiedenen Stationen erhaltenen Werthe der (ll,n), wo n die Anzahl der auf der Station eingeschnittenen Richtungen bezeichnet, werden addirt, und ihre Summe mit W_0 bezeichnet. Hiebei kann indessen eine Modification eintreten, die im nächsten Artikel erklärt werden wird.

Will man ausserdem noch die Werthe der u, $u_{,}$, $u_{,,}$, etc. kennen lernen, so dienen dazu die Gleichungen (65), die unter den hier stattfindenden Annahmen allgemein ausgedrückt werden können. Bezeichnen wir mit m die laufende Nummer irgend einer der Gruppen von Gyris, und mit $u(m)_{s}$ oder schlechtweg $u(m)$ den derselben zukommenden Werth von u, so bekommen wir allgemein

---

*) So hätte man z. B. im Art. 84 ohne die Richtungen (3) und (4) mit einander zu vertauschen

$$M = \sqrt{(pp')(pp''')(p'p''')}$$

und demzufolge

$$
\begin{aligned}
N &= \frac{M}{(p'p''')}, & N' &= \frac{M}{(pp''')} \\
N'' &= 0, & N''' &= \frac{M}{(pp')} \\
N^{iv} &= \frac{(pp^{iv})}{N}, & N^{v} &= \frac{(pp^{v})}{N}
\end{aligned}
$$

setzen können, wodurch derselbe Zweck erreicht worden wäre.

$$u(m) = -\frac{p_{m-1}}{P_{m-1}} \Sigma w(r)$$

in welchem Ausdruck aber nur diejenigen $w(r)$ aufgenommen werden dürfen, die in der betr. Gruppe von Gyris wirklich beobachteten Richtungen zukommen. Man kann, wenn man es für nöthig halten sollte, sich dieser Grössen zur Controlirung der, wie oben gezeigt wurde, berechneten Werthe der (ll,n) bedienen, denn man findet aus dem Vorhergehenden leicht, dass auch

$$(ll,n) = \Sigma\Sigma \frac{\{p_{m-1}(u(m) + w(r)) - p_{m-1} l_{m-1}^{r-1}\}^2}{p_{m-1}}$$

ist, wo das eine Summenzeichen sich auf die auf der Station vorhandenen Gruppen von Gyris, und das andere sich auf die vorhandenen Richtungen bezieht.

138.

Im Art. 133 ist des Falles Erwähnung geschehen, in welchem den Beobachtungen verschiedener Stationen verschiedene Gewichte beigelegt werden müssen; dieser soll jetzt in Betracht gezogen werden.

Wenn auf allen Stationen dasselbe Instrument und dieselben Beobachter, oder gleich gute Instrumente und Beobachter von gleicher Qualität verwendet worden sind, so liegt in der Regel kein Grund vor die Beobachtungen irgend einer Station für mehr oder minder genau zu halten als die der andern Stationen, und man kann allenthalben, wie im Vorhergehenden angegeben ist, das Gewicht jeder einzelnen Beobachtung $= 1$ setzen. Sind dagegen auf verschiedenen Stationen Instrumente oder Beobachter verschiedener Qualität verwendet worden, oder ist beides der Fall gewesen, so sind aus diesem Grunde die Gewichte der Beobachtungen dieser Stationen zu modificiren, und überhaupt die Beobachtungen der verschiedenen Stationen in Bezug auf das ihnen beizulegende Gewicht in verschiedene Gattungen zu theilen. Man kann demungeachtet bei der Ausführung der im Vorhergehenden erklärten Rechnungen auf allen Stationen den einzelnen Beobachtungen das Gewicht $= 1$ beilegen, und die einfachen Aenderungen, die vorzunehmen sind, bis zum Beginn des zweiten Theils der Auflösung verschieben. Um diese Aenderungen zu ermitteln kann man auf die folgende Weise verfahren.

Man muss sich eine möglichst grosse Anzahl von unabhängigen Beobachtungen verschiedener Winkel verschaffen, und diese Beobach-

tungen müssen abtheilungsweise mit denselben Instrumenten und denselben Beobachtern, die zur Triangulation verwendet worden sind, ausgeführt worden sein. Wenn die Triangulation von nicht zu kleiner Ausdehnung ist, so können die bei derselben beobachteten Richtungen zu diesem Zwecke dienen.

Aus den Beobachtungen einer jeden Gattung und eines jeden Winkels nehme man das arithmetische Mittel, ziehe dieses von einer jeden einzelnen Beobachtung ab, und berechne daraus auf bekannte Art das Quadrat des mittleren, zu befürchtenden, Fehlers. Man nehme nemlich die Quadrate der eben genannten Unterschiede, addire diese, und dividire deren Summe mit der Anzahl der Beobachtungen weniger der Anzahl der Unbekannten, welche letztere hier für jeden Winkel $= 2$ ist. Aus den so für jede der verschiedenen Gattungen von Beobachtungen erhaltenen Resultaten nehme man wieder die arithmetischen Mittel, worauf die umgekehrten Verhältnisse dieser die Verhältnisse der den verschiedenen Gattungen von Beobachtungen beizulegenden Gewichte geben.

Man habe zum Beispiel bei einer der vorhandenen Gattungen von Beobachtungen für die verschiedenen Winkel die Summen s, s', s'', etc. der Fehlerquadrate erhalten, wobei die Anzahl der Beobachtungen dieser Winkel m, m', m'', etc. seien, dann setze man

$$u = \frac{s}{m-2}, \quad u' = \frac{s'}{m'-2}, \quad u'' = \frac{s''}{m''-2}, \text{ etc.}$$

und

$$v = \frac{u+u'+u''+\text{ etc.}}{n}$$

wenn n die Anzahl der u bedeutet.

Für eine andere Gattung der vorhandenen Beobachtungen habe man ebenso erhalten

$$u_{,} = \frac{s_{,}}{m_{,}-2}, \quad u_{,}' = \frac{s_{,}'}{m_{,}'-2}, \quad u_{,}'' = \frac{s_{,}''}{m_{,}''-2}, \text{ etc.}$$

$$v_{,} = \frac{u_{,}+u_{,}'+u_{,}''+\text{ etc.}}{n_{,}}$$

für eine dritte Gattung von Beobachtungen

$$u_{,,} = \frac{s_{,,}}{m_{,,}-2}, \quad u_{,,}' = \frac{s_{,,}'}{m_{,,}'-2}, \quad u_{,,}'' = \frac{s_{,,}''}{m_{,,}''-2}, \text{ etc.}$$

$$v_{,,} = \frac{u_{,,}-u_{,,}'+u_{,,}''+\text{ etc.}}{n_{,,}}$$

u. s. w. wenn eine grössere Anzahl von Beobachtungsgattungen vorhanden ist. Bezeichnet man nun mit 1, $\pi_{,}$, $\pi_{,,}$, etc. das jeder einzelnen

Beobachtung dieser verschiedenen Beobachtungsgattungen beizulegende Gewicht, so werden

$$\pi_{,} = \frac{\nu}{\nu_{,}}, \quad \pi_{,,} = \frac{\nu}{\nu_{,,}}, \text{ etc.}$$

Je grösser die Anzahl von Beobachtungen ist, die man auf diese Art untersucht hat, desto sicherer wird das vorstehende Resultat.

Ist daher vorläufig bei den Ausgleichungen auf den Stationen, auf jeder derselben das Gewicht der einzelnen Beobachtung = 1 gesetzt worden, so bleiben zwar für diejenigen Stationen, auf welchen die Beobachtungsgattung, welcher ν zugehört, vorhanden ist, alle nach den vorangegangenen Ausdrücken berechneten Grössen unverändert, aber auf den Stationen, auf welchen andere Beobachtungsgattungen vorhanden sind, müssen einige der nach dem Vorhergehenden erhaltenen Grössen mit Zahlen $\pi_{,}$, $\pi_{,,}$, etc. multiplicirt werden.

Die Grössen, die dieser Verbesserung bedürfen, sind die Coefficienten

$$(1,1)_s, \quad (2,2,1)_s, \quad (3,3,2)_s, \text{ etc. und } (ll,n)_s$$

statt deren man in den folgenden Rechnungen die Produkte

$$(1,1)_s.\pi_s, \quad (2,2,1)_s.\pi_s, \quad (3,3,2)_s.\pi_s, \text{ etc. } (ll,n)_s.\pi_s$$

anwenden muss, wenn π_s denjenigen Werth der $\pi_{,}$, $\pi_{,,}$, etc. bezeichnet, welcher den Beobachtungen der Station s zukommt. Weiter ist aus diesem Grunde keine Aenderung vorzunehmen.

139.

2) Zweiter Theil der Auflösung.

Dieser fängt damit an, dass man die Bedingungsgleichungen, die das Dreiecksnetz darbietet ermittelt und aufstellt; ich verweise dafür auf den Inhalt des Art. 91. In die Bedingungsgleichungen sind die Resultate der Ausgleichungen auf den Stationen, oder mit anderen Worten die Bögen $y(r)_s$ zu substituiren, und die Resultate dieser Substitutionen, nach der Reihenfolge, in welcher man die Bedingungsgleichungen aufgestellt hat, mit

$$F(I), \quad F(II), \quad F(III), \text{ etc.}$$

zu bezeichnen. Ausserdem sind die Differentiale der Bedingungsgleichungen zu bilden, und die Coefficienten derselben numerisch zu berechnen; ich verweise hiefür auf den Inhalt des Art. 92, und wieder-

hole dabei, dass man die Coefficienten jeder Bedingungsgleichung insgesammt, nebst dem dazu gehörigen F, vor ihrer Anwendung mit jeder beliebigen Zahl multipliciren darf. Man kann diese Eigenschaft dazu benutzen um entweder die Coefficienten der Seitengleichungen, die gewöhnlich ursprünglich grösser sind, als die der Winkelgleichungen, diesen ohngefähr gleich zu machen, oder umgekehrt die Coefficienten der Winkelgleichungen denen der Seitengleichungen ohngefähr gleich zu machen. Diese Coefficienten sind tabularisch zusammen zu stellen, und ihnen die Bezeichnung

$$q(r,I)_s, \quad q(r,II)_s, \quad q(r,III)_s, \text{ etc.}$$

zu geben, in welcher r die Richtungsnummer, s die Stationsnummer, und I, II, III, etc. die Nummern der Bedingungsgleichungen sind. Der Art. 93 giebt ein Beispiel dieser Zusammenstellung. Es werden ferner

α) Wenn auf der Station alle Richtungen in jedem Gyrus eingeschnitten worden sind,

$$\begin{aligned} \eta(1,I)_s &= q(1,I)_s \\ \eta(2,I)_s &= q(2,I)_s \\ \eta(3,I)_s &= q(3,I)_s \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(1,I)_s &= \frac{\eta(1,I)_s}{(1,1)_s} = \frac{q(1,I)_s}{p} \\ Q(2,I)_s &= \frac{\eta(2,I)_s}{(2,2,1)_s} = \frac{q(2,I)_s}{p} \\ Q(3,I)_s &= \frac{\eta(3,I)_s}{(3,3,2)_s} = \frac{q(3,I)_s}{p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1,I)_s &= Q(1,I)_s \\ f(2,I)_s &= Q(2,I)_s \\ f(3,I)_s &= Q(3,I)_s \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke sind durch allmählige Vertauschung der I mit den II, III, etc. auf alle Bedingungsgleichungen auszudehnen, auch ist, wie in allen folgenden ähnlichen Ausdrücken, wo nöthig, auf die im vor. Art. erklärten Zahlen π_s Rücksicht zu nehmen.

β) Wenn auf der Station nicht in jedem, oder in keinem, Gyrus alle Richtungen eingeschnitten worden sind.

a) Wenn auf der Station drei Richtungen eingeschnitten worden sind,

$$\eta(1,I)_s = q(1,I)_s$$
$$\eta(2,I)_s = q(2,I)_s$$
$$\eta(3,I)_s = \eta(3,I)_s$$

$$f(1,I)_s = Q(1,I)_s = \frac{\eta(1,I)_s}{(1,1)_s}$$
$$f(2,I)_s = Q(2,I)_s = \frac{\eta(2,I)_s}{(2,2,1)_s}$$
$$f(3,I)_s = Q(3,I)_s = \frac{\eta(3,I)_s}{(3,3,2)_s}$$

die auch, wie eben erklärt, auf alle Bedingungsgleichungen auszudehnen sind.

b) Wenn auf der Station vier Richtungen eingeschnitten worden sind, so werden

$$\eta(1,I)_s = q(1,I)_s$$
$$\eta(2,I)_s = q(2,I)_s$$
$$\eta(3,I)_s = q(3,I)_s$$
$$\eta(4,I)_s = \beta_s'''.q(2,I)_s + \gamma_s'''.q(3,I)_s + q(4,I)_s$$

$$Q(1,I)_s = \frac{\eta(1,I)_s}{(1,1)_s}, \qquad Q(2,I)_s = \frac{\eta(2,I)_s}{(2,2,1)_s}$$
$$Q(3,I)_s = \frac{\eta(3,I)_s}{(3,3,2)_s}, \qquad Q(4,I)_s = \frac{\eta(4,I)_s}{(4,4,3)_s}$$

$$f(1,I)_s = Q(1,I)_s$$
$$f(2,I)_s = Q(2,I)_s + \beta_s'''.Q(4,I)_s$$
$$f(3,I)_s = Q(3,I)_s + \gamma_s'''.Q(4,I)_s$$
$$f(4,I)_s = Q(4,I)_s$$

die auch auf alle Bedingungsgleichungen auszudehnen sind.

c) Wenn auf der Station fünf Richtungen eingeschnitten worden sind, so kommt zu den unter *b*) angegebenen, mit $\eta(r,I)_s$ bezeichneten Grössen hinzu,

$$\eta(5,I)_s = \beta_s^{IV}.q(2,I)_s + \gamma_s^{IV}.q(3,I)_s + \delta_s^{IV}.q(4,I)_s + q(5,I)_s$$

zu den $Q(r,I)_s$ kommt hinzu

$$Q(5,I)_s = \frac{\eta(5,I)_s}{(5,5,4)_s}$$

und die $f(r,I)_s$ werden nach den folgenden Ausdrücken berechnet,

$$f(1,I)_s = Q(1,I)_s$$
$$f(2,I)_s = Q(2,I)_s + \beta_s'''.Q(4,I)_s + \beta_s^{IV}.Q(5,I)_s$$
$$f(3,I)_s = Q(3,I)_s + \gamma_s'''.Q(4,I)_s + \gamma_s^{IV}.Q(5,I)_s$$
$$f(4,I)_s = Q(4,I)_s + \delta_s^{IV}.Q(5,I)_s$$
$$f(5,I)_s = Q(5,I)_s$$

die selbstverständlich auch auf alle Bedingungsgleichungen ausgedehnt werden müssen. Man erkennt hieraus vollkommen, wie zu verfahren ist, wenn auf der Station mehr wie fünf Richtungen eingeschnitten worden sind.

Auch die numerischen Werthe aller vorstehenden Hülfsgrössen sind zur Erlangung einer klaren Uebersicht tabularisch aufzustellen, wie oben am Beispiel gezeigt worden ist.

140.

Die Berechnung der Coefficienten der Endgleichungen, die nun an die Reihe kommt, kann auf viererlei Weise ausgeführt werden. Bezeichnet man diese Coefficienten mit (I,I), (I,II), etc. (II,II), etc. etc., wo die römischen Zahlen sich wieder auf die Bedingungsgleichungen beziehen, so werden erstens

$$
\begin{aligned}
(I,I) &= \Sigma\{Q(1,I)_s\,.\,\eta(1,I)_s + Q(2,I)_s\,.\,\eta(2,I)_s + Q(3,I)_s\,.\,\eta(3,I)_s + \ldots\} \\
(I,II) &= \Sigma\{Q(1,II)_s\,.\,\eta(1,I)_s + Q(2,II)_s\,.\,\eta(2,I)_s + Q(3,II)_s\,.\,\eta(3,I)_s + \ldots\} \\
(I,III) &= \Sigma\{Q(1,III)_s\,.\,\eta(1,I)_s + Q(2,III)_s\,.\,\eta(2,I)_s + Q(3,III)_s\,.\,\eta(3,I)_s + \ldots\} \\
&\quad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.} \\
(II,II) &= \Sigma\{Q(1,II)_s\,.\,\eta(1,II)_s + Q(2,II)_s\,.\,\eta(2,II)_s + Q(3,II)_s\,.\,\eta(3,II)_s + \ldots\} \\
(II,III) &= \Sigma\{Q(1,III)_s\,.\,\eta(1,II)_s + Q(2,III)_s\,.\,\eta(2,II)_s + Q(3,III)_s\,.\,\eta(3,II)_s + \ldots\} \\
&\quad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.} \\
(III,III) &= \Sigma\{Q(1,III)_s\,.\,\eta(1,III)_s + Q(2,III)_s\,.\,\eta(2,III)_s + Q(3,III)_s\,.\,\eta(3,III)_s + \ldots\} \\
&\quad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.} \\
&\quad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

bis alle Bedingungsgleichungen erschöpft sind. Die zweite Art diese Coefficienten zu berechnen ergiebt sich aus der ersten, wenn man darin die Q und die η mit einander vertauscht. Rechnet man diese Coefficienten auf diese beiden Arten, so wird dadurch nichts weiter controlirt, wie die Divisionen, durch welche man die Q erhält. Die dritte Berechnungsart geschieht durch die folgenden Ausdrücke,

$$
\begin{aligned}
(I,I) &= \Sigma\{f(1,I)_s\,.\,q(1,I)_s + f(2,I)_s\,.\,q(2,I)_s + f(3,I)_s\,.\,q(3,I)_s + \ldots\} \\
(I,II) &= \Sigma\{f(1,I)_s\,.\,q(1,II)_s + f(2,I)_s\,.\,q(2,II)_s + f(3,I)_s\,.\,q(3,II)_s + \ldots\} \\
(I,III) &= \Sigma\{f(1,I)_s\,.\,q(1,III)_s + f(2,I)_s\,.\,q(2,III)_s + f(3,I)_s\,.\,q(3,III)_s + \ldots\} \\
&\quad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

$$(II,II) = \Sigma\{f(1,II)_s \,.\, q(1,II)_s + f(2,II)_s \; q(2,II)_s + f(3,II)_s \,.\, q(3,II)_s + \ldots\}$$
$$(II,III) = \Sigma\{f(1,II)_s \,.\, q(1,III)_s + f(2,II)_s \,.\, q(2,III)_s + f(3,II)_s \,.\, q(3,III)_s + \ldots\}$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$
$$(III,III) = \Sigma\{f(1,III)_s \,.\, q(1,III)_s + f(2,III)_s \,.\, q(2,III)_s + f(3,III)_s \,.\, q(3,III)_s + \ldots\}$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

und die vierte Art erhält man durch die Vertauschung der f und der q mit einander in den vorstehenden Ausdrücken. Rechnet man diese Coefficienten beides durch die erste und die dritte Art, so werden dadurch nicht blos diese selbst, sondern auch alle Hülfsgrössen des vor. Art. controlirt.

Wie man sieht haben die Ausdrücke für alle hier erforderlichen Grössen die Eigenschaft, dass sie stationsweise berechnet und aufgestellt werden können. Die Grössen des vor. Art. bleiben in Bezug auf die einzelnen Stationen von einander abgesondert, für die Coefficienten dieses Art. müssen die Resultate, die jede Station liefert, addirt werden, wie das Summenzeichen Σ anzeigt.

141.

Die Gleichungen, denen die Coefficienten des vor. Art. angehören, sind, wenn die Unbekannten derselben mit (I), (II), (III), etc. bezeichnet werden, die folgenden,

$$(I,I)(I) + (I,II)(II) + (I,III)(III) + \ldots\ldots = F(I)$$
$$(I,II)(I) + (II,II)(II) + (II,III)(III) + \ldots\ldots = F(II)$$
$$(I,III)(I) + (II,III)(II) + (III,III)(III) + \ldots\ldots = F(III)$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

und ihre Anzahl ist der Anzahl der Bedingungsgleichungen gleich. Ehe wir an ihre Auflösung gehen ist eine wesentliche Bemerkung einzuschalten.

In jedem Dreiecksnetze von einiger Ausdehnung wird sich ereignen, dass eine Anzahl der Coefficienten der vorstehenden Endgleichungen gleich Null werden, und je grösser das Dreiecksnetz ist, desto mehr wird dieses der Fall sein. Als Folge davon können in diesen Gleichungen mehr oder minder grosse Lücken eintreten, so nemlich, dass in der einen und der andern derselben eine Reihe von aufeinander folgenden Coefficienten Null werden, und hierauf wieder einige vorkommen, die

nicht Null sind. In Bezug auf die Richtigkeit der Auflösung hat dieser Umstand nun nicht den mindesten Einfluss, aber man kann sich desselben bedienen, um die Arbeit, die die Auflösung erfordert, abzukürzen. Zu dem Ende ist nichts weiter zu thun, wie die Reihenfolge, in welcher man die Bedingungsgleichungen des Dreiecksnetzes zuerst aufgestellt hat, so zu ändern, dass die Coefficienten, die nicht Null werden, möglichst nach vorne geschoben werden, so dass sie vom ersten anfangend, eine möglichst ununterbrochene Reihe bilden. Es wird hiedurch nicht blos die Auflösung dieser Gleichungen, oder die Ermittelung der Werthe der Unbekannten derselben, sondern auch die Berechnung der Gewichte möglichst abgekürzt.

Wenn es sich nun nur um die Ermittelung der Unbekannten handelt, so braucht man die Nummern, die den Bedingungsgleichungen anfänglich gegeben worden sind, nicht zu ändern, will man aber auch die Gewichte berechnen, so thut man wohl die Nummern der Bedingungsgleichungen so zu ändern, dass sie nach der beschriebenen Versetzung wieder die fortlaufende Zahlenreihe *I*, *II*, *III*, etc. bilden. Ohne diese Aenderung würde man sich leicht in den Gliedern der Ausdrücke der Gewichte, die aufzunehmen sind, irren können. Dass mit dieser Aenderung der Numerirung der Bedingungsgleichungen auch die entsprechende Aenderung in der Bezeichnung der Unbekannten (Numerirung dieser) und der Grössen des vorvor. Art. eintreten muss, versteht sich von selbst.

142.

Die Auflösung der Endgleichungen des vor. Art. ist die bekannte, allein da die im Verlaufe dieser Abhandlung eingeführten Zwischengrössen derselben bei der Berechnung der Gewichte wieder gebraucht werden, so wird es nöthig, die in den Artt. 46 u. 49 gegebene Auflösung in dieser Recapitulation, in den hier eingeführten Bezeichnungen ausgedrückt, mit aufzunehmen. Zu berechnen sind

$$(2)_1 = -\frac{(I,II)}{(I,I)}, \quad (3)_1 = -\frac{(I,III)}{(I,I)}, \quad (4)_1 = -\frac{(I,IV)}{(I,I)}, \quad \ldots \quad \varphi_1 = +\frac{F(I)}{(I,I)}$$

$$\begin{aligned}(II,II,1) &= (II,II) + (I,II)(2)_1 \\ (II,III,1) &= (II,III) + (I,III)(2)_1 \\ (II,IV,1) &= (II,IV) + (I,IV)(2)_1 \\ &\text{etc.} \\ \underline{F(II,1)} &= F(II) + F(I)(2)_1\end{aligned}$$

$$(III,III,1) = (III,III) + (I,III)(3)_1$$
$$(III,IV,1) = (III,IV) + (I,IV)(3)_1$$
etc.
$$F(III,1) = F(III) + F(I)(3)_1$$

$$(IV,IV,1) = (IV,IV) + (I,IV)(4)_1$$
etc.
$$F(IV,1) = F(IV) + F(I)(4)_1$$

etc. bis
$$R_1 = F(I)\varphi_1$$

$$(3)_2 = -\frac{(II,III,1)}{(II,II,1)}, \quad (4)_2 = -\frac{(II,IV,1)}{(II,II,1)}, \; \ldots\ldots \; \varphi_2 = +\frac{F(II,1)}{(II,II,1)}$$
$$(III,III,2) = (III,III,1) + (II,III,1)(3)_2$$
$$(III,IV,2) = (III,IV,1) + (II,IV,1)(3)_2$$
etc.
$$F(III,2) = F(III,1) + F(II,1)(3)_2$$

$$(IV,IV,2) = (IV,IV,1) + (II,IV,1)(4)_2$$
etc.
$$F(IV,2) = F(IV,1) + F(II,1)(4)_2$$

etc. bis
$$R_2 = R_1 + F(II,1)\varphi_2$$

$$(4)_3 = -\frac{(III,IV,2)}{(III,III,2)}, \; \ldots\ldots \; \varphi_3 = +\frac{F(III,2)}{(III,III,2)}$$
$$(IV,IV,3) = (IV,IV,2) + (III,IV,2)(4)_3$$
etc.
$$F(IV,3) = F(IV,2) + F(III,2)(4)_3$$

etc. bis
$$R_3 = R_2 + F(III,2)\varphi_3$$

$$\ldots\ldots \; \varphi_4 = +\frac{F(IV,3)}{(IV,IV,3)}$$
etc. bis
$$R_4 = R_3 + F(IV,3)\varphi_4$$

etc. bis F_q

wenn q die Anzahl der Endgleichungen bezeichnet.

Diese Coefficienten habe ich so angesetzt, wie ich die Berechnung derselben auszuführen pflege, und die mir die einfachste Weise zu sein scheint. Allein man kann diesen Ausdrücken dadurch, dass man die

Grössen $(III,III,1)$, $(III,IV,1)$, etc., die nur als Hülfsgrössen zur Berechnung derjenigen Coefficienten, die später gebraucht werden, dienen, eliminirt, scheinbar eine kürzere Form geben, die obgleich sie bei der numerischen Rechnung keinen Vortheil gewährt, doch die Uebersicht, namentlich wenn von den ursprünglichen Coefficienten (I,II), (I,III), etc. (II,III), etc. etc. eine Anzahl gleich Null sind, erleichtert. Diese Form ist die folgende, in welcher alle Coefficienten für fünf Gleichungen vollständig ausgeschrieben worden sind, und die weggelassenen etc. Zeichen leicht ergänzt werden können.

$$(II,II,1) = (II,II) + (I,II)(2)_1$$

$$\begin{aligned}
(II,III,1) &= (II,III) + (I,III)(2)_1 \\
(III,III,2) &= (III,III) + (I,III)(3)_1 + (II,III,1)(3)_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(II,IV,1) &= (II,IV) + (I,IV)(2)_1 \\
(III,IV,2) &= (III,IV) + (I,IV)(3)_1 + (II,IV,1)(3)_2 \\
(IV,IV,3) &= (IV,IV) + (I,IV)(4)_1 + (II,IV,1)(4)_2 + (III,IV,2)(4)_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(II,V,1) &= (II,V) + (I,V)(2)_1 \\
(III,V,2) &= (III,V) + (I,V)(3)_1 + (II,V,1)(3)_2 \\
(IV,V,3) &= (IV,V) + (I,V)(4)_1 + (II,V,1)(4)_2 + (III,V,2)(4)_3 \\
(V,V,4) &= (V,V) + (I,V)(5)_1 + (II,V,1)(5)_2 + (III,V,2)(5)_3 + (IV,V,3)(5)_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(II,1) &= F(II) + F(I)(2)_1 \\
F(III,2) &= F(III) + F(I)(3)_1 + F(II,1)(3)_2 \\
F(IV,3) &= F(IV) + F(I)(4)_1 + F(II,1)(4)_2 + F(III,2)(4)_3 \\
F(V,4) &= F(V) + F(I)(5)_1 + F(II,1)(5)_2 + F(III,2)(5)_3 + F(IV,3)(5)_4 \\
R_5 &= F(I)\varphi_1 + F(II,1)\varphi_2 + F(III,2)\varphi_3 + F(IV,3)\varphi_4 + F(V,4)\varphi_5
\end{aligned}$$

Es wird nun zunächst die vollständige Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Quadrate der übrig bleibenden Fehler, wenn sie mit W bezeichnet wird,

$$W = W_0 + R_q$$

wo W_0 die Summe ist, deren Berechnung im Art. 137, und bez. im Art. 138 gezeigt wurde, und q wieder die Anzahl der Bedingungsgleichungen bedeutet. Die obigen Endgleichungen sind ferner durch die obigen Rechnungen in die folgenden verwandelt worden,

$$\begin{aligned}
(I,I)(I) + (I,II)(II) + (I,III)(III) + \ldots &= F(I) \\
(II,II,1)(II) + (II,III,1)(III) + \ldots &= F(II,1) \\
(III,III,2)(III) + \ldots &= F(III,2) \\
\text{etc.} \qquad & \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Beobachtung dieser verschiedenen Beobachtungsgattungen beizulegende Gewicht, so werden

$$\pi_{,} = \frac{\nu}{\nu_{,}}, \quad \pi_{,,} = \frac{\nu}{\nu_{,,}}, \text{ etc.}$$

Je grösser die Anzahl von Beobachtungen ist, die man auf diese Art untersucht hat, desto sicherer wird das vorstehende Resultat.

Ist daher vorläufig bei den Ausgleichungen auf den Stationen, auf jeder derselben das Gewicht der einzelnen Beobachtung $= 1$ gesetzt worden, so bleiben zwar für diejenigen Stationen, auf welchen die Beobachtungsgattung, welcher ν zugehört, vorhanden ist, alle nach den vorangegangenen Ausdrücken berechneten Grössen unverändert, aber auf den Stationen, auf welchen andere Beobachtungsgattungen vorhanden sind, müssen einige der nach dem Vorhergehenden erhaltenen Grössen mit Zahlen $\pi_{,}$, $\pi_{,,}$, etc. multiplicirt werden.

Die Grössen, die dieser Verbesserung bedürfen, sind die Coefficienten

$$(1,1)_s, \ (2,2,1)_s, \ (3,3,2)_s, \text{ etc. und } (ll,n)_s$$

statt deren man in den folgenden Rechnungen die Produkte

$$(1,1)_s.\pi_s, \ (2,2,1)_s.\pi_s, \ (3,3,2)_s.\pi_s, \text{ etc. } (ll,n)_s.\pi_s$$

anwenden muss, wenn π_s denjenigen Werth der $\pi_{,}$, $\pi_{,,}$, etc. bezeichnet, welcher den Beobachtungen der Station s zukommt. Weiter ist aus diesem Grunde keine Aenderung vorzunehmen.

139.

2) Zweiter Theil der Auflösung.

Dieser fängt damit an, dass man die Bedingungsgleichungen, die das Dreiecksnetz darbietet ermittelt und aufstellt; ich verweise dafür auf den Inhalt des Art. 91. In die Bedingungsgleichungen sind die Resultate der Ausgleichungen auf den Stationen, oder mit anderen Worten die Bögen $y(r)_s$ zu substituiren, und die Resultate dieser Substitutionen, nach der Reihenfolge, in welcher man die Bedingungsgleichungen aufgestellt hat, mit

$$F(I), \ F(II), \ F(III), \text{ etc.}$$

zu bezeichnen. Ausserdem sind die Differentiale der Bedingungsgleichungen zu bilden, und die Coefficienten derselben numerisch zu berechnen; ich verweise hiefür auf den Inhalt des Art. 92, und wieder-

hole dabei, dass man die Coefficienten jeder Bedingungsgleichung insgesammt, nebst dem dazu gehörigen F, vor ihrer Anwendung mit jeder beliebigen Zahl multipliciren darf. Man kann diese Eigenschaft dazu benutzen um entweder die Coefficienten der Seitengleichungen, die gewöhnlich ursprünglich grösser sind, als die der Winkelgleichungen, diesen ohngefähr gleich zu machen, oder umgekehrt die Coefficienten der Winkelgleichungen denen der Seitengleichungen ohngefähr gleich zu machen. Diese Coefficienten sind tabularisch zusammen zu stellen, und ihnen die Bezeichnung

$$q(r,I)_s\,,\quad q(r,II)_s\,,\quad q(r,III)_s\,,\ \text{etc.}$$

zu geben, in welcher r die Richtungsnummer, s die Stationsnummer, und I, II, III, etc. die Nummern der Bedingungsgleichungen sind. Der Art. 93 giebt ein Beispiel dieser Zusammenstellung. Es werden ferner

α) Wenn auf der Station alle Richtungen in jedem Gyrus eingeschnitten worden sind,

$$\eta(1,I)_s = q(1,I)_s$$
$$\eta(2,I)_s = q(2,I)_s$$
$$\eta(3,I)_s = q(3,I)_s$$
$$\text{etc.}$$
$$Q(1,I)_s = \frac{\eta(1,I)_s}{(1,1)_s} = \frac{q(1,I)_s}{p}$$
$$Q(2,I)_s = \frac{\eta(2,I)_s}{(2,2,1)_s} = \frac{q(2,I)_s}{p}$$
$$Q(3,I)_s = \frac{\eta(3,I)_s}{(3,3,2)_s} = \frac{q(3,I)_s}{p}$$
$$f(1,I)_s = Q(1,I)_s$$
$$f(2,I)_s = Q(2,I)_s$$
$$f(3,I)_s = Q(3,I)_s$$
$$\text{etc.}$$

Diese Ausdrücke sind durch allmählige Vertauschung der I mit den II, III, etc. auf alle Bedingungsgleichungen auszudehnen, auch ist, wie in allen folgenden ähnlichen Ausdrücken, wo nöthig, auf die im vor. Art. erklärten Zahlen π_s Rücksicht zu nehmen.

β) Wenn auf der Station nicht in jedem, oder in keinem, Gyrus alle Richtungen eingeschnitten worden sind.

a) Wenn auf der Station drei Richtungen eingeschnitten worden sind,

$$\eta(1,I)_s = q(1,I)_s$$
$$\eta(2,I)_s = q(2,I)_s$$
$$\eta(3,I)_s = \eta(3,I)_s$$

$$f(1,I)_s = Q(1,I)_s = \frac{\eta(1,I)_s}{(1,1)_s}$$
$$f(2,I)_s = Q(2,I)_s = \frac{\eta(2,I)_s}{(2,2,1)_s}$$
$$f(3,I)_s = Q(3,I)_s = \frac{\eta(3,I)_s}{(3,3,2)_s}$$

die auch, wie eben erklärt, auf alle Bedingungsgleichungen auszudehnen sind.

b) Wenn auf der Station vier Richtungen eingeschnitten worden sind, so werden

$$\eta(1,I)_s = q(1,I)_s$$
$$\eta(2,I)_s = q(2,I)_s$$
$$\eta(3,I)_s = q(3,I)_s$$
$$\eta(4,I)_s = \beta_s'''.\,q(2,I)_s + \gamma_s'''.\,q(3,I)_s + q(4,I)_s$$

$$Q(1,I)_s = \frac{\eta(1,I)_s}{(1,1)_s}, \qquad Q(2,I)_s = \frac{\eta(2,I)_s}{(2,2,1)_s}$$
$$Q(3,I)_s = \frac{\eta(3,I)_s}{(3,3,2)_s}, \qquad Q(4,I)_s = \frac{\eta(4,I)_s}{(4,4,3)_s}$$

$$f(1,I)_s = Q(1,I)_s$$
$$f(2,I)_s = Q(2,I)_s + \beta_s'''.\,Q(4,I)_s$$
$$f(3,I)_s = Q(3,I)_s + \gamma_s'''.\,Q(4,I)_s$$
$$f(4,I)_s = Q(4,I)_s$$

die auch auf alle Bedingungsgleichungen auszudehnen sind.

c) Wenn auf der Station fünf Richtungen eingeschnitten worden sind, so kommt zu den unter *b*) angegebenen, mit $\eta(r,I)_s$ bezeichneten Grössen hinzu,

$$\eta(5,I)_s = \beta_s^{IV}.\,q(2,I)_s + \gamma_s^{IV}.\,q(3,I)_s + \delta_s^{IV}.\,q(4,I)_s + q(5,I)_s$$

zu den $Q(r,I)_s$ kommt hinzu

$$Q(5,I)_s = \frac{\eta(5,I)_s}{(5,5,4)_s}$$

und die $f(r,I)_s$ werden nach den folgenden Ausdrücken berechnet,

$$f(1,I)_s = Q(1,I)_s$$
$$f(2,I)_s = Q(2,I)_s + \beta_s'''.\,Q(4,I)_s + \beta_s^{IV}.\,Q(5,I)_s$$
$$f(3,I)_s = Q(3,I)_s + \gamma_s'''.\,Q(4,I)_s + \gamma_s^{IV}.\,Q(5,I)_s$$
$$f(4,I)_s = Q(4,I)_s + \delta_s^{IV}.\,Q(5,I)_s$$
$$f(5,I)_s = Q(5,I)_s$$

die selbstverständlich auch auf alle Bedingungsgleichungen ausgedehnt werden müssen. Man erkennt hieraus vollkommen, wie zu verfahren ist, wenn auf der Station mehr wie fünf Richtungen eingeschnitten worden sind.

Auch die numerischen Werthe aller vorstehenden Hülfsgrössen sind zur Erlangung einer klaren Uebersicht tabularisch aufzustellen, wie oben am Beispiel gezeigt worden ist.

140.

Die Berechnung der Coefficienten der Endgleichungen, die nun an die Reihe kommt, kann auf viererlei Weise ausgeführt werden. Bezeichnet man diese Coefficienten mit (I,I), (I,II), etc. (II,II), etc. etc., wo die römischen Zahlen sich wieder auf die Bedingungsgleichungen beziehen, so werden erstens

$$\begin{aligned}
(I,I) &= \Sigma\{Q(1,I)_s\,.\,\eta(1,I)_s + Q(2,I)_s\,.\,\eta(2,I)_s + Q(3,I)_s\,.\,\eta(3,I)_s + \ldots\} \\
(I,II) &= \Sigma\{Q(1,II)_s\,.\,\eta(1,I)_s + Q(2,II)_s\,.\,\eta(2,I)_s + Q(3,II)_s\,.\,\eta(3,I)_s + \ldots\} \\
(I,III) &= \Sigma\{Q(1,III)_s\,.\,\eta(1,I)_s + Q(2,III)_s\,.\,\eta(2,I)_s + Q(3,III)_s\,.\,\eta(3,I)_s + \ldots\} \\
&\quad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.} \\
(II,II) &= \Sigma\{Q(1,II)_s\,.\,\eta(1,II)_s + Q(2,II)_s\,.\,\eta(2,II)_s + Q(3,II)_s\,.\,\eta(3,II)_s + \ldots\} \\
(II,III) &= \Sigma\{Q(1,III)_s\,.\,\eta(1,II)_s + Q(2,III)_s\,.\,\eta(2,II)_s + Q(3,III)_s\,.\,\eta(3,II)_s + \ldots\} \\
&\quad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.} \\
(III,III) &= \Sigma\{Q(1,III)_s\,.\,\eta(1,III)_s + Q(2,III)_s\,.\,\eta(2,III)_s + Q(3,III)_s\,.\,\eta(3,III)_s + \ldots\} \\
&\quad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.} \\
&\quad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

bis alle Bedingungsgleichungen erschöpft sind. Die zweite Art diese Coefficienten zu berechnen ergiebt sich aus der ersten, wenn man darin die Q und die η mit einander vertauscht. Rechnet man diese Coefficienten auf diese beiden Arten, so wird dadurch nichts weiter controlirt, wie die Divisionen, durch welche man die Q erhält. Die dritte Berechnungsart geschieht durch die folgenden Ausdrücke,

$$\begin{aligned}
(I,I) &= \Sigma\{f(1,I)_s\,.\,q(1,I)_s + f(2,I)_s\,.\,q(2,I)_s + f(3,I)_s\,.\,q(3,I)_s + \ldots\} \\
(I,II) &= \Sigma\{f(1,I)_s\,.\,q(1,II)_s + f(2,I)_s\,.\,q(2,II)_s + f(3,I)_s\,.\,q(3,II)_s + \ldots\} \\
(I,III) &= \Sigma\{f(1,I)_s\,.\,q(1,III)_s + f(2,I)_s\,.\,q(2,III)_s + f(3,I)_s\,.\,q(3,III)_s + \ldots\} \\
&\quad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$(II,II) = \Sigma\{f(1,II)_s \,.\, q(1,II)_s + f(2,II)_s \; q(2,II)_s + f(3,II)_s \,.\, q(3,II)_s + \ldots\}$$
$$(II,III) = \Sigma\{f(1,II)_s \,.\, q(1,III)_s + f(2,II)_s \,.\, q(2,III)_s + f(3,II)_s \,.\, q(3,III)_s + \ldots\}$$
etc. etc.
$$(III,III) = \Sigma\{f(1,III)_s \,.\, q(1,III)_s + f(2,III)_s \,.\, q(2,III)_s + f(3,III)_s \,.\, q(3,III)_s + \ldots\}$$
etc. etc.
etc. etc.

und die vierte Art erhält man durch die Vertauschung der f und der q mit einander in den vorstehenden Ausdrücken. Rechnet man diese Coefficienten beides durch die erste und die dritte Art, so werden dadurch nicht blos diese selbst, sondern auch alle Hülfsgrössen des vor. Art. controlirt.

Wie man sieht haben die Ausdrücke für alle hier erforderlichen Grössen die Eigenschaft, dass sie stationsweise berechnet und aufgestellt werden können. Die Grössen des vor. Art. bleiben in Bezug auf die einzelnen Stationen von einander abgesondert, für die Coefficienten dieses Art. müssen die Resultate, die jede Station liefert, addirt werden, wie das Summenzeichen Σ anzeigt.

141.

Die Gleichungen, denen die Coefficienten des vor. Art. angehören, sind, wenn die Unbekannten derselben mit (I), (II), (III), etc. bezeichnet werden, die folgenden,

$$(I,I)(I) + (I,II)(II) + (I,III)(III) + \ldots\ldots = F(I)$$
$$(I,II)(I) + (II,II)(II) + (II,III)(III) + \ldots\ldots = F(II)$$
$$(I,III)(I) + (II,III)(II) + (III,III)(III) + \ldots\ldots = F(III)$$
etc. etc.

und ihre Anzahl ist der Anzahl der Bedingungsgleichungen gleich. Ehe wir an ihre Auflösung gehen ist eine wesentliche Bemerkung einzuschalten.

In jedem Dreiecksnetze von einiger Ausdehnung wird sich ereignen, dass eine Anzahl der Coefficienten der vorstehenden Endgleichungen gleich Null werden, und je grösser das Dreiecksnetz ist, desto mehr wird dieses der Fall sein. Als Folge davon können in diesen Gleichungen mehr oder minder grosse Lücken eintreten, so nemlich, dass in der einen und der andern derselben eine Reihe von aufeinander folgenden Coefficienten Null werden, und hierauf wieder einige vorkommen, die

nicht Null sind. In Bezug auf die Richtigkeit der Auflösung hat dieser Umstand nun nicht den mindesten Einfluss, aber man kann sich desselben bedienen, um die Arbeit, die die Auflösung erfordert, abzukürzen. Zu dem Ende ist nichts weiter zu thun, wie die Reihenfolge, in welcher man die Bedingungsgleichungen des Dreiecksnetzes zuerst aufgestellt hat, so zu ändern, dass die Coefficienten, die nicht Null werden, möglichst nach vorne geschoben werden, so dass sie vom ersten anfangend, eine möglichst ununterbrochene Reihe bilden. Es wird hiedurch nicht blos die Auflösung dieser Gleichungen, oder die Ermittelung der Werthe der Unbekannten derselben, sondern auch die Berechnung der Gewichte möglichst abgekürzt.

Wenn es sich nun nur um die Ermittelung der Unbekannten handelt, so braucht man die Nummern, die den Bedingungsgleichungen anfänglich gegeben worden sind, nicht zu ändern, will man aber auch die Gewichte berechnen, so thut man wohl die Nummern der Bedingungsgleichungen so zu ändern, dass sie nach der beschriebenen Versetzung wieder die fortlaufende Zahlenreihe *I*, *II*, *III*, etc. bilden. Ohne diese Aenderung würde man sich leicht in den Gliedern der Ausdrücke der Gewichte, die aufzunehmen sind, irren können. Dass mit dieser Aenderung der Numerirung der Bedingungsgleichungen auch die entsprechende Aenderung in der Bezeichnung der Unbekannten (Numerirung dieser) und der Grössen des vorvor. Art. eintreten muss, versteht sich von selbst.

142.

Die Auflösung der Endgleichungen des vor. Art. ist die bekannte, allein da die im Verlaufe dieser Abhandlung eingeführten Zwischengrössen derselben bei der Berechnung der Gewichte wieder gebraucht werden, so wird es nöthig, die in den Artt. 46 u. 49 gegebene Auflösung in dieser Recapitulation, in den hier eingeführten Bezeichnungen ausgedrückt, mit aufzunehmen. Zu berechnen sind

$$(2)_1 = -\frac{(I,II)}{(I,I)}, \quad (3)_1 = -\frac{(I,III)}{(I,I)}, \quad (4)_1 = -\frac{(I,IV)}{(I,I)}, \quad \ldots \quad \varphi_1 = +\frac{F(I)}{(I,I)}$$

$$\begin{aligned}(II,II,1) &= (II,II) + (I,II)(2)_1\\ (II,III,1) &= (II,III) + (I,III)(2)_1\\ (II,IV,1) &= (II,IV) + (I,IV)(2)_1\\ &\text{etc.}\\ F(II,1) &= F(II) + F(I)(2)_1\end{aligned}$$

$$(III,III,1) = (III,III) + (I,III)(3)_1$$
$$(III,IV,1) = (III,IV) + (I,IV)(3)_1$$
etc.
$$F(III,1) = F(III) + F(I)(3)_1$$

$$(IV,IV,1) = (IV,IV) + (I,IV)(4)_1$$
etc.
$$F(IV,1) = F(IV) + F(I)(4)_1$$

---

etc. bis
$$R_1 = F(I)\varphi_1$$

$$(3)_2 = -\frac{(II,III,1)}{(II,II,1)}, \quad (4)_2 = -\frac{(II,IV,1)}{(II,II,1)}, \quad \ldots\ldots \quad \varphi_2 = +\frac{F(II,1)}{(II,II,1)}$$
$$(III,III,2) = (III,III,1) + (II,III,1)(3)_2$$
$$(III,IV,2) = (III,IV,1) + (II,IV,1)(3)_2$$
etc.
$$F(III,2) = F(III,1) + F(II,1)(3)_2$$

$$(IV,IV,2) = (IV,IV,1) + (II,IV,1)(4)_2$$
etc.
$$F(IV,2) = F(IV,1) + F(II,1)(4)_2$$

---

etc. bis
$$R_2 = R_1 + F(II,1)\varphi_2$$

$$(4)_3 = -\frac{(III,IV,2)}{(III,III,2)}, \quad \ldots\ldots \quad \varphi_3 = +\frac{F(III,2)}{(III,III,2)}$$
$$(IV,IV,3) = (IV,IV,2) + (III,IV,2)(4)_3$$
etc.
$$F(IV,3) = F(IV,2) + F(III,2)(4)_3$$

---

etc. bis
$$R_3 = R_2 + F(III,2)\varphi_3$$

$$\ldots\ldots \quad \varphi_4 = +\frac{F(IV,3)}{(IV,IV,3)}$$
etc. bis
$$R_4 = R_3 + F(IV,3)\varphi_4$$

---

etc. bis F_q

wenn q die Anzahl der Endgleichungen bezeichnet.

Diese Coefficienten habe ich so angesetzt, wie ich die Berechnung derselben auszuführen pflege, und die mir die einfachste Weise zu sein scheint. Allein man kann diesen Ausdrücken dadurch, dass man die

Grössen $(III,III,1)$, $(III,IV,1)$, etc., die nur als Hülfsgrössen zur Berechnung derjenigen Coefficienten, die später gebraucht werden, dienen, eliminirt, scheinbar eine kürzere Form geben, die obgleich sie bei der numerischen Rechnung keinen Vortheil gewährt, doch die Uebersicht, namentlich wenn von den ursprünglichen Coefficienten (I,II), (I,III), etc. (II,III), etc. etc. eine Anzahl gleich Null sind, erleichtert. Diese Form ist die folgende, in welcher alle Coefficienten für fünf Gleichungen vollständig ausgeschrieben worden sind, und die weggelassenen etc. Zeichen leicht ergänzt werden können.

$$(II,II,1) = (II,II) + (I,II)(2)_1$$

$$\begin{aligned}
(II,III,1) &= (II,III) + (I,III)(2)_1 \\
(III,III,2) &= (III,III) + (I,III)(3)_1 + (II,III,1)(3)_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(II,IV,1) &= (II,IV) + (I,IV)(2)_1 \\
(III,IV,2) &= (III,IV) + (I,IV)(3)_1 + (II,IV,1)(3)_2 \\
(IV,IV,3) &= (IV,IV) + (I,IV)(4)_1 + (II,IV,1)(4)_2 + (III,IV,2)(4)_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(II,V,1) &= (II,V) + (I,V)(2)_1 \\
(III,V,2) &= (III,V) + (I,V)(3)_1 + (II,V,1)(3)_2 \\
(IV,V,3) &= (IV,V) + (I,V)(4)_1 + (II,V,1)(4)_2 + (III,V,2)(4)_3 \\
(V,V,4) &= (V,V) + (I,V)(5)_1 + (II,V,1)(5)_2 + (III,V,2)(5)_3 + (IV,V,3)(5)_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(II,1) &= F(II) + F(I)(2)_1 \\
F(III,2) &= F(III) + F(I)(3)_1 + F(II,1)(3)_2 \\
F(IV,3) &= F(IV) + F(I)(4)_1 + F(II,1)(4)_2 + F(III,2)(4)_3 \\
F(V,4) &= F(V) + F(I)(5)_1 + F(II,1)(5)_2 + F(III,2)(5)_3 + F(IV,3)(5)_4 \\
R_5 &= F(I)\varphi_1 + F(II,1)\varphi_2 + F(III,2)\varphi_3 + F(IV,3)\varphi_4 + F(V,4)\varphi_5
\end{aligned}$$

Es wird nun zunächst die vollständige Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Quadrate der übrig bleibenden Fehler, wenn sie mit W bezeichnet wird,

$$W = W_0 + R_q$$

wo W_0 die Summe ist, deren Berechnung im Art. 137, und bez. im Art. 138 gezeigt wurde, und q wieder die Anzahl der Bedingungsgleichungen bedeutet. Die obigen Endgleichungen sind ferner durch die obigen Rechnungen in die folgenden verwandelt worden,

$$\begin{aligned}
(I,I)(I) + (I,II)(II) + (I,III)(III) + \ldots &= F(I) \\
(II,II,1)(II) + (II,III,1)(III) + \ldots &= F(II,1) \\
(III,III,2)(III) + \ldots &= F(III,2) \\
\text{etc.} \qquad & \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

deren Auflösung durch die folgenden Ausdrücke bewirkt wird, die hier auch für fünf Gleichungen vollständig ausgeschrieben worden sind,

$$
\begin{aligned}
(I)_1 &= \varphi_1 + \varphi_5 . (5)_1 \\
(II)_1 &= \varphi_2 + \varphi_5 . (5)_2 \\
(III)_1 &= \varphi_3 + \varphi_5 . (5)_3 \\
(IV)_1 &= \varphi_4 + \varphi_5 . (5)_4 \\
\hline
(I)_2 &= (I)_1 + (IV)_1 . (4)_1 \\
(II)_2 &= (II)_1 + (IV)_1 . (4)_2 \\
(III)_2 &= (III)_1 + (IV)_1 . (4)_3 \\
\hline
(I)_3 &= (I)_2 + (III)_2 . (3)_1 \\
(II)_3 &= (II)_2 + (III)_2 . (3)_2 \\
\hline
(I)_4 &= (I)_3 + (II)_3 . (2)_1 \\
\hline
(I) &= (I)_4 \\
(II) &= (II)_3 \\
(III) &= (III)_2 \\
(IV) &= (IV)_1 \\
(V) &= \varphi_5
\end{aligned}
$$

und leicht zu erkennen geben, wie zu verfahren ist, wenn mehr wie fünf Gleichungen vorhanden sind.

Man kann die richtige Ausführung der numerischen Auflösung dadurch prüfen, dass man die erhaltenen Werthe der Unbekannten (I), (II), (III), etc. in die ursprünglichen Endgleichungen substituirt, die dadurch erfüllt werden müssen.

Schliesslich bekommt man die $z(r)_s$ durch den folgenden allgemeinen Ausdruck,

$$z(r)_s = f(r,I)_s . (I) + f(r,II)_s . (II) + f(r,III)_s . (III) + \ldots .$$

und den wahrscheinlichsten Werth der Richtungen $x(r)_s$ durch den folgenden,

$$x(r)_s = y(r)_s - z(r)_s$$

womit die Auflösung der Aufgabe beendigt ist.

Eine umfassende Controle des ganzen zweiten Theils der Auflösung entspringt aus der Eigenschaft, dass die $z(r)_s$, wenn sie mit umgekehrtem Zeichen statt der $\delta x(r)_s$ in die Bedingungsgleichungen substituirt werden, diesen Gnüge leisten müssen. Nur die Differentialquotienten

$q(r,I)_s$, $q(r,II)_s$, etc. bleiben dadurch uncontrolirt, von deren Richtigkeit man sich daher auf andere Art überzeugen muss.

Will man ausserdem auch die wahrscheinlichsten Werthe der $u(m)_s$ kennen lernen, so dient dazu der Ausdruck

$$u(m)_s = \frac{p_{m-1}}{P_{m-1}} \Sigma'(z(m)_s - w(r)_s)$$

in welchem aber nur diejenigen $z(m)_s$ und $w(r)_s$ aufgenommen werden dürfen, die in der m^{ten} Gruppe von Gyris wirklich beobachtet worden sind. Durch Zuziehung dieser Werthe der $u(m)_s$ kann man auf ähnliche Art, wie im Art. 137 in Bezug auf die Ausgleichungen auf den Stationen gezeigt wurde, den wie oben berechneten Werth von W einer Controle unterwerfen, wenn man dieses für nöthig halten sollte.

143.

3) Berechnung des Gewichts irgend einer bestimmten Function der Richtungen.

Jeder bestimmten Function der Richtungen kommt ein bestimmtes Gewicht zu, welches durch die unten folgenden Ausdrücke berechnet werden kann. Unter den Functionen der Richtungen, deren Gewichte verlangt werden können, sind vorzugsweise beliebige Winkel und Seiten des Dreiecksnetzes zu verstehen, und diese können zwischen irgend zwei beliebigen Eckpunkten des Netzes gedacht werden; auch kann es sich ereignen, dass die Gewichte einiger der Aggregate $u(m)_s + x(r)_s$ verlangt werden. Die Winkel sowohl wie diese Aggregate sind an sich linearische Functionen der Richtungen, und es sind daher in solchen Fällen in dieser Beziehung keine Vorbereitungen zu treffen, aber da die Seiten keine linearischen Functionen der Richtungen sind, so muss aus dem betreffenden Ausdruck die Differentialgleichung zwischen der Veränderung der Seite und den Veränderungen der sie bestimmenden Richtungen abgeleitet, und die Coefficienten dieser müssen der ferneren Rechnung unterworfen werden. Für die Berechnung dieser Coefficienten verweise ich auf den Art. 103, wo sie ausführlich erklärt worden ist. Bezeichnet man nun allgemein die Veränderung der Seite, oder des Winkels, oder des Aggregats, wie oben, mit Ω, die unbestimmten Aenderungen der in Betracht kommenden Richtungen mit $\delta x(r)_s$, und die Coefficienten dieser Veränderungen mit $k(r)_s$, so ist der allgemeine Ausdruck für Ω,

$$\Omega = \Sigma\Sigma k(r)_s . \delta x(r)_s$$

wo das eine Summenzeichen sich auf r, und das andere sich auf s bezieht, da sehr wohl die Richtungen von mehreren Stationen in Betracht kommen können.

α) Wenn auf einer oder mehreren der in Betracht kommenden Stationen in jedem Gyrus alle Richtungen eingeschnitten worden sind, so setze man für diese überhaupt

$$(M,r)_s = k(r)_s, \quad Q(M,r)_s = \frac{k(r)_s}{p}$$

β) Wenn auf den in Betracht kommenden Stationen sich solche befinden, auf welchen nicht in jedem, oder in keinem, Gyrus alle Richtungen eingeschnitten worden sind, und zwar

a) Wenn drei Richtungen eingeschnitten worden sind, so sind zu setzen,

$$(M,1)_s = k(1)_s$$
$$(M,2)_s = k(2)_s$$
$$(M,3)_s = k(3)_s$$

b) Wenn vier Richtungen eingeschnitten worden sind, so sind zu setzen und zu berechnen,

$$(M,1)_s = k(1)_s$$
$$(M,2)_s = k(2)_s$$
$$(M,3)_s = k(3)_s$$
$$(M,4)_s = \beta_s'''.k(2)_s + \gamma_s'''.k(3)_s + k(4)_s$$

c) Wenn fünf Richtungen eingeschnitten sind, so kommt zu den unter *b*) angeführten Grössen noch die folgende hinzu,

$$(M,5)_s = \beta_s^{IV}.k(2)_s + \gamma_s^{IV}.k(3)_s + \delta_s^{IV}.k(4)_s + k(5)_s$$

u. s. w. wenn Stationen in Betracht kommen, auf welchen mehr wie fünf Richtungen eingeschnitten worden sind. Setzt man hierauf zur Abkürzung, die unter α) ähnlich bezeichneten Grössen wo nöthig eingeschlossen,

$$Q(M,1)_s = \frac{(M,1)_s}{(1,1)_s}, \quad Q(M,2)_s = \frac{(M,2)_s}{(2,2,1)_s}, \quad Q(M,3)_s = \frac{(M,3)_s}{(3,3,2)_s}, \text{ etc.}$$

so wird sogleich

$$R = \Sigma\{Q(M,1)_s.(M,1)_s + Q(M,2)_s.(M,2)_s + Q(M,3)_s.(M,3)_s + \ldots\}$$

womit der erste Theil des gesuchten Gewichts gegeben ist. Um den zweiten Theil desselben zu erhalten, sind zuerst zu berechnen,

$$(I,M) = \Sigma\{Q(M,1)_s.\eta(1,I)_s + Q(M,2)_s.\eta(2,I)_s + Q(M,3)_s.\eta(3,I)_s + \ldots\}$$
$$(II,M) = \Sigma\{Q(M,1)_s.\eta(1,II)_s + Q(M,2)_s.\eta(2,II)_s + Q(M,3)_s.\eta(3,II)_s + \ldots\}$$
$$(III,M) = \Sigma\{Q(M,1)_s.\eta(1,III)_s + Q(M,2)_s.\eta(2,III)_s + Q(M,3)_s.\eta(3,III)_s + \ldots\}$$

u. s. w. bis alle Bedingungsgleichungen des Dreiecksnetzes erschöpft sind. Aus den vorstehenden Grössen ergeben sich die folgenden,

$$\begin{aligned}
(II,M,1) &= (II,M) + (I,M)(2)_1 \\
(III,M,1) &= (III,M) + (I,M)(3)_1 \\
(IV,M,1) &= (IV,M) + (I,M)(4)_1 \\
&\text{etc.} \qquad \text{etc.} \\
(III,M,2) &= (III,M,1) + (II,M,1)(3)_2 \\
(IV,M,2) &= (IV,M,1) + (II,M,1)(4)_2 \\
&\text{etc.} \qquad \text{etc.} \\
(IV,M,3) &= (IV,M,2) + (III,M,2)(4)_3 \\
&\text{etc.} \qquad \text{etc.} \\
&\text{etc.} \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

statt deren man sich auch der folgenden Ausdrücke bedienen kann,

$$\begin{aligned}
(II,M,1) &= (II,M) + (I,M)(2)_1 \\
(III,M,2) &= (III,M) + (I,M)(3)_1 + (II,M,1)(3)_2 \\
(IV,M,3) &= (IV,M) + (I,M)(4)_1 + (II,M,1)(4)_2 + (III,M,2)(4)_3 \\
&\text{etc.} \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Nachdem man durch das eine oder das andere dieser beiden Systeme von Gleichungen die Grössen linker Hand berechnet hat, ergiebt sich

$$S = \frac{(I,M)^2}{(I,I)} + \frac{(II,M,1)^2}{(II,II,1)} + \frac{(III,M,2)^2}{(III,III,2)} + \frac{(IV,M,3)^2}{(IV,IV,3)} + \ldots$$

und das gesuchte Gewicht P wird

$$P = \frac{1}{R-S}.$$

In Bezug auf die Berechnung der Hülfsgrössen $(II,M,1)$, $(III,M,2)$, etc. aus den (I,M), (II,M), (III,M), etc. kann zu mehrerer Deutlichkeit bemerkt werden, dass sie genau dieselbe ist wie die, wodurch die Grössen $F(II,1)$, $F(III,2)$, etc. der Endgleichungen im Art. 142 aus den $F(I)$, $F(II)$, $F(III)$, etc. berechnet wurden, wobei die Hülfsgrössen $(2)_1$, $(3)_1$, etc. $(3)_2$, etc. etc. unverändert dieselben bleiben.

144.

Zweites Verfahren.

Da dieses Verfahren, dessen Erklärung im Art. 108 anfängt, sich nur wenig vom ersten unterscheidet, so kann ich mich bei der Aufstellung der anzuwendenden Ausdrücke kurz fassen. Der Hauptunterschied zwischen den beiden Verfahren besteht darin, dass bei dem gegenwärtig in Rede stehenden auf jeder Station die Richtung, die man als die erste bezeichnet hat, gänzlich aus der Rechnung weggelassen wird, und statt dessen die Unterschiede zwischen den übrigen Richtungen und dieser eintreten. Eine Folge davon ist, dass der dieser ersten Richtung bei der Bildung der Stationstäfelchen beigelegte beiläufige Werth zum definitiven wird, oder dass für jeden Werth von s

$$x(1)_s = y(1)_s = (1)_s\,,\quad \text{und}\quad w(1)_s = z(1)_s = 0$$

werden. Eine andere Folge davon ist, dass man die Verbesserungen der genannten Unterschiede der Richtungen so betrachten kann, als wären sie die Verbesserungen dieser Richtungen selbst, und also überhaupt

$$(r)_s\,,\qquad w(r)_s\,,\qquad y(r)_s\,,\qquad z(r)_s\,,\qquad x(r)_s\,,$$

statt

$$(r)_s-(1)_s\,,\ w(r)_s-w(1)_s\,,\ y(r)_s-y(1)_s\,,\ z(r)_s-z(1)_s\,,\ x(r)_s-x(1)_s\,,$$

schreiben darf.

Dass die Vorbereitungen der Beobachtungen, die in den Artt. 134—136 erklärt wurden, gegenwärtig dieselben sind, wurde schon dort angeführt, aber auch die Aenderungen der $(2,2,1)_s$, $(3,3,2)_s$, etc. $(ll,n)_s$, wenn auf verschiedenen Stationen verschiedene Gattungen von Beobachtungen angenommen werden müssen, bleiben dieselben, die im Art. 138 erklärt wurden; es braucht also in den folgenden Zusammenstellungen darauf keine Rücksicht genommen zu werden, sondern es kann auf diese angezogenen Artikel verwiesen werden.

145.

1) Erster Theil der Auflösung, oder die Ausgleichung auf den Stationen.

α) Wenn auf der Station in jedem Gyrus alle Richtungen eingeschnitten worden sind.

Die Vorbereitung ist ganz dieselbe als beim ersten Verfahren in diesem speciellen Falle, und die Werthe der $y(r)$ sind wieder den arith-

metischen Mitteln aus den Beobachtungen der einzelnen Gyri gleich. Auch wird hier wieder

$$(ll,n) = 0$$

wenn wie früher n die Anzahl aller eingeschnittenen Richtungen bezeichnet. Aber die übrigen Abkürzungen, die das erste Verfahren darbietet, fallen hier weg. Die Gleichungen, die der erste Theil der Auflösung enthält sind zu bilden, und aufzulösen. Nur werden diese Gleichungen in dem hier betrachteten Falle einfacher, wie ausserdem. Nennt man wie früher, das Gewicht der einzigen Gruppe von Gyris, die jetzt auf der Station vorhanden ist, p, so werden die aufzulösenden Gleichungen

$$\begin{aligned} p\tfrac{n-1}{n}w(2) - \tfrac{p}{n}w(3) - \tfrac{p}{n}w(4) - \text{etc.} &= 0 \\ -\tfrac{p}{n}w(2) + p\tfrac{n-1}{n}w(3) - \tfrac{p}{n}w(4) - \text{etc.} &= 0 \\ -\tfrac{p}{n}w(2) - \tfrac{p}{n}w(3) + p\tfrac{n-1}{n}w(4) - \text{etc.} &= 0 \\ \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} & \end{aligned}$$

deren Anzahl $n-1$ ist*).

Die Werthe der Unbekannten $w(2)$, $w(3)$, etc., die diese Gleichungen geben, werden zwar Null, aber die Werthe der Coefficienten

$$(2,2,1),\ (3,3,2),\ \text{etc.}\ \beta'',\ \beta''',\ \gamma''',\ \text{etc. etc.}$$

die aus der Auflösung hervorgehen, treten im zweiten Theil der Auflösung unserer Aufgabe eben so ein, wie in den unten folgenden Fällen. Man findet leicht, dass die analytischen Ausdrücke dieser Coefficienten im gegenwärtigen Falle die folgenden sind,

$$\begin{aligned} (2,2,1) &= p\tfrac{n-1}{n} \\ (3,3,2) &= p\tfrac{n-2}{n-1} \\ (4,4,3) &= p\tfrac{n-3}{n-2} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

---

*) Man bekommt nemlich hier

$$\begin{aligned} Q' = Q'' = Q''' &= \text{etc.} = p \\ (p'p') = (p'p'') = \text{etc.} = (p''p'') &= \text{etc.} = \text{etc.} = \tfrac{p}{n} \\ (lx') = (lx'') &= \text{etc.} = 0 \end{aligned}$$

und daher zufolge des Art. 108

$$(2,2) = (3,3) = \text{etc.} = (2,2,1) = (3,3,1) = \text{etc.} = p\tfrac{n-1}{n}$$

$$(2,3) = (2,3,1) = \text{etc.} = \text{etc.} = -\tfrac{p}{n}$$

$$\beta'' = \frac{1}{n-1}$$
$$\beta''' = \gamma''' = \frac{1}{n-2}$$
$$\beta^{IV} = \gamma^{IV} = \delta^{IV} = \frac{1}{n-3}$$
etc.

die für jeden Werth von n gelten *).

β) Wenn auf der Station nicht in jedem Gyrus, oder in keinem, alle Richtungen eingeschnitten worden sind,

so sind alle im Vorhergehenden a. a. O. erklärten Vorbereitungen eben so auszuführen wie beim ersten Verfahren, und darauf die folgenden Berechnungen vorzunehmen, die der Zahl der überhaupt eingeschnitte-

*) Ich führe noch an, dass die Unbekannten der obigen Gleichungen, wenn man auf der rechten Seite derselben bez. m', m'', m''', etc. statt Null schreibt, die folgenden einfachen Ausdrücke haben,

$$w(2) = \frac{2m' + m'' + m''' + \ldots}{p}$$
$$w(3) = \frac{m' + 2m'' + m''' + \ldots}{p}$$
$$w(4) = \frac{m' + m'' + 2m''' + \ldots}{p}$$
etc.

die sich auf sehr einfache Weise beweisen lassen. Wenn man daher, statt die arithmetischen Mittel aus den Beobachtungen zu nehmen, und diese den $y(r)$ gleich zu setzen, die vollständigen Vorbereitungen, die im Vorhergehenden erklärt sind, in Bezug auf den gegenwärtigen Fall ausführt; demzufolge die vorläufigen Werthe (1), (2), (3), etc. der Richtungen annimmt, für alle n Richtungen die m, m', m'', etc. die Unterschiede zwischen den Summen der Beobachtungen und den entsprechenden Vielfachen der (1), (2), (3), etc. bedeuten lässt, und diese so vorbereitet, dass

$$m + m' + m'' + m''' + \ldots = 0$$

wird, so werden die Ausdrücke der Unbekannten,

$$w(2) = \frac{m' - m}{p}$$
$$w(3) = \frac{m'' - m}{p}$$
$$w(4) = \frac{m''' - m}{p}$$
etc.

Hiemit lässt sich leicht in Betreff des gegenwärtig in Rede stehenden Verfahrens der Beweis führen, dass diese Arbeiten überflüssig sind, und dass man eben so wie im ersten Verfahren sogleich die arithmetischen Mittel aus den Beobachtungen für die Werthe der $y(r)$ annehmen kann, wie oben verlangt wurde; die Berücksichtigung der oben genannten Coefficienten kann beim gegenwärtigen Verfahren aber nicht vermieden werden.

nen Richtungen entsprechend, entweder abzukürzen, oder weiter auszudehnen sind.

Es sind zuerst zu berechnen

$$\begin{aligned}
(2,2,1) &= Q' - (p'p') \\
(2,3,1) &= \quad - (p'p'') \\
(2,4,1) &= \quad - (p'p''') \\
&\text{etc.} \\
(2,l,1) &= (lx') \\
\hline
(3,3,1) &= Q'' - (p''p'') \\
(3,4,1) &= \quad - (p''p''') \\
&\text{etc.} \\
(3,l,1) &= (lx'') \\
\hline
(4,4,1) &= Q''' - (p'''p''') \\
&\text{etc.} \\
(4,l,1) &= (lx''') \\
\hline
&\text{etc.} \\
\hline
\end{aligned}$$

(ll) wie oben Art. 137 ohne Ausnahme.

In der Berechnung von (ll) sind nemlich die pl, die zur ersten Richtung gehören mit aufzunehmen, dieses und, in den Vorbereitungen, die Mitverwendung derselben zum arithmetischen Mittel aus der Summe der Beobachtungen einer jeden Gruppe von Gyris sind aber bei dem gegenwärtig in Rede stehenden Verfahren die einzigen Fälle, in welchen Grössen die dieser Richtung angehören, in die Rechnungen eintreten. Aus den obigen Coefficienten entstehen nun die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned}
(2,2,1)w(2) + (2,3,1)w(3) + (2,4,1)w(4) + \ldots\ldots &= (2,l,1) \\
(2,3,1)w(2) + (3,3,1)w(3) + (3,4,1)w(4) + \ldots\ldots &= (3,l,1) \\
(2,4,1)w(2) + (3,4,1)w(3) + (4,4,1)w(4) + \ldots\ldots &= (4,l,1) \\
\text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad &\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

von welchen die unter α) erhaltenen einen speciellen Fall bilden. Die Auflösung dieser Gleichungen ist durch die folgenden Ausdrücke auszuführen,

$$\beta'' = -\frac{(2,3,1)}{(2,2,1)}, \quad \gamma'' = -\frac{(2,4,1)}{(2,2,1)}, \quad \delta'' = -\frac{(2,5,1)}{(2,2,1)}, \text{ etc. } \chi'' = -\frac{(2,l,1)}{(2,2,1)}$$

$$\begin{aligned}
(3,3,2) &= (3,3,1) + (2,3,1)\beta'' \\
(3,4,2) &= (3,4,1) + (2,4,1)\beta'' \\
(3,5,2) &= (3,5,1) + (2,5,1)\beta'' \\
&\text{etc.} \\
(3,l,2) &= (3,l,1) + (2,l,1)\beta''
\end{aligned}$$

$$(4,4,2) = (4,4,1) + (2,4,1)\gamma''$$
$$(4,5,2) = (4,5,1) + (2,5,1)\gamma''$$
etc.
$$(4,l,2) = (4,l,1) + (2,l,1)\gamma''$$

$$(5,5,2) = (5,5,1) + (2,5,1)\delta''$$
etc.
$$(5,l,2) = (5,l,1) + (2,l,1)\delta''$$

etc. bis
$$(ll,2) = (ll) + (2,l,1)\chi''$$

$$\gamma''' = -\frac{(3,4,2)}{(3,3,2)}, \quad \delta''' = -\frac{(3,5,2)}{(3,3,2)}, \text{ etc. } \chi''' = -\frac{(3,l,2)}{(3,3,2)}$$
$$(4,4,3) = (4,4,2) + (3,4,2)\gamma'''$$
$$(4,5,3) = (4,5,2) + (3,5,2)\gamma'''$$
etc.
$$(4,l,3) = (4,l,2) + (3,l,2)\gamma'''$$

$$(5,5,3) = (5,5,2) + (3,5,2)\delta'''$$
etc.
$$(5,l,3) = (5,l,2) + (3,l,2)\delta'''$$

etc. bis
$$(ll,3) = (ll,2) + (3,l,2)\chi'''$$

$$\delta^{iv} = -\frac{(4,5,3)}{(4,4,3)}, \text{ etc. } \chi^{iv} = -\frac{(4,l,3)}{(4,4,3)}$$
$$(5,5,4) = (5,5,3) + (4,5,3)\delta^{iv}$$
etc.
$$(5,l,4) = (5,l,3) + (4,l,3)\delta^{iv}$$

etc. bis
$$(ll,4) = (ll,3) + (4,l,3)\chi^{iv}$$

$$\ldots\ldots \chi^{v} = -\frac{(5,l,4)}{(5,5,4)}$$
etc. bis
$$(ll,5) = (ll,4) + (5,l,4)\chi^{v}$$

etc. bis (ll,n)

Ferner sind zu berechnen

$$\beta''' = \gamma'' + \gamma'''\beta'' \quad \Big| \quad \begin{aligned} \beta^{iv} &= \delta'' + \delta'''\beta'' + \delta^{iv}\beta''' \\ \gamma^{iv} &= \delta''' + \delta^{iv}\gamma''' \end{aligned} \quad \Big| \quad \begin{aligned} \beta^{v} &= \varepsilon'' + \varepsilon'''\beta'' + \varepsilon^{iv}\beta''' + \varepsilon^{v}\beta^{iv} \\ \gamma^{v} &= \varepsilon''' + \varepsilon^{iv}\gamma''' + \varepsilon^{v}\gamma^{iv} \\ \delta^{v} &= \varepsilon^{iv} + \varepsilon^{v}\delta^{iv} \end{aligned}$$

etc.

worauf man

$$\begin{array}{rcl}
-w(2) & = & \chi'' + \chi'''\beta'' + \chi^{IV}\beta''' + \chi^{V}\beta^{IV} + \ldots \\
-w(3) & = & \chi''' + \chi^{IV}\gamma''' + \chi^{V}\gamma^{IV} + \ldots \\
-w(4) & = & \chi^{IV} + \chi^{V}\delta^{IV} + \ldots \\
-w(5) & = & \chi^{V} + \ldots \\
\text{etc.} & & \text{etc.}
\end{array}$$

erhält. Wenn auf der Station drei Richtungen eingeschnitten worden sind, so kommt im zweiten Theile der Auflösung ausser den $y(r)$ und den Divisoren

$$(2,2,1),\ (3,3,2)$$

ohne Ausnahme noch die Grösse

$$\beta''$$

in Betracht. Wenn vier Richtungen eingeschnitten worden sind, so kommen ausser den $y(r)$ und den Divisoren

$$(2,2,1),\ (3,3,2),\ (4,4,3)$$

noch die Grössen

$$\beta'',\ \beta''',\ \gamma'''$$

in Betracht. Wenn fünf Richtungen eingeschnitten worden sind, so kommen ausser den $y(r)$ und den Divisoren

$$(2,2,1),\ (3,3,2),\ (4,4,3),\ (5,5,4)$$

noch die Grössen

$$\beta'',\ \beta''',\ \gamma''',\ \beta^{IV},\ \gamma^{IV},\ \delta^{IV}$$

in Betracht, u. s. w. Man erhält schliesslich, mit Ausnahme der $y(1)_s$

$$y(r)_s = (r)_s + w(r)_s$$

Die Summe W_0 sowohl wie die $u(m)_s$ werden eben so berechnet, wie bei dem ersten Verfahren, wobei nur zu bemerken ist, dass hier immer die $w(1)_s = 0$ sind.

146.

2) Zweiter Theil der Auflösung.

Die Bedingungsgleichungen werden wieder eben so vorbereitet wie bei dem ersten Verfahren, nur werden in denselben alle

$$\delta(1)_s = 0$$

gesetzt, wodurch die damit multiplicirten Glieder wegfallen. Es brauchen nun hier die beiden Fälle unter α) und β) nicht von einander unterschieden zu werden, da die Rechnungen in jedem derselben keinen Unterschied darbieten. Alle Ausdrücke müssen allgemein aufgestellt werden, da jetzt von keinem Gliede derselben im Voraus behauptet werden kann, dass es Null wird. Es sind zuerst für jede Station, für welche alle q nicht Null sind, die folgenden Ausdrücke zu berechnen,

$$\begin{aligned}
\eta(2,I)_s &= q(2,I)_s \\
\eta(3,I)_s &= \beta_s''.q(2,I)_s + q(3,I)_s \\
\eta(4,I)_s &= \beta_s'''.q(2,I)_s + \gamma_s'''.q(3,I)_s + q(4,I)_s \\
\eta(5,I)_s &= \beta_s^{IV}.q(2,I)_s + \gamma_s^{IV}.q(3,I)_s + \delta_s^{IV}.q(4,I)_s + q(5,I)_s \\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

hierauf

$$Q(2,I)_s = \frac{\eta(2,I)_s}{(2,2,1)_s}, \quad Q(3,I)_s = \frac{\eta(3,I)_s}{(3,3,2)_s}$$
$$Q(4,I)_s = \frac{\eta(4,I)_s}{(4,4,3)_s}, \text{ etc.}$$

und dann

$$\begin{aligned}
f(2,I)_s &= Q(2,I)_s + \beta_s''.Q(3,I)_s + \beta_s'''.Q(4,I)_s + \beta_s^{IV}.Q(5,I)_s + \ldots \\
f(3,I)_s &= Q(3,I)_s + \gamma_s'''.Q(4,I)_s + \gamma_s^{IV}.Q(5,I)_s + \ldots \\
f(4,I)_s &= Q(4,I)_s + \delta_s^{IV}.Q(5,I)_s + \ldots \\
f(5,I)_s &= Q(5,I)_s + \ldots \\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Alle diese Grössen müssen durch allmählige Verwandelung der I in II, III, etc. wieder wie im ersten Verfahren auf alle Bedingungsgleichungen ausgedehnt werden.

147.

Die Berechnung der Coefficienten der Endgleichungen, und die Auflösung dieser wird nun hier genau eben so ausgeführt wie im ersten Verfahren, weshalb ich in dieser Beziehung auf den Art. 140 u. f. verweise. Schliesslich wird wieder allgemein mit Ausnahme von $z(1)_s$

$$z(r)_s = f(r,I)_s.(I) + f(r,II)_s.(II) + f(r,III)_s.(III) + \ldots$$

und mit Ausnahme von $x(1)_s$

$$x(r)_s = y(r)_s - z(r)_s$$

womit die Auflösung der Aufgabe beendigt ist. Auch die Berechnung der wahrscheinlichsten Werthe der $u(m)_s$ wird, wenn man diese kennen zu lernen wünscht, nach dem im Art. 142 angeführten Ausdruck ausgeführt.

148.

3) Berechnung der Gewichte.

Da im Allgemeinen hier die Berechnung der Gewichte eben so ausgeführt wird wie bei dem ersten Verfahren, und nur die Aenderung eintritt, dass alle, etwa vorkommenden, sich auf die Richtungen $x(1)_s$ beziehenden Grössen wegzulassen sind, so brauchen die Ausdrücke, die im Art. 143 vollständig angegeben sind, nicht wiederholt zu werden. Aber eine Gattung von Fällen ist vorhanden, in welcher die Berechnung der Gewichte anders geführt werden kann, und daher die sich darauf beziehenden Ausdrücke hier aufzunehmen sind. Es sind diese die Fälle, in welchen das Gewicht irgend eines der Winkel $x(r)_s - x(1)_s$ verlangt wird, die anders behandelt werden können, weil im gegenwärtigen Verfahren diese Winkel die eigentlichen Unbekannten der Aufgabe sind. Die im Vorhergehenden entwickelten Ausdrücke für die Berechnung der Gewichte der Unbekannten selbst sind, durch die hier eingeführte Bezeichnung ausgedrückt, die folgenden.

Es fällt nun nicht nur die Aufstellung der Function Ω, sondern es fallen auch alle Grössen weg, in deren Bezeichnung der Buchstabe M vorkommt. Zuerst ist die Grösse $\pi(r)_s$ zu berechnen, die für verschiedene Werthe von r verschiedenartige Ausdrücke bekommt.

Für $r = 2$ ist

$$\pi(2)_s = \frac{1}{(2,2,1)_s} + \frac{\beta_s^{''2}}{(3,3,2)_s} + \frac{\beta_s^{'''2}}{(4,4,3)_s} + \frac{\beta_s^{IV2}}{(5,5,4)_s} + \ldots$$

für $r = 3$ ist

$$\pi(3)_s = \frac{1}{(3,3,2)_s} + \frac{\gamma_s^{'''2}}{(4,4,3)_s} + \frac{\gamma_s^{IV2}}{(5,5,4)_s} + \ldots$$

für $r = 4$ ist

$$\pi(4)_s = \frac{1}{(4,4,3)_s} + \frac{\delta_s^{IV2}}{(5,5,4)_s} + \ldots$$

für $r = 5$ ist

$$\pi(5)_s = \frac{1}{(5,5,4)_s} + \ldots$$

u. s. w. wenn auf der Station mehr Richtungen eingeschnitten worden sind. Ferner sind für jeden Werth von r, mit der Ausnahme $r = 1$, zu berechnen,

$$\begin{aligned}
f(r,II,1)_s &= f(r,II)_s + f(r,I)_s \,.\, (2)_1 \\
f(r,III,1)_s &= f(r,III)_s + f(r,I)_s \,.\, (3)_1 \\
f(r,IV,1)_s &= f(r,IV)_s + f(r,I)_s \,.\, (4)_1 \\
&\text{etc.} \\
\hline
f(r,III,2)_s &= f(r,III,1)_s + f(r,II,1)_s \,.\, (3)_2 \\
f(r,IV,2)_s &= f(r,IV,1)_s + f(r,II,1)_s \,.\, (4)_2 \\
&\text{etc.} \\
\hline
f(r,IV,3)_s &= f(r,IV,2)_s + f(r,III,2)_s \,.\, (4)_3 \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

die auch auf dieselbe Weise aufgestellt werden können, wie die analogen Grössen des Art. 143, nemlich

$$\begin{aligned}
f(r,II,1)_s &= f(r,II)_s + f(r,I)_s.(2)_1 \\
f(r,III,2)_s &= f(r,III)_s + f(r,I)_s.(3)_1 + f(r,II,1)_s.(3)_2 \\
f(r,IV,3)_s &= f(r,IV)_s + f(r,I)_s.(4)_1 + f(r,II,1)_s.(4)_2 + f(r,III,2)_s.(4)_3 \\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

und jedenfalls fortgesetzt werden müssen bis alle Bedingungsgleichungen erschöpft sind. Es wird hierauf

$$\mu(r)_s = \frac{f(r,I)_s^2}{(I,I)} + \frac{f(r,II,1)_s^2}{(II,II,1)} + \frac{f(r,III,2)_s^2}{(III,III,2)} + \frac{f(r,IV,3)_s^2}{(IV,IV,3)} + \ldots$$

und

$$P = \frac{1}{\pi(r)_s - \mu(r)_s}$$

wenn wieder P das gesuchte Gewicht bezeichnet.

§. 7. Berechnung der mittleren Fehler der durch das vorhergehende Verfahren erhaltenen Resultate.

149.

Es sind mehrere Ausdrücke zur Berechnung des sogenannten wahrscheinlichen Fehlers einer Bestimmung vorhanden, aber von diesen nur der folgende in allgemeinem Gebrauch,

$$\text{wahrscheinl. Fehler} = 0.67445 \sqrt{\frac{W}{m}}$$

wo W die Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Quadrate der übrig gebliebenen Fehler, und m die Anzahl der Bestimmungen oder Beobachtungen bedeuten. Ausserdem hat Gauss noch den Begriff des mittleren zu befürchtenden Fehlers, den man häufig auch schlechtweg

den mittleren Fehler nennt, aufgestellt, und durch den folgenden Ausdruck definirt,

$$\text{mittl. z. bef. Fehler} = \sqrt{\frac{W}{m-n}}$$

wo W und m dieselbe Bedeutung haben wie vorher, und n die Anzahl der von einander unabhängigen Unbekannten bezeichnet.

Ohne mich in eine Discussion der inneren Gründe einzulassen, auf welchen diese beiden Ausdrücke beruhen, will ich blos die numerischen Werthe, die daraus in verschiedenen Fällen hervorgehen, mit einander vergleichen.

Je grösser m bei unverändert angenommenem Werthe von n wird, desto mehr nähern sich die Werthe der beiden Ausdrücke einander, die beide, wenn $m = \infty$ wird, den Werth Null geben. Bei sehr grossem m in Bezug auf n können daher schon die Resultate beider Ausdrücke für einander gleich erachtet werden. Während dieses an der oberen Grenze stattfindet, bildet sich an der unteren Grenze ein ganz davon verschiedenes Verhalten. Betrachten wir, um dieses zu zeigen, den extremen Fall $m = n$, nemlich den Fall, in welchem die Anzahl der vorhandenen Beobachtungen oder Bestimmungen der Anzahl der von einander unabhängigen Unbekannten gleich wird. Die Methode der kleinsten Quadrate schliesst diesen Fall nicht aus, denn die Gleichungen und sonstigen Ausdrücke, auf welche sie führt, finden in demselben, wie man oben gesehen hat, ohne Abänderung volle Anwendung. Es müssen daher auch die beiden hier aufgestellten Ausdrücke des wahrscheinlichen und des mittleren Fehlers ihre volle Geltung behalten.

Da aber jetzt allen vorhandenen Beobachtungen vollkommen Gnüge geleistet wird, so bekommt man $W = 0$, und folglich wird nach dem ersten Ausdruck auch der wahrscheinliche Fehler dieser Bestimmung $= 0$, welches gewiss unrichtig ist. Im Ausdruck des mittleren Fehlers hingegen wird nicht nur $W = 0$, sondern auch $m = n$, und der Ausdruck giebt daher in diesem Falle den mittleren Fehler $= \frac{0}{0}$, das ist unbestimmt. Dieses ist das richtige Resultat, denn in dem Falle, der jetzt betrachtet wird, kann man weder den wahrscheinlichen noch den mittleren Fehler bestimmen, sie bleiben daher beide unbestimmt.

Aus diesem Grunde muss in den Fällen, in welchen m nicht viel grösser ist wie n, der Ausdruck des mittleren Fehlers eine genauere Bestimmung gewähren, wie der des wahrscheinlichsten Fehlers, und da,

wie wir gesehen haben, beide Ausdrücke bei wachsendem m zu gleichen Werthen hinstreben, so ist in allen Fällen die Berechnung des mittleren Fehlers der des wahrscheinlichen vorzuziehen.

150.

Aus den vorstehenden Gründen soll in der Anwendung auf unsere Hauptaufgabe nur die Bestimmung des mittleren Fehlers durch den Ausdruck

$$m.f. = \sqrt{\frac{W}{m-n}}$$

betrachtet werden. Die Berechnung der Grösse W ist schon oben gezeigt worden, und daher hier nur die Berechnung von m und n zu erklären. Da die Resultate der Einstellungen der Richtungen auf den verschiedenen Stationen mit l nebst angehängten Strichen bezeichnet worden sind, so ist klar dass

m = der Anzahl aller vorhandenen l ist.

Die Unbekannten unserer Aufgabe sind einestheils die Richtungen x, und anderntheils die u, die der Anzahl der überhaupt vorhandenen Gruppen von Gyris gleich sind. Da aber auf jeder Station nur die Unterschiede der Richtungen von Einer derselben fest bestimmbar sind, so ist von der Summe der x und der u die Anzahl der Stationen abzuziehen, und da die hieraus hervorgehende Anzahl von Unbekannten durch die Bedingungsgleichungen von einander in Abhängigkeit stehen, so ist noch die Anzahl der Bedingungsgleichungen davon abzuziehen. Die so erhaltene Zahl ist n. Bezeichnet man nun durch ein der Bezeichnung der betr. Grösse vorgesetztes A die Anzahl aller Grössen dieser Gattung, so dass

(Al) die Anzahl aller l,
(Ax) die Anzahl aller x,
(Au) die Anzahl aller u, folglich die Anzahl aller Gruppen von Gyris,
(As) die Anzahl aller Stationen,
(Ab) die Anzahl aller Bedingungsgleichungen

bedeuten, so wird, wenn zur Abkürzung

$$D = (Al) + (As) + (Ab) - (Ax) - (Au)$$

gesetzt wird, der

$$m.f. = \sqrt{\frac{W}{D}}$$

*) und da dieser Ausdruck den mittleren Fehler einer Beobachtung der Gattung giebt, deren Gewicht = 1 gesetzt worden ist, so giebt er in seiner Anwendung auf das eben ausgeführte Hauptbeispiel den *m. f.* einer einzelnen Beobachtung einer Richtung, indem das Gewicht einer solchen Beobachtung = 1 angenommen worden ist.

151.

Wenden wir nun den eben abgeleiteten Ausdruck auf dieses Beispiel an, so erhalten wir aus dem Art. 95

$$W = 212.636$$

Die Anzahl der l ist auf den Stationen		und die Anzahl der Gruppen von Gyris
(1)	57	21
(2)	21	8
(3)	9	4
(4)	9	4
(5)	6	3
	$(Al) = 102$	$(Au) = 40$

und ferner sind

$$(Ax) = 19, \quad (As) = 5, \quad (Ab) = 6$$

folglich $D = 54$, und hieraus bekommt man den

m. f. einer einzelnen Beobachtung
einer Richtung = 1″984

---

*) Man kann bemerken, dass dieser Ausdruck in den von Gauss in seinem Supplementum theoriae comb. etc. für den dort behandelten speciellen Fall gegebenen übergeht, wenn man die erforderlichen Bedingungen einführt. Der Gaussische Ausdruck, in die hier eingeführte Bezeichnung übersetzt, ist

$$m.\,f. = \sqrt{\frac{W}{(Ab)}}$$

und die Bedingungen des von Gauss behandelten Falles sind

$$(Au) = (As), \quad (Ax) = (Al)$$

Führt man diese in die Ausdrücke des Textes ein, so wird

$$D = (Ab)$$

und der vorstehende Ausdruck geht daraus hervor.

Will man auch die mittleren Fehler der Resultate, für welche oben die Gewichte berechnet worden sind, kennen lernen, so dient dazu der Ausdruck

$$m.f. = \frac{F}{\sqrt{P}}$$

wenn F den mittleren Fehler der Beobachtungen, denen das Gewicht $= 1$ beigelegt worden ist, — hier den oben gefundenen $m.f.$ —, und P das Gewicht des betr. Resultats aus den Beobachtungen bezeichnen. In den Artt. 97 bis 103 ergaben sich für

den Winkel	(3)(1)(5)	das Gewicht		=	13.46
» »	$(b)(1)(a)$	»	»	=	21.29
» »	(5)(2)(3)	»	»	=	34.8
» »	(5)(3)(2)	»	»	=	15.58
das Aggregat	$u(1)_3 + x(1)_3$	»	»	=	67.37
» »	$u(8)_2 + x(4)_2$	»	»	=	50.00
die Seite	(1)(3)	»	»	=	341.2

und der vorstehende Ausdruck giebt daher der Reihe nach die

$$\begin{aligned} m.f. &= 0''541 \\ &= 0.430 \\ &= 0.336 \\ &= 0.503 \\ &= 0.242 \\ &= 0.281 \\ &= 0^m107\,^{*)} \end{aligned}$$

*) Gauss hat in seiner eben angezogenen Abhandlung in Bezug auf seine Triangulation berechnet und gefunden, den

$m.f.$ der Seite

Falkenberg-Breithorn $= 0^m1209$

und ich habe später für dieselbe Triangulation nach den obigen Formeln berechnet und gefunden, den

$m.f.$ des Winkels

Wilsede, Falkenberg, Wulfsode $= 0''385$

und den

$m.f.$ des Winkels

Hauselberg, Wulfsode, Falkenberg $= 0''353$.

152.

Ausserdem ist im Art. 130 noch das Gewicht der Seite (1)(2) unter zwei Annahmen berechnet worden. In der Annahme der einzig gemessenen Grundlinie (1)(3) wurde dasselbe = 738.0, und in der Annahme, dass die zwei Grundlinien (1)(3) und (2)(4) gemessen worden seien = 4105 gefunden. Wendet man den obigen Ausdruck hierauf an, so findet man für die Seite (1)(2) im ersten Falle den

$$m.\,f. = 0^m0730$$

und in dem zweiten Falle den

$$m.\,f. = 0^m0130$$

Das Hinzukommen einer zweiten Grundlinie hat also die Genauigkeit dieser Seite um mehr wie das Doppelte vergrössert.

Ich bemerke hiezu, dass strenge genommen für den Fall der zwei Grundlinien der *m. f.* einer Richtung von Neuem hätte berechnet werden müssen, da wegen des Hinzukommens von noch einer Bedingungsgleichung der Nenner D des bez. Ausdrucks sich um eine Einheit vergrössert. Da dieses jedoch hier nur einen unbedeutenden Einfluss auf das obige Resultat hätte äussern können, so habe ich keine Rücksicht darauf genommen, und der oben angegebene zweite *m. f.* der Seite (1)(2) ist ein Weniges grösser, wie er strenge genommen sein würde.

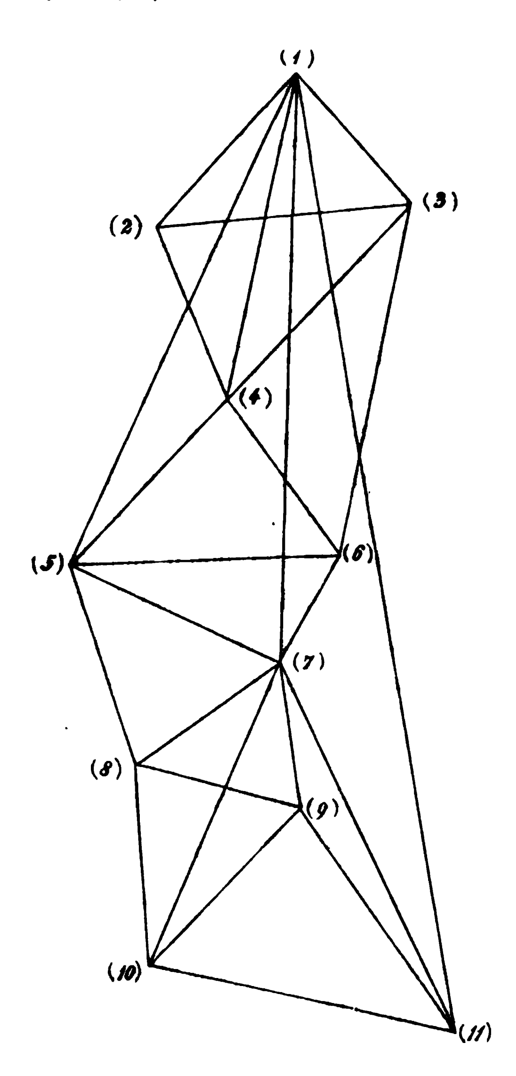
§. 8. Nachtrag zu der »Geodätische Untersuchungen« betitelten Abhandlung.

153.

Ich bin darauf aufmerksam gemacht worden, dass in der in der Ueberschrift angezogenen Abhandlung kein Verfahren angegeben ist, durch welches man mit erforderlicher Sicherheit in einem schon ausgeglichenen Dreiecksnetze lange geodätische Linien bestimmen könne. Es ist richtig, dass dort kein Verfahren für diesen Zweck beschrieben ist, aber die dort gelösten Hauptaufgaben bilden die Grundlagen, nicht nur dazu, sondern auch zu vielen andern Aufgaben, und es würde zu weit geführt haben, wenn ich diese alle hätte mit aufnehmen wollen.

Ich will indess hier die Auflösung der oben genannten Aufgabe geben, obgleich sie so nahe liegt, dass Jeder sie sich hätte entwickeln können.

Die folgende Figur soll irgend ein Dreiecksnetz darstellen, in welchem die Winkel schon ausgeglichen sind, und in dem die Endpunkte mit den Zahlen (1) bis (11) bezeichnet sind.



In diesem Dreiecksnetze habe ich mich begnügt, blos die Hauptdreiecke aufzunehmen, und dagegen die Richtungen oder Diagonalen, die man mit eingeschnitten hat, um die zur Ausgleichung der Winkel erforderlichen Bedingungsgleichungen zu erhalten, weggelassen. Diese letzteren sind für den jetzt zu verfolgenden Zweck im Allgemeinen

überflüssig, und sollten sie in der Anwendung in einzelnen Fällen nützlich werden können, so kann man sie ohne Weiteres auch aufzeichnen und anwenden.

154.

Ich nehme nun an, dass an den Punkten (1) und (7) dieses Dreiecksnetzes die Polhöhen und das Azimuth einer der dort zusammenlaufenden Dreiecksseiten astronomisch bestimmt sei, und man die Polhöhe von (1), so wie das Azimuth der geodätischen Linie (1)(7) am Punkte (1) auf den Punkt (7) geodätisch übertragen wolle, um diese Grössen mit dem am Punkte (7) astronomisch bestimmten zu vergleichen.

Zu dem Ende ziehe man die geodätische Linie (1)(4), und betrachte das sphäroidische Dreieck (1)(2)(4), in welchem die Seiten (1)(2) und (2)(4) nebst dem eingeschlossenen Winkel bekannt sind. Man berechne dieses Dreieck erst beiläufig, indem man es als sphärisch oder gar als eben betrachtet, wozu die Anwendung von höchstens fünfstelligen Logarithmen mehr wie ausreichend ist. Man erhält hiemit hinreichend genaue Data um nach den Ausdrücken des Art. 128 der angezogenen Abhandlung die Unterschiede zwischen den sphäroidischen und den sphärischen Winkeln mit erforderlicher Genauigkeit berechnen zu können. Durch den bez. Unterschied verwandele man den sphäroidischen Winkel (1)(2)(4) in den bez. sphärischen, und berechne hierauf durch die sphärische Trigonometrie die Seite (1)(4) und die beiden anliegenden Winkel mit hinreichender Schärfe. Die gefundene Seite bedarf keiner Verbesserung, aber die beiden mit berechneten Winkel werden durch die oben genannten vorher berechneten Unterschiede auf ihre Werthe auf den Sphäroid hingeführt.

In dem Dreiecke (1)(5)(4) sind nun wieder zwei Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel bekannt, und nachdem dieses auf die nemliche Art behandelt worden ist, werden im Dreiecke (1)(5)(7) zwei Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel bekannt, aus welchen auf die nemliche Art die verlangte geodätische Linie (1)(7) nebst den beiden anliegenden sphäroidischen Winkeln erhalten werden.

Aus der Polhöhe des Punkts (1) und dem Azimuth der Linie (1)(7) an diesem Punkte, welches man auch durch die vorbeschriebene Rechnung aus dem daselbst astronomisch bestimmten Azimuth einer Dreiecks-

seite erhält, nebst der gefundenen Länge der geodätischen Linie kann man nun durch die erste Hauptaufgabe der angezogenen Abhandlung (cf. Art. 10 u. f.) für den Endpunkt (7) die Polhöhe, den Längenunterschied mit (1), und das Azimuth von (1)(7) berechnen, und mit den astronomischen Bestimmungen dieser Grössen vergleichen.

Man kann dieses auch auf andere Weise ausführen. Durch die zweite Hauptaufgabe der angezogenen Abhandlung (cf. Art. 51 u. f.) kann man aus den Polhöhen der Punkte (1) und (7) und dem Längenunterschiede derselben die Länge der geodätischen Linie (1)(7) und die Azimuthe an ihren Endpunkten berechnen, und diese mit den anderweitig gefundenen Werthen derselben vergleichen.

Endlich kann man auch den Inhalt des vierten Abschnittes der angezogenen Abhandlung anwenden, und (cf. Art. 154 u. f.) aus der wie beschrieben gefundenen Länge der geodätischen Linie (1)(7) und den astronomisch bestimmten Polhöhen dieser Endpunkte den Längenunterschied derselben so wie die Azimuthe von (1)(7) berechnen, und diese mit den anderweitig erhaltenen Werthen dieser drei Grössen vergleichen.

Die a. a. O. entwickelten Auflösungen dieser drei Aufgaben sind unbeschränkt anwendbar, wie lang auch die Linie (1)(7) sei, und welche Lage sie auch auf dem Erdsphäroid habe.

155.

Zum Inhalt des vor. Art. sind einige Bemerkungen aufzustellen.

In der Anwendung wird man in der Regel nicht mit einer so geringen Anzahl von Dreiecken zur Berechnung der aufgegebenen geodätischen Linie ausreichen wie in diesem fingirten Dreiecksnetze der Fall ist, sondern eine grössere Anzahl derselben berechnen müssen.

Die Anzahl der zu berechnenden Dreiecke wird man oftmals dadurch kleiner machen können, dass man die Diagonalen der Vier- oder Mehrecke mit benutzt, die zur Ausgleichung des Dreiecksnetzes mit eingeschnitten worden sind; auch kann man zum vorliegenden Zweck Diagonalen berechnen und benutzen, die bei den Messungen nicht mit eingeschnitten worden sind.

Man kann in jedem Dreiecksnetze die hier in Rede stehenden Rechnungen auf verschiedene Arten, nemlich durch Benutzung anderer Dreieckspunkte, wie die oben angegebenen, ausführen.



In den ersten zu berechnenden Dreiecken, die von allen immer die kleinsten sind, kann man einen Schritt weiter gehen, wie im vor. Art. beschrieben ist. Man kann die Winkel derselben, nachdem sie vom sphäroidischen auf sphärische hingeführt worden sind, hierauf auf ebene hinführen, und das bez. Dreieck alsdann als ein ebenes berechnen, worauf die Winkel des Resultats wieder erst auf sphärische, und darauf auf sphäroidische hinzuführen sind.

In den ersten kleineren Dreiecken wird gemeiniglich die Reduction der sphäroidischen Winkel auf sphärische so klein, dass man sie übergehen kann, aber so wie die Seiten, und damit auch die Dreiecke selbst grösser werden, können diese Reductionen sehr merklich werden.

Das Verfahren des vor. Art. ist nicht unbegrenzt anwendbar, denn die Ausdrücke des Art. 128 der angezogenen Abhandlung hören auf ausreichend genau zu sein, wenn die Dreiecksseiten eine gewisse Grösse übersteigen, die ohngefähr auf 20° festgesetzt werden kann.

156.

Um zu zeigen, wie man verfahren kann, wenn die zu berechnende geodätische Linie die eben genannte Grösse erreicht oder übersteigt, kehren wir zu dem im Art. 153 verzeichneten Dreiecksnetze zurück und nehmen an, dass die geodätische Linie (1)(11) nebst den anliegenden Winkeln zu berechnen sei, und dass diese die angeführte Grenze übersteige. Man kann nun in einem Zwischenpunkte, für welchen die betreffenden Linien die angeführte Grenze nicht erreicht haben, z. B. in (7), abbrechen, und diesen zum Ausgangspunkt neuer geodätischer Linien annehmen. Aus dem Dreiecke (5)(8)(10) kann man die Linie (8)(10) nebst den anliegenden Winkeln berechnen, und erhält hierauf durch das Dreieck (7)(10)(11) die Linie (7)(11) nebst den anliegenden Winkeln.

Da nun, um (1)(11) zu erhalten, das sphäroidische Dreieck (1)(7)(11) zu berechnen ist, und man durch die vorhergehend angeführten Regeln die Polhöhe von (7) und die Azimuthe der Linien (1)(7) und (7)(11) an diesem Punkt berechnen kann, so lässt sich durch Anwendung der Aufgabe des Art. 74 u. f. der angezogenen Abhandlung das Dreieck (1)(7)(11) vollständig berechnen, wie gross es auch sei, da die Auflösung, die ich von der zuletzt genannten Aufgabe gegeben habe, keiner Beschränkung unterworfen ist.

Wäre die Linie (1)(11) noch länger, so kann man, statt Eines, mehrere Zwischenpunkte annehmen, und die somit entstehenden grossen sphäroidischen Dreiecke immer durch die zuletzt angeführte Aufgabe mit jeder wünschenswerthen Genauigkeit berechnen. Man sieht hieraus, dass die in diesem § gestellte Aufgabe in dem Inhalt der oft angezogenen Abhandlung in möglichst grosser Ausdehnung und mit jeder wünschenswerthen Genauigkeit ihre Auflösung findet.

Druckfehler.

Pag. 801 Z. 10 v. o. lies 0^m0310 statt 0^m0130



FORTGESETZTE
GEODÄTISCHE UNTERSUCHUNGEN

BESTEHEND

IN ZEHN SUPPLEMENTEN

ZUR ABHANDLUNG

VON DER METHODE

DER

KLEINSTEN QUADRATE IM ALLGEMEINEN

UND

IN IHRER ANWENDUNG AUF DIE GEODÄSIE.

VON

P. A. HANSEN,

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Des IX. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

№ I.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1868.

Vom Verfasser übergeben den 19. April 1868.
Der Abdruck vollendet den 15. August 1868.

FORTGESETZTE

GEODÄTISCHE UNTERSUCHUNGEN

BESTEHEND

IN ZEHN SUPPLEMENTEN

ZUR ABHANDLUNG

VON DER METHODE

DER

KLEINSTEN QUADRATE IM ALLGEMEINEN

UND

IN IHRER ANWENDUNG AUF DIE GEODÄSIE.

VON

P. A. HANSEN.

INHALT.

Seite

Suppl. 1. Reflexionen über die Anlage und die Ausführung eines Dreiecksnetzes.

§ 1. Allgemeine Betrachtungen.

1.

In früherer Zeit, wo die Ausgleichungstheorie unbekannt war, und man die Dreiecke, aus welchen ein Dreiecksnetz besteht, gemeiniglich blos an einander reihte, war es strenge, und der damaligen Sachlage vollkommen angemessene Vorschrift, dass in jedem Dreieck alle drei Winkel beobachtet werden mussten. Die Summe der aus den Beobachtungen hervorgehenden Werthe der Winkel eines Dreiecks war damals die einzige Controle, die man sich in Bezug auf die Ausführung der Beobachtungen verschaffen konnte, und die gleichmässige Vertheilung des Unterschiedes zwischen dem Betrage dieser Summe und dem theoretischen Werthe derselben auf alle drei Winkel die einzige Ausgleichung, die man kannte.

In Bezug auf die Grösse der Winkel der Dreiecke schrieb man ein Minimum vor, welches nicht überschritten werden durfte, man verordnete z. B. dass, ohne Ausnahmen zu gestatten, in keinem Dreiecke Winkel vorkommen dürften, die kleiner wie 24° wären, welche Zahl man hie und da auch auf 30° erhöht hat. In dieser Beziehung ist man zu weit gegangen, denn es lässt sich beweisen, dass unter Umständen auch in an einander gereihten Dreiecken die kleinsten Winkel zulässig sind, indem sie auf die Genauigkeit der daraus folgenden Dreiecksseiten nicht den geringsten nachtheiligen Einfluss ausüben; dieses wird weiter unten bewiesen werden.

Auch die erlaubte Grösse des Unterschiedes zwischen der beobachteten Summe der Winkel der Dreiecke und dem theoretischen Werthe

derselben bestimmte man. Es ist dieses freilich in gewissem Sinne eine Bestimmung der erlaubten Gränze des mittleren Fehlers der Beobachtungen an sich, aber eine sehr mangelhafte und unvollkommene. Es lässt sich indess nichts dagegen sagen, da sie in einer Zeit getroffen wurde, in welcher die Bestimmung des mittleren Fehlers der Beobachtungen entweder unbekannt, oder doch nur Wenigen bekannt war.

Man bestimmte ferner die erlaubte Fehlergränze der Dreiecksseiten, die man, ohne auf die Lage dieser Seiten im Netze Rücksicht zu nehmen, durch eine unveränderliche Verhältnisszahl ausdrückte. Man hat z. B. verordnet, dass in den Dreiecken erster Ordnung diese Fehlergränze $\frac{1}{100000}$ der Länge der Dreiecksseiten nicht übersteigen dürfe. Wie man grade auf diese Zahl gekommen ist, lässt sich schwer einsehen, da man in jener Zeit keine Hülfsmittel besass, den mittleren Fehler eines durch geodätische Operationen erlangten Resultats berechnen zu können. Aber abgesehen davon, ist jede derartige Bestimmung unhaltbar, denn davon konnte man sich doch wohl in jener Zeit schon überzeugen, dass die mittleren Fehler der Dreiecksseiten, von der gemessenen Grundlinie an, sich immer mehr und mehr vergrössern müssen, je grösser die Anzahl der Dreiecke ist, die zwischen der Grundlinie und der betreffenden Dreiecksseite liegen. Man gab hiemit eine Fehlergränze an, die wenn sie auch für Dreiecksseiten, die in der Nähe der Grundlinie liegen, eingehalten werden konnte, bei Dreiecksseiten, die von dieser sehr entfernt liegen, gewiss nie hat eingehalten werden können. Wenn man solche Dreiecksseiten aufweisen können sollte, die um weniger, wie die oben genannte Zahl, von einander abweichen, so ist gewiss der Zufall zu Hülfe gekommen, und der zufällige Fehler, den die directe Vergleichung gegeben hat, ist grade weit kleiner gewesen, wie der mittlere. Man wird weiter unten die Zunahme der mittleren Fehler der Dreiecksseiten untersucht finden.

Die Festsetzung einer Fehlergränze der Dreiecksseiten neben der der Beobachtungen bildet aber, auch wenn man sie von Dreieck zu Dreieck veränderlich annehmen wollte, einen theoretischen Widerspruch. Denn aus den mittleren Fehlern der Winkel allein folgen schon in jedem einzelnen Falle die mittleren Fehler der Seiten durch bestimmte und unabänderliche, mathematische Relationen. Indem man also beide Fehlergränzen im Voraus bestimmte, betrachtete man zwei Fehlerbestimmungen von einander als unabhängig, die in der That von einander

abhängig sind, und konnte somit dem geschicktesten und gewissenhaftesten Trigonometer die Verlegenheit bereiten, dass er, obgleich seine Winkelmessungen unter der erlaubten Fehlergränze geblieben waren, dennoch die vorgeschriebene Fehlergränze in den Seiten nicht inne halten konnte. Es waren noch dazu die Mittel, deren man sich bediente, um die Fehler der Seiten zu erkennen sehr unvollkommen und mangelhaft. Man verglich die Werthe einer und derselben Dreiecksseite, die aus zwei verschiedenen Triangulationen hervorgegangen waren, mit einander, ohne zu berücksichtigen, welchen Werth jede dieser beiden Bestimmungen hatte. Es ist sogar bei solchen Vergleichungen vorgekommen, dass man die eine Bestimmung der Seite stillschweigend als absolut richtig betrachtet, und den Unterschied, den die Vergleichung ergab, der anderen Bestimmung derselben ausschliesslich zur Last gelegt hat. Es lassen sich von solcher Behandlung dieser Sache Fälle anführen.

2.

Seit der Einführung der Ausgleichungstheorie haben sich die vorbenannten Umstände sehr geändert, in der Anlage und Ausführung eines Dreiecksnetzes ist jetzt ein weit grösserer Spielraum gestattet, und man kann sich von dem Erfolge, den man erreicht hat, eine sichere und vollständige Vorstellung verschaffen. Die Fälle in welchen ein kleiner Winkel vermieden werden muss, stehen jetzt viel vereinzelter da, die Nothwendigkeit in j e d e m Dreiecke alle drei Winkel beobachten zu müssen fällt weg, und man kann daher in Gegenden, wo die Beschaffenheit der Erdoberfläche früher der Ausführung eines guten Dreiecksnetzes fast unüberwindliche Schwierigkeiten darbot, ein solches mit weit grösserer Leichtigkeit herstellen. Die Ursache davon liegt in dem Umstande, dass man eine grössere Anzahl von Bedingungsgleichungen verschiedener Gattung in das Dreiecksnetz nicht nur einführen, sondern auf die vortheilhafteste Weise benutzen kann*). Die sichere Vorstellung von dem Erfolge der Arbeit erlangt man dadurch, dass man sich in den Stand gesetzt sieht, die Gewichte und die mittleren Fehler der einzelnen Stücke

*) Man hat vor der Einführung der Ausgleichungstheorie zwar auch in einzelnen Fällen die Anlage eines Dreiecksnetzes so ausgeführt, dass es eine grössere Anzahl von Bedingungsgleichungen darbot, wie die, die aus der Summe der Winkel der einzelnen Dreiecke hervorgehen, aber man hat diese Bedingungsgleichungen nur auf sehr unvollkommene Art zu benutzen verstanden.

des Dreiecksnetzes berechnen zu können. Das einzige Kriterion, welches die Wissenschaft besitzt, um die Sicherheit zu bestimmen, mit welcher irgend eine Function der Beobachtungen, vermöge der Abhängigkeit derselben von den Beobachtungen, durch die letzteren bestimmt wird, bietet die Berechnung des Gewichts der Function dar. Der mittlere Fehler der Bestimmung dieser Function ergiebt sich hierauf durch die Verbindung dieses Gewichts mit dem mittleren Fehler der Gattung von Beobachtungen, deren Gewicht der Einheit gleich gesetzt worden ist.

3.

Die Formeln für die Berechnung, sowohl der Gewichte irgend welcher bestimmten Function der bei der Messung eines Dreiecksnetzes erhaltenen Beobachtungen, wie der mittleren Fehler sind in der Abhandlung abgeleitet und gegeben worden; wir wollen hier die Wirkung der Bedingungsgleichungen des Dreiecksnetzes auf die Gewichte untersuchen. Bezeichnen wir irgend ein Gewicht wieder mit P, so ist zufolge der Abhandlung

$$P = \frac{1}{R - S}$$

wo R und S Grössen sind, deren jede aus einem Aggregat von Gliedern besteht, deren jedes nothwendiger Weise positiv ist. Denn in jedem ist der Zähler ein Quadrat, und der Nenner eine Grösse, die der Natur der Sache nach stets positiv ist. Ferner ist R immer von den Bedingungsgleichungen unabhängig, während S eine Function dieser ist. Die Zahl der Glieder, aus welchen S besteht, ist im Allgemeinen der Zahl der Bedingungsgleichungen gleich, es kann sich jedoch ereignen, dass von diesen Gliedern Eins oder mehrere gleich Null werden. Ja es giebt sogar einzelne besondere Fälle, in welchen alle Glieder, und folglich auch S selbst, gleich Null werden. Hieraus folgt schon, dass das Vorhandensein von Bedingungsgleichungen die Gewichte im Allgemeinen immer vergrössert, denn dem Vorhergehenden zufolge ist immer $R > R - S$. Man kann in vielen Fällen die Gewichte auf mehrere Arten berechnen, indem sich oft die Gleichungen, von welchen man ausgehen muss, auf verschiedene Arten aufstellen lassen, und dadurch kann der Fall eintreten, dass bei diesen verschiedenen Berechnungsarten beide Grössen R und S verschiedene Werthe annehmen, aber die Werthe, die sie annehmen, sind immer so beschaffen, dass für jede einzelne,

bestimmte Function der Werth von $R-S$, und folglich auch der von P derselbe bleibt.

Nehmen wir nun an, dass man von den vorhandenen Bedingungsgleichungen Eine weglässt, so besteht die einzige Veränderung, die der Ausdruck des Gewichts erleidet, darin, dass das betreffende Glied des Ausdrucks von S wegfällt, wenn es nicht ohnehin Null war. Es wird daher das Gewicht P der betreffenden Function kleiner, wenigstens nie grösser. Im entgegengesetzten Falle, nemlich wenn zu den bisher vorhandenen Bedingungsgleichungen eine neue hinzukommt, lässt sich eben so beweisen, dass das Gewicht P grösser, wenigstens nie kleiner wird. Da die Fälle, in welchen weggelassene, oder hinzugefügte Bedingungsgleichungen keine Wirkung auf ein Gewicht haben, immer vereinzelt dastehen, und wenn eine solche Bedingungsgleichung auf Ein gewisses Dreiecksstück keine Wirkung ausübt, gewiss andere Dreiecksstücke vorhanden sind, in Bezug auf welche die Wirkung statt findet, so kann man den allgemeinen Satz aussprechen, dass die Vermehrung der Anzahl der Bedingungsgleichungen immer die Gewichte der Dreiecksstücke vergrössert, und die Verminderung derselben immer die Gewichte verkleinert.

4.

Die eben erhaltenen Sätze ergaben sich ohne dass die Berücksichtigung der besonderen Form der Bedingungsgleichungen nöthig wurde, sie finden also bei jeder Bedingungsgleichung statt, mag die Form derselben sein wie sie will, sie haben daher in jedem Dreiecksnetze volle Geltung, wie gross oder wie klein auch die Winkel sein mögen, die darin vorkommen. Man wird weiter unten an Beispielen sehen, dass Seitengleichungen z. B. in welchen sehr kleine Winkel vorkommen, sehr günstige Wirkungen ausüben können. Behauptungen daher, dass solche Bedingungsgleichungen das Resultat unsicher oder gar unrichtig machen könnten, entbehren jedes Grundes. Aus demselben Grunde, dass die Vergrösserung der Gewichte nicht an die Form der Bedingungsgleichungen gebunden ist, folgt ferner dass es nunmehr nicht nothwendig ist in jedem Dreieck alle drei Winkel zu beobachten, so fern nur die Anlage des Netzes so eingerichtet wird, dass statt der fehlenden Winkelgleichungen eine genügende Anzahl von Seitengleichungen vorhanden sind. Die Weglassung einer Winkel- oder Richtungsbeobachtung

hie und da kann durch die Umstände geboten werden. Wenn von zwei Gegenständen A und B der erste vom zweiten aus gesehen werden kann, so kann gewiss auch der zweite vom ersten aus gesehen werden, aber es ereignet sich manchmal, dass von dem einen Punkte aus das Absehen gut ist, und gute Beobachtungen erwarten lässt, dass aber von dem anderen Punkte aus das Absehen schlecht ist, und nur schlechte Beobachtungen zu erwarten sind; man thut in diesem Falle besser die schlechten Beobachtungen unausgeführt zu lassen. Es lässt sich freilich behaupten, dass auch die schlechteste Beobachtung benutzt werden kann, wenn man ihr das richtige Gewicht beilegt, und hiegegen lässt sich theoretisch nichts einwenden, aber in der Praxis ist es immer unmöglich ein solches Gewicht mit der nöthigen Genauigkeit zu bestimmen, denn es fehlt stets hiezu die erforderliche Anzahl der Daten. Die Anwendung unrichtiger Gewichte kann aber das Resultat schädigen, und es ist daher stets vorzuziehen solche Fälle zu vermeiden.

5.

Es kann hierauf nothwendig werden, bei der Berechnung des Dreiecksnetzes Winkel hinzu zu ziehen, die nicht unmittelbar beobachtet sind, sondern aus den beobachteten berechnet werden müssen, aber hierin liegt nicht der mindeste Grund zur Befürchtung einer Ungenauigkeit, da oftmals die berechneten Winkel grössere Gewichte bekommen wie die beobachteten, und jedenfalls nach der Ausgleichung des Netzes für die Seiten, mag man sie aus beobachteten oder berechneten Winkeln ableiten, dieselben Werthe hervorgehen müssen.

6.

Kommen wir nun nach diesem auf die wesentlichsten Vorschriften, die dem zur Ausführung einer Haupttriangulation bestimmten Personal zu ertheilen sind, so möchten, nachdem die Ausdehnung der Triangulation, ihre Anfangs- und Endpunkte, so wie etwaige Zwischenpunkte, die sie berühren soll, bestimmt, auch die Zahl und Lage der zu messenden Grundlinien angegeben sind, ferner der ganze Arbeitsplan auf eine Zeit- und Kostenaufwand möglichst schonende Art festgesetzt, specielle Instruction über die Behandlung der Instrumente u. dgl. m. ertheilt worden sind, nur das Maximum des erlaubten mittleren Fehler der Beobachtungen an sich, den ich weiter unten den mittleren Fehler der

nackten Beobachtungen nennen werde, und das Minimum der zu bewirkenden Bedingungsgleichungen in Bezug auf die Anzahl der Dreieckspunkte vorzuschreiben sein. Vorschriften über das Minimum der Seiten der Dreiecke der verschiedenen Ordnungen sind unangemessen, da die Beschaffenheit des Terrains so sehr hiebei in Betracht kommt, und gewisse Gegenden zwar die Anlage von grossen Dreiecken erlauben, aber andere Gegenden die Anlage kleinerer Dreiecke zur Nothwendigkeit machen. Eher liesse sich ein Maximum der Seiten bestimmen, da bei allzu grosser Länge derselben leicht eine Undeutlichkeit in der Sichtbarkeit der Objekte eintreten kann, die auf die Güte der Beobachtungen nachtheilig einwirkt. Die Grösse der anzuwendenden Instrumente, und namentlich die optische Kraft der Fernröhre derselben ist hiebei in Betracht zu ziehen. Auch verlangen grössere Dreiecke grössere Genauigkeit der Winkelmessungen wie kleinere, um zu vermeiden, dass die mittleren Fehler solcher Seiten selbst nicht zu sehr anwachsen. Es möchten bei Triangulationen, die durch Gegenden geführt werden, die die Anlage sehr grosser Dreiecke erlauben, grössere und mit grösseren Fernröhren versehene Instrumente anzuwenden sein, wie bisher der Fall gewesen ist.

7.

Vorschriften über die erlaubte Fehlergränze der Seiten zu geben ist gänzlich unstatthaft, denn aus den oben erwähnten Bestimmungen über den mittleren Fehler der Beobachtungen und der Zahl der Bedingungsgleichungen folgen die mittleren Fehler der verschiedenen Seiten von selbst, und es ist nicht zu umgehen dass diese in gewissen, speciellen Fällen, die zu vermeiden unmöglich ist, grösser, hingegen in anderen Fällen kleiner werden. Die mittleren Fehler der Seiten, die man schliesslich erhält müssen als gut betrachtet werden, wenn nur die obigen Grundbestimmungen erfüllt sind. In Bezug auf den Anschluss der Resultate, die aus zwei verschiedenen Triangulationen für eine und dieselbe Dreiecksseite hervor gehen, darf nicht ausser Betracht gelassen werden, dass aus diesem Anschluss sich die Summe oder der Unterschied der zufälligen Fehler, die diese beiden Resultate besitzen, heraus stellt, und der zufällige Fehler irgend einer Bestimmung je nach den Umständen grösser oder kleiner werden kann, wie der mittlere Fehler.

Endlich ist zu bewirken, dass alle Dreieckspunkte auf möglichst sichere Art in der Erde festgelegt werden. Denn man kann ausserdem in den Fall kommen, nach Verlauf einer nicht grossen Anzahl von Jahren die Triangulation als kaum, oder gar nicht mehr vorhanden betrachten zu müssen, wovon leider Beispiele vorhanden sind.

8.

Bei der Bekanntmachung der Resultate einer Triangulation müssen, wie bisher geschehen ist, alle Beobachtungen, nebst dem Tage an welchem sie angestellt worden sind, einzeln angeführt, und der Name des Beobachters, so wie das angewandte Instrument angegeben werden. Es ist anzuempfehlen immer Richtungen zu beobachten, und die Beobachtungen vollständig anzuführen, nemlich jedem einzelnen Gyrus die Lage des Fernrohrs, ob links oder rechts, wenn es excentrisch ist, oder ob der Höhenkreis links oder rechts, ferner ob vorwärts oder rückwärts beobachtet worden ist, auch welchem Punkt des Horizontalkreises der angenommene Nullpunkt der Richtungen entspricht (letzterer nur in Graden und Minuten) anzugeben. Den Nullpunkt der Richtungen wählt man meines Erachtens nach am Zweckmässigsten so, dass diese die Azimuthe der Gegenstände, vom Südpunkt an nach Westen, nahe angeben; für die erste Richtung jedes Gyrus kann man demohngeachtet dieselbe Zahl von Secunden ansetzen. Die Sitte der ersten Richtung jeder Station den Werth Null zu geben kann zwar statt der Angabe der Azimuthe beibehalten werden, jedoch sollte man nicht, wie zu geschehen pflegt, in den Gyris, in welchen die erste Richtung nicht beobachtet worden ist, wieder mit Null anfangen, sondern die entsprechende Anzahl von Graden, Minuten und Secunden ansetzen, die der Richtung nahe entspricht, deren Werth man ein für alle Mal gleich Null angenommen hat.

Um jedem, der Nachrechnungen anstellen will, Anhaltspunkte darzubieten, halte ich es für das Angemessenste ausser den oben angeführten Einzelnheiten die Ausgleichungen auf den Stationen so anzugeben, wie ich es in dem Hauptbeispiel der Abhandlung von Art. 85 bis 88 für die Stationen (2) bis (5) gethan habe. Es wären demzufolge, ausser den oben angegebenen Einzelnheiten, die zwei Täfelchen für die zusammen gezogenen Beobachtungen, das Täfelchen für die (pp) (pp') etc. die Werthe der N, N', etc., das Täfelchen der daraus folgenden Coefficienten (1, 1), (2, 2, 1), etc. nebst den $(1, l)$, etc. bis (ll), die Werthe

der Grössen $(1,1)$, $(2,2,1)$, $(3,3,2)$, etc. nebst (ll,n), so wie die der β''', γ''', β^{v}, γ^{v}, etc., die aus der Auflösung der Gleichungen hervorgehen, und im zweiten Theil der Auflösung gebraucht werden, so wie endlich die Werthe der $w(r)$ und $y(r)$ anzusetzen.

Im zweiten Theile der Auflösung sind zuerst die Bedingungsgleichungen, und die daraus folgenden Werthe der $F(I)$, $F(II)$, etc. anzugeben, und hierauf eine tabularische Aufstellung der Logarithmen der Differentialquotienten $q(r,I)_s$, $q(r,II)_s$, etc., so wie der Hülfsgrössen $\eta(r,I)_s$, $\eta(r,II)_s$, etc. und der $f(r,I)_s$, $f(r,II)_s$, etc. folgen zu lassen. Die Anführung der Werthe der $Q(r,I)_s$, $Q(r,II)_s$, etc. scheint mir überflüssig, da sie auf die einfachste Weise aus den $\eta(r,I)_s$, $\eta(r,II)_s$, etc. folgen. Es haben hierauf die Coefficienten der Endgleichungen (I,I), (I,II), etc. (II,II), etc. etc. und die Werthe der $(2)_1$, $(3)_1$, $(4)_1$, etc. $(3)_2$, $(4)_2$, etc. $(4)_3$, etc. etc.
und der

$(II,II,1)$, $(III,III,2)$, etc. bis Fq

zu folgen, die sich durch die Auflösung dieser Gleichungen ergeben, worauf die Werthe der $z(r)$, $x(r)$ und der mittlere Fehler einer einzelnen Beobachtung einer Richtung anzugeben sind, welcher letzte aus der Summe der Fehlerquadrate, deren Ausdruck $\Sigma(ll,n)+Fq$ ist, nach dem Art. 150 der Abhandlung zu berechnen ist.

Mit dem Vorstehenden ist noch nicht Alles gegeben, welches im jetzigen Zustande der Wissenschaft verlangt werden muss, sondern es kommt noch die Berechnung, wenigstens einiger, der Gewichte hinzu. Ich halte es für zu weit gegangen, wenn man verlangen wollte, dass in der Darlegung eines ausgeführten Dreiecksnetzes die Gewichte aller Stücke desselben angegeben werden müssten, und meine, dass es hinreichend ist, wenn die Gewichte einiger Stücke, die in der Nähe der Anfangs- und Endpunkte liegen, so wie überdiess die Gewichte solcher Stücke, die einige Verwickelung in der Anlage darbieten gegeben werden. Eine jedenfalls schätzbare Zugabe bildet indess die Angabe der Gewichte einer grösseren Anzahl von Stücken. Durch die Anführung der oben genannten Grössen, namentlich der $(2)_1$, etc. und der $(II,II,1)$, etc. setzt man jeden in den Stand, mit geringer Mühe die Gewichte so vieler Stücke berechnen zu können, wie er will. Dass der mittlere Fehler der Dreiecksstücke, deren Gewichte man berechnet hat, mit anzuführen ist, versteht sich von selbst.

9.

Es ist noch eine wichtige Frage zu behandeln, zumal mehrmals dagegen gefehlt worden ist. Es ist dieses die Frage, von welchen Grundsätzen man bei der wissenschaftlichen Beurtheilung eines ausgeführten Dreiecksnetzes auszugehen habe, um zu einer möglichst richtigen Würdigung der Resultate desselben zu gelangen, ohne einestheils den Werth desselben zu überschätzen, oder anderen Theils durch unrichtige Beurtheilung desselben ein Unrecht zu begehen. Ich meine, dass es selbstverständlich ist, dass man in dieser Hinsicht die einzelnen Operationen, die die Ausführung eines Dreiecksnetzes verlangt, sich vergegenwärtigen, und einzeln untersuchen muss. Diese Operationen lassen sich eintheilen in:

1) Die Anlage des Dreiecksnetzes, und die Verbindung der einzelnen Dreiecke mit einander;
2) Die Messungen und Beobachtungen, und zwar
   a) Die Messungen der Grundlinien;
   b) Die Messungen oder Beobachtungen der Richtungen;
   c) Die Ausführungen der Centrirungen;
3) Die Berechnung

und auf die Beschaffenheit der Ausführung dieser Operationen hat man bei der Prüfung sein Augenmerk zu richten. Sollten etwaige Mängel gefunden werden, so ist ihre Bedeutung zu berücksichtigen, und richtig zu würdigen. In Bezug hierauf kann Folgendes angemerkt werden:

ad 1) Sollte gefunden werden, dass an einer oder mehreren Stellen des Dreiecksnetzes eine zu geringe Anzahl von Controlen oder Bedingungsgleichungen vorhanden wären, so kann diesem in der Regel durch nachträgliche Einmessung neuer Richtungen, oder durch Einschaltung eines neuen Dreieckspunkts abgeholfen werden, aber es werden hiedurch manchmal nicht unbeträchtliche neue Kosten verursacht.

ad 2, *a*) Fände man, dass die Grundlinien nicht mit der erforderlichen Umsicht gemessen worden wären, so wäre dieser Uebelstand durch neue Messungen freilich zu entfernen, aber es würden wieder nicht unbedeutende nachträgliche Kosten erwachsen.

ad 2, *b*) Wären die Beobachtungen der Richtungen nicht mit erforderlicher Genauigkeit ausgeführt, so müsste diese ganze Hauptarbeit von Neuem vorgenommen werden.

ad 2, *c*) Etwaige Mängel in der Ausführung der Centrirungen zu heben, würde ohne grossen nachträglichen Kostenaufwand zu beseitigen sein, so ferne nur bei den Beobachtungen jeder Punkt dauernd fest gelegt worden ist.

ad 3) Fehler in der Berechnung lassen sich gemeiniglich mit weit geringeren Kosten, wie Mängel in den vorbenannten Punkten, entfernen, da blos Arbeiten im Zimmer in Betracht kommen.

10.

Zur Beurtheilung des Punkts 1) hat man vorzüglich auf die Anzahl und die Vertheilung der vorhandenen Bedingungsgleichungen zu sehen. Es können hiebei verschiedenartige Umstände eintreten. In einigen Gegenden, namentlich da wo man sehr grosse Dreiecke hat auswählen können, kann es nicht möglich geworden sein Diagonalen einzuschneiden, hier muss man sich mit der Winkelgleichung begnügen, die jedes einzelne Dreieck darbietet, aber diese auch fordern. Etwaige kleine Winkel, die in solchen Dreiecken vorkommen bilden nicht unbedingt einen Gegenstand des Tadels; es wird hierüber weiter unten das Nähere erklärt werden. Uebergrosse Seiten solcher Dreiecke könnten, aus dem oben angeführten Grunde wohl zu tadeln sein, namentlich wenn bei den Beobachtungen kein Heliotropenlicht oder zu kleine Instrumente angewandt worden sein sollten. In anderen Gegenden, wo namentlich bei Anwendung kleinerer Dreiecke Diagonalen haben eingeschnitten werden können, ist an die Zahl der Bedingungsgleichungen, die vorhanden sind, eine höhere Forderung zu stellen. Findet man die Zahl und die Vertheilung dieser so, dass für jeden hier in Betracht kommenden Dreieckspunkt wenigstens Eine Bedingungsgleichung vorhanden ist, so muss man schon die Anlage für gut anerkennen, sind noch mehr Bedingungsgleichungen vorhanden, so ist um so mehr die Anlage als gut zu bezeichnen.

11.

Die Beurtheilung der Ausführung des Punkts 1, *a*) ist die schwierigste, da von der Messung der Grundlinien nicht so viele Erfahrungen vorliegen, wie von den anderen bei einer Triangulation erforderlichen Operationen. Man muss, wenn die Beurtheilung ausführlich und gründlich sein soll, die einzelnen Messungen untersuchen, und hieraus sich ein Urtheil über die Sorgfältigkeit bilden, mit welcher sie ausgeführt

worden sind. Vorzugsweise ist hier darauf Acht zu haben, wie die Berücksichtigung der Temperatur der Messstangen in Folge der Einrichtung des Messapparats hat statt finden können, und wie sie statt gefunden hat. Auch die Vergleichung der Messstangen mit dem Grundmaasse ist in Bezug auf seine Einzelnheiten zu berücksichtigen. Es werden wohl bei dem gegenwärtigen Stande dieser Sache individuelle Ansichten nicht immer ganz zu vermeiden sein.

12.

Die Beurtheilung der Ausführung des Punkts 2, *b*) steht gegenwärtig auf fester Grundlage. Der mittlere Fehler der nackten Beobachtungen ist es, welcher hier den Ausschlag giebt. Die Berechnung dieses Fehlers, und die Vergleichung desselben mit demjenigen, welcher sich aus den anderen schon vorhandenen Triangulationen ergiebt, bildet einen sicheren Maassstab zur Beurtheilung des in Rede stehenden Punkts.

13.

Die Beurtheilung der Ausführung des Punkts 2, *c*) kann im Allgemeinen nicht direct ausgeführt werden, es wäre denn, dass man sich auf wenigstens einige der Stationen begäbe, dort die Centrirungen nachmässe, und hievon auf das Ganze schlösse. Die Theorie bietet aber hier ein indirectes Mittel dar. Der mittlere Fehler der nackten Beobachtung ist unabhängig von den Fehlern der Centrirung, der Phasen der Signale, u. s. w., aber der schliessliche mittlere Fehler schliesst diese Fehlerquellen in sich, die Vergleichung dieser beiden mittleren Fehler mit einander lässt also schon einen Schluss auf die Ausführung der Centrirungen u. s. w. zu.

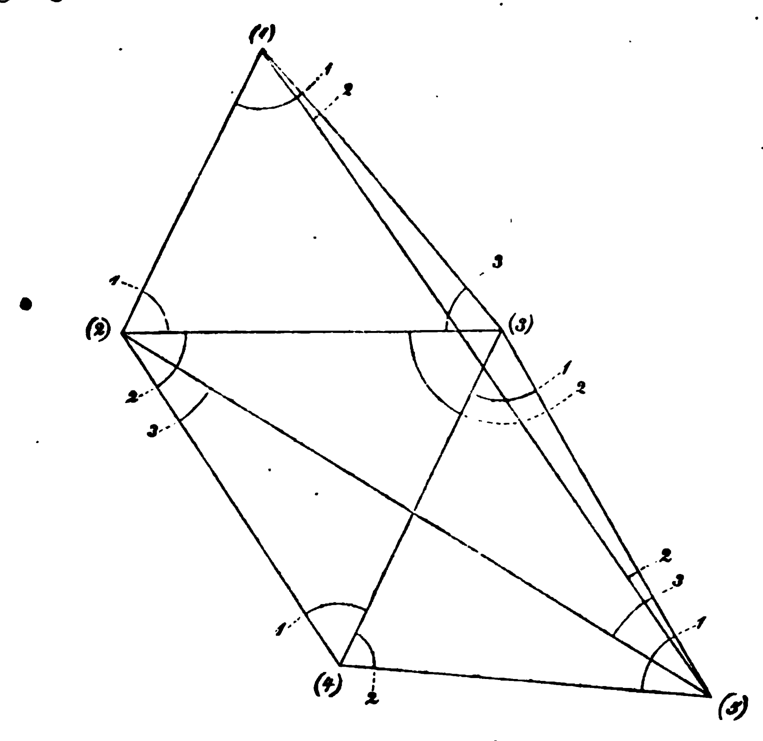
14.

Die Beurtheilung endlich der Ausführung des Punkts 3) ist einfach. Es ist erstlich zu untersuchen, ob in der Berechnung den theoretischen Bedingungen überall Gnüge geleistet worden ist, und zweitens ob die numerischen Rechnungen sorgfältig und richtig ausgeführt worden sind. Das in der Abhandlung entwickelte erste Verfahren bietet vermöge der Controlgleichungen, die es besitzt, und die in einem der unten folgenden Supplemente um Eine vermehrt werden sollen, ein angemessenes Hülfsmittel dazu dar.

§ 2. Specielle Betrachtungen.

15.

Ich beabsichtige hier an einigen Beispielen zu zeigen welche Wirkungen die Ausgleichungstheorie in gewissen Fällen ausübt. Ich habe dazu absichtlich fingirte Beispiele gewählt, da ich diese so stellen konnte, dass die grössere oder kleinere Wirkung, die die Bedingungsgleichungen ausüben, am deutlichsten hervortritt. Das erste Beispiel soll folgende Figur geben,



in welcher die Winkel wie folgt bezeichnet werden sollen

$$(2)(1)(3)=(1)_1\,,\quad (5)(3)(4)=(1)_3\,,\quad (3)(5)(4)=(1)_5$$
$$(5)(1)(3)=(2)_1\,,\quad (4)(3)(2)=(2)_3\,,\quad (3)(5)(1)=(2)_5$$
$$(1)(2)(3)=(1)_2\,,\quad (2)(3)(1)=(3)_3\,,\quad (3)(1)(2)=(3)_5$$
$$(3)(2)(4)=(2)_2\,,\quad (2)(4)(3)=(1)_4$$
$$(5)(2)(4)=(3)_2\,.\quad (3)(4)(5)=(2)_4$$

Ich werde ferner annehmen, dass diese Winkel selbst unabhängig von einander beobachtet oder gemessen worden seien, weil dieses für den hier zu verfolgenden Zweck auf eine etwas einfachere Rechnung führt. Der Fall übrigens, in welchem statt der Winkel die Richtungen

beobachtet worden sind, ist jenem ganz analog, und die sich ergebenden Gewichte werden von denen jenes Falles um wenig oder nichts verschieden sein.

16.

Fürs Erste soll angenommen werden, dass die beiden Diagonalen (2)(5) und (1)(5), die die Figur enthält, nicht eingeschnitten worden sind, und folglich das Netz aus den drei an einander gereihten Dreiecken (1)(2)(3), (2)(3)(4), (3)(4)(5) besteht.

Suchen wir hierauf die Gewichte der Winkel und verschiedener Seiten nach der Ausgleichung dieses Netzes.

Die Figur liefert nur drei Bedingungsgleichungen, welche alle Winkelgleichungen sind, nemlich

$$(1)_1 + (1)_2 + (3)_3 = 180^0$$
$$(2)_2 + (2)_3 + (1)_4 = 180$$
$$(1)_3 + (2)_4 + (1)_5 = 180$$

auf deren rechten Seiten in der Anwendung noch die sphärischen Ueberschüsse hinzu zu fügen wären, auf die es aber hier nicht ankommt. Die Tafel für die Differentialquotienten dieser Gleichungen steht wie folgt,

r	s	$q(r,I)_s$	$q(r,II)_s$	$q(r,III)_s$
1	1	1	—	—
1	2	1	—	—
2		—	1	—
1	3	—	—	1
2		—	1	—
3		1	—	—
1	4	—	1	—
2		—	—	1
1	5	—	—	1

und setzt man die ursprünglichen Gewichte aller Winkel einander gleich, und $=1$, so werden für alle Bedingungsgleichungen

$$\eta(r,I)_s = Q(r,I)_s = f(r,I)_s = q(r,I)_s$$
$$\eta(r,II)_s = Q(r,II)_s = f(r,II)_s = q(r,II)_s$$
etc. etc.

die auch bei den unten folgenden Abänderungen des Beispiels statt finden werden.

17.

Suchen wir nun zuerst die Coefficienten der Endgleichungen, so ergeben sich

$$(I,I) = 3,\ (II,II) = 3,\ (III,III) = 3$$

und alle übrigen Coefficienten sind Null. Bezeichnet man ferner wie in der Abhandlung die Resultate der Substitution der beobachteten Werthe der Winkel in die Bedingungsgleichungen mit $F(I)$, $F(II)$, $F(III)$, so ergeben sich

$$\varphi_1 = \frac{F(I)}{3} = z(1)_1 = z(1)_2 = z(3)_3$$
$$\varphi_2 = \frac{F(II)}{3} = z(2)_2 = z(2)_3 = z(1)_4$$
$$\varphi_3 = \frac{F(III)}{3} = z(1)_3 = z(2)_4 = z(1)_5$$

Die Verbesserung eines jeden Winkels ist also mit entgegengesetztem Zeichen dem dritten Theil des ganzen Fehlers, den das betreffende Dreieck nach der Substitution der Beobachtungen zeigt, gleich; mit einem längst bekannten Satze übereinstimmend*). Man findet ferner leicht die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler, wenn sie wie oben mit W bezeichnet wird,

$$W = \tfrac{1}{3}\{F(I)^2 + F(II)^2 + F(III)^2\}$$

18.

Das zunächst Vorhergehende habe ich nur beiläufig angeführt, und werde mich hierauf zur Berechnung der Gewichte wenden. Ich bemerke dazu im Voraus, dass hier immer

$$k(r)_s = (M,r)_s = Q(M,r)_s$$

ist, und dass folglich die betr. Ausdrücke des Art. 143 der Abhandlung in die folgenden übergehen

$$R = \Sigma\{(M,1)_s^2 + (M,2)_s^2 + (M,3)_s^2 + \ldots\}$$
$$(I,M) = \Sigma\{(M,1)_s \,.\, q(1,I)_s + (M,2)_s \,.\, q(2,I)_s + (M,3)_s . q(3,I)_s + \ldots\}$$
$$(II,M) = \Sigma\{(M,1)_s \,.\, q(1,II)_s + (M,2)_s \,.\, q(2,II)_s + (M,3)_s . q(3,II)_s + \ldots\}$$
$$(III,M) = \Sigma\{(M,1)_s \,.\, q(1,III)_s + (M,2)_s \,.\, q(2,III)_s + (M,3)_s . q(3,III)_s + \ldots\}$$

etc. etc.

Wenden wir uns nun zuerst zur Ermittelung der Gewichte der Winkel, so lässt sich voraussehen, dass diese für jeden Winkel den-

*) Ich bemerke hiezu, dass dieser Satz nicht mehr statt findet, wenn man statt der unabhängigen Winkel die Richtungen beobachtet hat.

selben Werth erhalten werden; wir brauchen daher nur Einen Winkel z. B. $(1)_1$ zu betrachten. Hier wird

$$(M,1)_1 = 1$$

und alle übrigen Grössen dieser Gattung sind Null, es wird folglich auch

$$R = 1$$

Es wird ferner den vorstehenden Ausdrücken gemäss $(I,M) = 1$, und alle übrigen Grössen dieser Gattung werden auch Null. Folglich wird

$$S = \frac{(I,M)^2}{(I,I)} = \frac{1}{3}$$

und das Gewicht

$$P = \tfrac{3}{2}$$

welches Resultat für alle beobachteten Winkel gilt. Es folgt hieraus dass der mittlere Fehler eines jeden ausgeglichenen Winkels im Verhältniss wie

$$1 : \sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

kleiner ist, wie das Gewicht des beobachteten Winkels, und da dieses Resultat erhalten worden ist, ohne eine Annahme über die Grösse der Winkel zu machen, so findet es in jedem, aus blos an einander gereihten Dreiecken bestehenden, Dreiecksnetze statt, die Winkel der verschiedenen Dreiecke mögen so gross oder so klein sein wie sie wollen.

19.

Gehen wir nun zur Ermittelung der Gewichte einiger der Seiten des Dreiecksnetzes über, so kann man im Voraus schon erkennen, dass hiebei ein anderes Verhalten eintritt. Diese Gewichte werden im Allgemeinen für die verschiedenen Seiten verschieden ausfallen, und namentlich werden sie desto kleiner werden, je mehr sie sich von der Grundlinie entfernen, auch kann man diese Gewichte nicht berechnen, ohne die Winkel des Dreiecksnetzes ihrer Grösse nach zu kennen. Seien jetzt im Dreiecksnetze, welches durch die Figur des Art 15 dargestellt ist, in den drei Dreiecken, die hier betrachtet werden, die Werthe der Winkel die folgenden, die den Dimensionen dieser Figur sehr nahe entsprechen.

$$(1)_1 = 66^0 \qquad (2)_2 = 58^0 \qquad (1)_3 = 56^0$$
$$(1)_2 = 64 \qquad (2)_3 = 64 \qquad (2)_4 = 70$$
$$(3)_3 = 50 \qquad (1)_4 = 58 \qquad (1)_5 = 54$$

20.

Es wird von nun an die Seite (1)(2) der Figur als Grundlinie angesehen, und es soll in Bezug auf diese zuerst das Gewicht der Seite

(2)(3) ermittelt werden. Ich werde indess hier, wie im Folgenden von dem Inhalt der Abhandlung eine Abweichung machen und nicht die Gewichte der Seiten selbst, sondern die der ihnen zukommenden Logarithmen bestimmen, da diese Gewichte unabhängig von dem absoluten Maasse der Seiten sind. Für die oben genannte Seite bekommen wir demgemäss die Gleichung

$$\log(2)(3) = \log(1)(2) + \log\sin(1)_1 - \log\sin(3)_3$$

Nehmen wir ferner an, dass die siebente Decimale des Briggischen Logarithmus und die Secunde die Einheiten bilden sollen, so ist die erste Behandlung dieser Gleichung, die nemlich wodurch ihr Differential erlangt wird, genau dieselbe, die im Art. 92 der Abhandlung in Betreff der Seitengleichungen erklärt wurde, nur darf jetzt die resultirende Gleichung mit keinem von plus oder minus Eins verschiedenen Factor multiplicirt werden. Durch Zuziehung der oben angegebenen Werthe der Winkel bekommen wir daher

$$\Omega = +9.38\,\delta(1)_1 - 17.67\,\delta(3)_3$$

folglich

$$\left.\begin{aligned}(M,1)_1 &= +9.38\\ (M,3)_3 &= -17.67\end{aligned}\right\}\text{ und hieraus } R = 400.1$$

Es wird ferner $(I,M) = -8.29$, und die anderen Grössen dieser Gattung sind Null. Hiemit, und da im gegenwärtigen Falle die Coefficienten $(2)_1$, $(3)_1$, etc. etc., die sich aus der Auflösung der Endgleichungen ergeben, alle Null sind, erhält man

$$S = 22.9 \text{ und } P = 0{,}002652$$

21.

Suchen wir hierauf das Gewicht der Seite (3)(4) des zweiten Dreiecks, so ist die Grundformel

$$\log(3)(4) = \log(1)(2) + \log.\sin(1)_1\sin(2)_2 - \log.\sin(3)_3\sin(1)_4$$

woraus

$$\Omega = +9.38\,\delta(1)_1 + 13.16\,\delta(2)_2 - 17.67\,\delta(3)_3 - 13.16\,\delta(1)_4$$

also

$$\begin{aligned}(M,1)_1 &= +\ \ 9.38\\ (M,2)_2 &= +13.16\\ (M,3)_3 &= -17.67\\ (M,1)_4 &= -13.16\end{aligned}$$

und

$$(I,M) = -8.29,\ (II,M) = 0,\ (III,M) = 0$$

folgen. Es ergiebt sich hieraus

$$R = 746.5,\ S = 22.9 \text{ und } P = 0{,}001382$$

22.

Zur Erlangung des Gewichts der Seite (4)(5) des dritten Dreiecks ergiebt sich

$$\log(4)(5) = \log(1)(2) + \log.\sin(1)_1 \sin(2)_2 \sin(1)_3 - \log.\sin(3)_3 \sin(1)_4 \sin(1)_5$$

$$\Omega = +9{,}38\delta(1)_1 + 13{,}16\delta(2)_2 + 14{,}20\delta(1)_3 - 17{,}67\delta(3)_3 - 13{,}16\delta(1)_4 - 15{,}30\delta(1)_5$$

$$(M,1)_1 = +9{,}38,\ (M,3)_3 = -17{,}67$$

$$(M,2)_2 = +13{,}16,\ (M,1)_4 = -13{,}16$$

$$(M,1)_3 = +14{,}20,\ (M,1)_5 = -15{,}30$$

$$R = 1182{,}3$$

$$(I,M) = -8{,}29,\ (II,M) = 0,\ (III,M) = -1{,}10$$

$$S = 23{,}3,\ P = 0{,}000863$$

23.

Betrachten wir diese Gewichte näher, so finden wir, dass sie von Dreieck zu Dreieck sehr nahe in dem Verhältniss von

$$1 : \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{3}$$

abnehmen, und diese Progression wird sich nahe in demselben Verhältniss fortsetzen, wenn mehr Dreiecke vorhanden sind, die nahe dieselben Dimensionen haben, wie die obigen, und die man gemeiniglich für die günstigsten hält. Wenn also ein Dreiecksnetz aus vielen solchen an einander gereihten Dreiecken besteht, so kann man sich schon eine Vorstellung davon machen, wie klein die Gewichte der Seiten der Dreiecke werden, die von der Grundlinie am Entferntesten liegen. Hieraus sieht man, wie unrichtig es ist, von jeder Dreiecksseite dieselbe Genauigkeit verlangen zu wollen.

Es lässt sich leicht beweisen, dass die obige Progression in einem Dreiecksnetze, welches aus lauter an einander gereihten, sehr nahe gleichseitigen Dreiecken besteht, strenge statt findet. Sei die Anzahl dieser Dreiecke n, und die zwei Winkel, die von jedem Dreiecke gebraucht werden um die Seiten fortgesetzt zu berechnen, (a), (a'), (b), (b'), etc. (n) (n'), die einander sehr nahe gleich sind, und von welchen (a) und (a') zum ersten Dreieck gehören, dessen eine Seite als Grundlinie be-

trachtet wird. Wegen der sehr nahen Gleichheit aller Winkel können wir in der Differentialgleichung die Coefficienten als einander völlig gleich betrachten, da ein kleiner Unterschied in diesen nur eine kleine Grösse erster Ordnung hervorbringen kann. Sei daher der gemeinschaftliche Werth dieser Coefficienten c, dann wird

$$\Omega = c\delta(a) + c\delta(b) + \ldots + c\delta(n) - c\delta(a') - c\delta(b') - \ldots - c\delta(n')$$

und es ergeben sich daher

$$(M.a) = (M.b) = \text{etc.} = (M.n) = c$$
$$(M.a') = (M.b') = \text{etc.} = (M.n') = -c$$

folglich

$$R = 2nc^2$$

Da nun aus dem Täfelchen der Bedingungsgleichungen des Art. 16, und aus der vorstehenden Berechnung der Gewichte mehrerer Seiten sich leicht ergiebt, dass der Ausdruck eines jeden der Coefficienten (I,M), (II,M), etc. aus zwei gleichen, mit entgegengesetzten Zeichen behafteten Gliedern besteht, so werden

$$(I,M) = (II,M) = \text{etc.} = 0$$

und der allgemeine Ausdruck der gesuchten Gewichte wird

$$P = \frac{1}{R}$$

woraus hervorgeht, dass die Bedingungsgleichungen im gegenwärtigen Falle gar keine Wirkung auf die Gewichte ausüben *). Bezeichnen wir nun das gemeinschaftliche Gewicht der Logarithmen der beiden zu berechnenden Seiten des ersten Dreiecks mit P_1, das der beiden zu berechnenden Seiten des zweiten Dreiecks mit P_2, u. s. w., so geben die vorstehenden Entwickelungen sogleich

$$P_n = \frac{1}{2nc^2}, \quad P_{n-1} = \frac{1}{2(n-1)c^2}, \quad P_{n-2} = \frac{1}{2(n-2)^2c^2},$$
$$\text{etc.} \quad P_3 = \frac{1}{6c^2}, \quad P_2 = \frac{1}{4c^2}, \quad P_1 = \frac{1}{2c^2},$$

folglich

$$P_1 : P_2 : P_3 : P_4 : \text{etc.} = 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \text{etc.}$$

w. z. b. w.

---

*) Dieser gehört also unter die Fälle, die oben im Art. 2 im Allgemeinen angedeutet worden sind.

24.

Um zur Kenntniss der mittleren Fehler zu gelangen, die in Folge der vorstehenden Ermittelungen den Dreiecksseiten beizulegen sind, bedarf es der Kenntniss des mittleren Fehlers der Beobachtungen, denen das Gewicht = 1 beigelegt worden ist, aber aus unserem Beispiele selbst kann man diesen nicht erlangen, da es ein fingirtes ist. Es hindert uns aber nichts aus irgend einer wirklich ausgeführten Triangulation diesen mittleren Fehler zu entnehmen, und hier anzuwenden.

Im Art. 151 der Abhandlung wurde in Bezug auf das Hauptbeispiel derselben der mittlere Fehler einer einzelnen Beobachtung einer Richtung = 1″,984 gefunden, und obgleich diese Bestimmung auf einer zu kleinen Anzahl von Beobachtungen beruht, als dass man sie für ganz sicher halten könnte, so will ich sie doch im gegenwärtigen Beispiel anwenden. Durch die Multiplication der eben angeführten Zahl mit $\sqrt{2}$ erhält man den mittleren Fehler einer einzelnen Beobachtung eines Winkels = 2″,806, aber es muss jedenfalls voraus gesetzt werden, dass man bei einer Triangulation, bei welcher Winkel gemessen werden, sich nicht begnügt jeden Winkel nur Einmal zu messen, sondern dass man das Resultat der gemessenen Winkel aus einer angemessenen Anzahl von einzelnen Messungen ableitet. Demzufolge will ich annehmen, dass jeder Winkel, von welchem in diesem Aufsatze die Rede ist, 25 Mal gemessen worden sei, woraus hervorgeht, dass der mittlere Fehler eines jeden der Winkel, welchen oben das Gewicht = 1 beigelegt wurde, dem fünften Theil des oben angegebenen Fehlers der einzelnen Winkelmessung gleich gesetzt werden muss. Es soll daher hier der mittlere Fehler der Winkelmessungen oder Beobachtungen, denen das Gewicht = 1 beigelegt worden ist,

$$= 0'',561$$

angenommen werden, und hieraus folgen die mittleren Fehler der Logarithmen der Seiten der verschiedenen Dreiecke, deren Gewichte im Vorhergehenden berechnet worden sind, bez.

$$= 10{,}9 \ , \ = 15{,}1 \ , \ = 21{,}5$$

in Einheiten der siebenten Decimale. Wenn die Längen der Seiten bekannt sind, so kann man hieraus die mittleren Fehler der Seiten selbst finden, denn nennt man die Länge irgend einer Seite ϱ , so wird

$$\delta\varrho = \frac{\varrho}{Mod.} \cdot \frac{\delta \log \varrho}{1000000}$$

wo $\delta \log \varphi$ in Einheiten der siebenten Decimale, gleich wie oben geschehen, auszudrücken ist.

Nehmen wir z. B. an, die Länge der Seite (1)(2) unserer Figur, die als Grundlinie in den Berechnungen der Gewichte angenommen worden ist, sei 20000 Meter, so findet man die Seiten

$$(2)(3) = 23581^m\ , \ (3)(4) = 23581^m\ , \ (4)(5) = 24441^m$$

und die mittleren Fehler dieser Seiten bez.

$$= 0^m{,}0594\ , \ = 0^m{,}0829\ , \ = 0^m{,}1210$$

oder nahe

$$= \frac{1}{398500}\ , \ = \frac{1}{287600}\ , \ = \frac{1}{202000}$$

der Längen derselben. Nehmen wir an, dass von der letzten dieser Seiten an, das Netz sich durch eine Anzahl sehr nahe gleichseitiger Dreiecke fortsetze, so wird der mittlere Fehler der zwei letzten Seiten des sechzehnten Dreiecks schon

$$= \frac{1}{87500}$$

der Länge derselben. Die mittleren Fehler der ersten Seiten sind hier sehr klein, aber es darf nicht ausser Acht gelassen werden, dass die ganze Länge einer dieser Seiten als Grundlinie betrachtet worden ist. In der Praxis sind die gemessenen Grundlinien gemeiniglich weit kleiner wie die Seiten der grossen Dreiecke, und es werden daher in der Wirklichkeit die mittleren Fehler der Seiten wesentlich grösser ausfallen wie oben.

25.

Um diese Untersuchungen fortzusetzen sollen jetzt die Gewichte der Diagonalen (2)(4) und (1)(5) nebst denen der Winkel, die sie mit den anliegenden Seiten machen, ermittelt werden. Da diese Winkel bis jetzt noch zu den nicht beobachteten gehören, so bedarf die Berechnung der Gewichte derselben einer besonderen Vorbereitung. Aus den Dreiecken (3)(4)(5), (2)(4)(5), (2)(3)(4) der Figur bekommt man

$$1 = \frac{\sin (1)_5 \sin (3)_2 \sin (2)_3}{\sin (1)_3 \sin \{(3)_2 + (1)_4 + (2)_4\} \sin (2)_3}$$

die nachdem sie in Bezug auf $(3)_2$ aufgelöst worden ist,

$$\operatorname{tg} (3)_2 = \frac{\sin (1)_3 \sin (2)_2 \sin \{(1)_4 + (2)_4\}}{\sin (1)_5 \sin (2)_3 - \sin (1)_3 \sin (2)_2 \cos \{(1)_4 + (2)_4\}}$$

giebt. Hieraus erhielt ich

$$(3)_2 = 25^0\ 31',75$$

und hierauf durch die Gleichung $(3)_5 = (3)_2 + (1)_4 + (2)_4 + (1)_5 - 180°$

$$(3)_5 = 27° \, 31',75$$

Behandelt man nun zuerst die erste der obigen Gleichungen als ob sie eine der Bedingungsgleichungen wäre, so bekommt man

$$0 = -(1.11914)\delta(2)_2 + (1.64428)\delta(3)_2 - (1.15234)\delta(1)_3$$
$$+(1.01153)\delta(2)_3 + (1.62617)\{\delta(3)_2 + \delta(1)_4 + \delta(2)_4\} + (1.18461)\delta(1)_5$$

wo die in Klammern eingeschlossenen Zahlen die Logarithmen der Coefficienten sind, und löst man diese Gleichung in Bezug auf $\delta(3)_2$ auf, so erhält man

$$\Omega = \delta(3)_2 = +0.15233\delta(2)_2 + 0.16444\delta(1)_3 - 0.11890\delta(2)_3$$
$$- 0.48958\delta(1)_4 - 0.48958\delta(2)_4 - 0.17712\delta(1)_5$$

also

$$(M,2)_2 = +0.1523 \,,\; (M,2)_3 = -0.1189 \,,\; (M,2)_4 = -0,4896$$
$$(M,1)_3 = +0.1644 \,,\; (M,1)_4 = -0.4896 \,,\; (M,1)_5 = -0.1771$$

und hieraus folgt $R = 0.5751$. Ferner erhält man

$$(I,M) = 0 \,,\; (II,M) = -0.4562 \,,\; (III,M) = -0.5023$$

welche $S = 0.1535$, und endlich

$$P = 2.372$$

geben, welches das Gewicht des Winkels $(3)_2$ ist.

26.

Um das Gewicht des Winkels $(3)_5$ zu finden, bediene ich mich der Gleichung

$$\delta(3)_5 = \delta(3)_2 + \delta(1)_4 + \delta(2)_4 + \delta(1)_5$$

aus welcher ich durch den Ausdruck für $\delta(3)_2$ des vor. Art. diese Aenderung eliminire. Es wird also hier

$$\Omega = \delta(3)_5 = +0.15233\,\delta(2)_2 + 0.16444\,\delta(1)_3 - 0.11890\,\delta(2)_3$$
$$+ 0.51042\,\delta(1)_4 + 0.51042\,\delta(2)_4 + 0.82288\,\delta(1)_5$$

folglich

$$(M,2)_2 = +0.1523 \,,\; (M,2)_3 = -0.1189 \,,\; (M,2)_4 = +0.5104$$
$$(M,1)_3 = +0.1644 \,,\; (M,1)_4 = +0.5104 \,,\; (M,1)_5 = +0.8229$$
$$R = 1.2708$$
$$(I,M) = 0,\; (II,M) = +0.5438 \,,\; (III,M) = +1.4977$$
$$S = 0.8463$$
$$P = 2.356$$

welches das Gewicht des Winkels $(3)_5$ ist. Es verdient angemerkt zu werden, dass die Gewichte der beiden berechneten Winkel $(3)_2$ und

$(3)_5$ beträchtlich, im Verhältnisse nahe wie 1 : 1,6 grösser sind wie die Gewichte der beobachteten Winkel deren jedes = 1.5 ist.

27.

Zur Berechnung des Gewichts der Diagonale (2)(5) giebt die Figur zuerst

$$\log(2)(5) = (\log(1)(2) + \log.\sin(1)_1 \sin\{(1)_3 + (2)_3\} - \log.\sin(3)_3 \sin(3)_5$$

woraus man durch die Differentiation

$$\Omega = +9.374\,\delta(1)_1 - 12.156\,\{\delta(1)_3 + \delta(2)_3\}$$
$$- 17.667\,\delta(3)_3 - 40.396\,\delta(3)_5$$

findet.

Da aber $(3)_5$ kein beobachteter Winkel ist, so muss dessen Variation durch die im vor. Art. dafür erhaltene Gleichung eliminirt werden. Nachdem dieses geschehen ist, wird

$$\Omega = +9.374\delta(1)_1 - 6.154\delta(2)_2 - 18.799\delta(1)_3 - 7.353\delta(2)_3 - 17.667\delta(3)_3$$
$$- 20.619\delta(1)_4 - 20.619\delta(2)_4 - 33.242\delta(1)_5$$

Es wird daher im jetzigen Falle

$$(M,1)_1 = +\ 9.374\ ,\ (M,1)_4 = -\ 20.619$$
$$(M,2)_2 = -\ 6.154\ ,\ (M,2)_4 = -\ 20.619$$
$$(M,1)_3 = -\ 18.799\ ,\ (M,1)_5 = -\ 33.242$$
$$(M,2)_3 = -\ 7.353$$
$$(M,3)_3 = -\ 17.667$$
$$R = 2800.6$$
$$(I,M) = -\ 8.293\ ,\ (II,M) = -\ 34.126\ ,\ (III,M) = -\ 72.660$$
$$S = 2171.1$$
$$P = 0.001588$$

für das Gewicht von log (2)(5). Dieses ist merklich grösser wie das Gewicht des log der Seite (3)(4).

28.

Behandeln wir nun die Diagonale (1)(5) eben so, so bekommen wir nach und nach

$$1 = \frac{\sin\{(1)_3 + (2)_3 + (3)_3 + (2)_5\}\sin(1)_3 \sin(1)_4 \sin(1)_5}{\sin(2)_5 \sin(1)_1 \sin(2)_2 \sin(2)_4}$$

$$\operatorname{tg}(2)_5 = \frac{\sin(1)_3 \sin(1)_4 \sin(1)_5 \sin\{(1)_3 + (2)_3 + (3)_3\}}{\sin(1)_1 \sin(2)_2 \sin(2)_4 - \sin(1)_3 \sin(1)_4 \sin(1)_5 \cos\{(1)_3 + (2)_3 + (3)_3\}}$$

$$(2)_5 = 4^0 35' 5'',\ (2)_1 = 5^0 24' 55''$$

$$0 = -(0.97193)\,\delta(1)_1 + (1.01153)\,\delta(1)_2 - (1.11914)\,\delta(2)_2$$
$$-(2.34656)\{\delta(1)_3 + \delta(2)_3 + \delta(3)_3 + \delta(2)_5\} + (1.11914)\,\delta(1)_4$$
$$-(0.88442)\,\delta(2)_4 + (1.18461)\,\delta(1)_5 - (2.41922)\,\delta(2)_5$$

$$\Omega = \delta(2)_5 = -0.01934\,\delta(1)_1 + 0.02119\,\delta(1)_2 - 0.02715\,\delta(2)_2$$
$$-0.45828\,\delta(1)_3 - 0.45828\,\delta(2)_3 - 0.45828\,\delta(3)_3$$
$$+0.02715\,\delta(1)_4 - 0.01581\,\delta(2)_4 + 0.03156\,\delta(1)_5$$

$(M,1)_1 = -0.0193$, $(M,1)_3 = -0.4583$, $(M,1)_4 = +0.0271$
$(M,1)_2 = +0.0212$, $(M,2)_3 = -0.4583$, $(M,2)_4 = -0.0158$
$(M,2)_2 = -0.0271$, $(M,3)_3 = -0.4583$, $(M,1)_5 = +0.0316$

$$R = 0.6338$$

$(I,M) = -0.4563$, $(II,M) = -0.4583$, $(III,M) = -0.4424$

$$S = 0.2046$$
$$P = 2.331$$

welches das Gewicht des Winkels $(2)_5$ ist.

29.

Ferner

$$\Omega = \delta(2)_1 = -\delta(1)_3 - \delta(2)_3 - \delta(3)_3 - \delta(2)_5$$

und nach der Elimination von $\delta(2)_5$ durch die betr. Gleichung des vor. Art.

$(M,1)_1 = +0.0193$, $(M,1)_3 = -0.5417$, $(M,1)_4 = -0.0271$
$(M,1)_2 = -0.0212$, $(M,2)_3 = -0.5417$, $(M,2)_4 = +0.0158$
$(M,2)_2 = +0.0271$, $(M,3)_3 = -0.5417$, $(M,1)_5 = -0.0316$

$$R = 0.8840$$

$(I,M) = -0.5437$, $(II,M) = -0.5417$, $(III,M) = -0.5576$

$$S = 0.3000$$
$$P = 1.712$$

für das Gewicht des Winkels $(2)_1$. Hier finden wir wieder die Gewichte der beiden berechneten Winkel grösser als das Gewicht der beobachteten, und zwar das des Einen im Verhältniss wie

$$1 : 1,554$$

und das des Anderen wie

$$1 : 1,142$$

30.

Ferner wird

$$\log(1)(1') = \log(1)(2) + \log.\sin(1)_2 \sin\{(1)_3 + (2)_3 + (3)_3\} - \log.\sin(3)_3 \sin(2)_5$$

$$\Omega = +10.269\,\delta(1)_2 - 119.408\,\{\delta(1)_3 + \delta(2)_3 + \delta(3)_3\}$$
$$-17.667\,\delta(3)_3 - 262.56\,\delta(2)_5$$

und nach der Elimination von $\delta(2)_5$

$$(M,1)_1 = +5.078\,,\ (M,1)_3 = +0.914\,,\ (M,1)_4 = -7.127$$
$$(M,1)_2 = +4.706\,,\ (M,2)_3 = +0.914\,,\ (M,2)_4 = +4.152$$
$$(M,2)_2 = +7.127\,,\ (M,3)_3 = -16.753\,,\ (M,1)_5 = +8.287$$
$$R = 517{,}5$$
$$(I,M) = -6.969\,,\ (II,M) = +0.914\,,\ (III,M) = -3.221$$
$$S = 20.0$$
$$P = 0.002010$$

für das Gewicht des log. der Seite (1)(5), und dieses Gewicht liegt also zwischen den Gewichten der logg. der Seiten (2)(3) und (3)(4) nahe in der Mitte; es ist grösser wie das Gewicht der kürzeren Diagonale (2)(5). Da die Linie (1)(5) die längste ist, die man in der Figur von einem Dreieckpunkt zu einem andern ziehen kann, und durch zwei sehr kleine Winkel mit den weit kürzeren Dreiecksseiten (1)(3) und (3)(5) verbunden ist, so könnte man leicht im Voraus die Ansicht fassen, dass sowohl das Gewicht dieser Linie, wie die Gewichte der beiden genannten, anliegenden Winkel sehr klein werden müssten. Die vorstehenden Rechnungen geben aber ein entgegengesetztes Resultat, und zeigen also, wie sehr man sich in solchen, auf keine mathematische Untersuchungen gegründeten Ansichten irren kann.

31.

Es soll nun angenommen werden, dass ausser den bisher als beobachtet angenommenen Winkeln, auch der Winkel (4)(2)(5), der in der Figur mit $(3)_2$ bezeichnet worden ist, beobachtet sei. Diese Annahme fügt den drei bisher vorhandenen Bedingungsgleichungen eine vierte hinzu, die keine andere ist, wie die erste Gleichung des Art. 25. Da die Coefficienten der Variationen dieser Gleichung schon dort berechnet worden sind, so können wir das neue Täfelchen der Differentialquotienten sogleich aufstellen, zur einfacheren Behandlung dieser Gleichung sollen jedoch alle Coefficienten derselben mit der Zahl 40 dividirt werden. Somit erhalten wir das folgende Täfelchen.

r	s	$q(r.I)_s$	$q(r.II)_s$	$q(r.III)_s$	$\log q(r.IV)_s$	$q(r.IV)_s$
1	1	1	—	—	—	—
1	2	1	—	—	—	—
2		—	1	—	9.51708n	−0.3289
3		—	—	—	0.33429	+2.1592
1	3	—	—	1	9.55028n	−0.3550
2		—	1	—	9.40947	+0.2567
3		1	—	—	—	—
1	4	—	1	—	0.02411	+1.0571
2		—	—	1	0.02411	+1.0571
1	5	—	—	1	9.58255	+0.3824

Hieraus bekommt man folgende Werthe der Coefficienten der Endgleichungen,

$$(I,I) = 3\,,\quad (I,II) = 0\,,\quad (I,III) = 0\,,\quad (I,IV) = 0$$
$$(II,II) = 3\,,\quad (II,III) = 0\,,\quad (II,IV) = +\,0.9849$$
$$(III,III) = 3\,,\quad (III,IV) = +\,1.0845$$
$$(IV,IV) = 7.3434$$

und diese geben

$$(2)_1 = 0\,,\qquad (3)_1 = 0\,,\qquad (4)_1 = 0$$
$$(3)_2 = 0\,.\qquad (4)_2 = -\,(9.51627)$$
$$(4)_3 = -\,(9.55811)$$
$$(I,I) = 3\,,\ (II,II,1) = 3\,,\ (III,III,2) = 3\,.\ (IV,IV,3) = 6.6281$$

32.

Es ist klar, dass hierauf die Gewichte der Stücke des Dreiecks (1)(2)(3) sich nicht ändern können, da dieses Dreieck an der hinzugekommenen Bedingungsgleichung keinen Theil hat. Untersuchen wir aber die Gewichte einiger anderen Winkel und Seiten. Zuerst soll das Gewicht des Winkels $(3)_2$ berechnet werden. Hiefür wird

$$(M,3)_2 = 1\,,\ R = 1\,,\ (IV,M) = (IV,M,3) = +\,2.1592$$
$$S = 0.7034\,,\qquad P = 3.372$$

Dieses Gewicht hat sich durch die hinzugekommene Bedingungsgleichung im Verhältniss von

$$1 : 1{,}421$$

vergrössert.

33.

Für das Gewicht von $(3)_5$ könnten wir jetzt die Gleichung

$$\delta(3)_5 = \delta(3)_2 + \delta(1)_4 + \delta(2)_4 + \delta(1)_5$$

anwenden, aber es ist eben so richtig, und einfacher dieselbe Gleichung anzuwenden, die im Art. 26 nach der Elimination von $\delta(3)_2$ gedient hat, auch hier zu gebrauchen. Alle dort berechneten Zahlen bleiben bis auf S und P dieselben, es kommt aber

$$(IV,M) = +1.3049$$

hinzu, und hiemit werden

$$(I,M) = 0\ ,\ (II,M,1) = +0.5438\ ,\ (III,M,2) = +1.4977$$

wie dort, hingegen

$$(IV,M,3) = +0.5849\ ,\ S = 0.8979$$
$$P = 2.682$$

im Verhältniss von

$$1 : 1.138$$

grösser wie vorher.

34.

Berechnung des Gewichts des Winkels $(2)_2$.

$$(M,2)_1 = 1\ ,\ R = 1\ ,\ (II,M) = 1\ ,\ (IV,M) = -0.3289$$
$$(II,M,1) = 1\ ,\ (IV,M,3) = -0.6572\ ,\ S = 0.3985$$
$$P = 1.663$$

im Verhältniss von

$$1 : 1.108$$

grösser wie vorher.

35.

Gewicht des Winkels $(1)_4$.

$$(M,1)_4 = 1\ ,\ R = 1\ ,\ (II,M) = 1\ ,\ (IV,M) = +1.0571$$
$$(II,M,1) = 1\ ,\ (IV,M,3) = +0.7308\ ,\ S = 0.4139$$
$$P = 1.706$$

im Verhältniss von

$$1 : 1.137$$

grösser wie vorher.

36.

Gewicht der Seite (2)(5). Zu den Zahlen des Art. 27 kommt

$$(IV,M) = -49.52$$

hinzu, und es werden demzufolge

$$(I,M) = -8.293\ ,\ (II,M,1) = -34.126\ ,\ (III,M,2) = -72,660$$
$$R = 2800,6$$

gleichwie a. a. O., aber ausserdem

$$(IV, M, 3) = -12.04$$

und hiemit bekommt man

$$S = 2193.0$$
$$P = 0.001646$$

im Verhältniss von

$$1 : 1,036$$

grösser wie vorher.

37.

Gewicht der Seite (4)(5). Ausser den Zahlen des Art. 22 wird hier noch

$$(IV, M) = -29.13 \,,\; (IV, M, 3) = -28.73$$
$$S = 147.9$$
$$P = 0.000967$$

im Verhältniss von

$$1 : 1,120$$

grösser wie vorher. Man sieht hieraus, dass die neu hinzugekommene Bedingungsgleichung alle Gewichte vergrössert, und im gegenwärtigen Falle ist die Vergrösserung am Ansehnlichsten bei dem Winkel $(3)_2$, der als beobachteter Winkel hinzugekommen ist.

38.

Nehmen wir jetzt an, dass ausser den bisher als beobachtet betrachteten Winkeln, auch der Winkel $(2)(5)(3) = (3)_5$ beobachtet worden ist, und untersuchen wir wieder die Gewichte die hieraus hervorgehen. Die neue Bedingungsgleichung ist nun

$$0 = \delta(3)_2 + \delta(1)_4 + \delta(2)_4 + \delta(1)_5 - \delta(3)_5$$

und das Täfelchen der Differentialquotienten wird in Folge dessen das folgende

r	s	$q(r.I)_s$	$q(r.II)_s$	$q(r.III)_s$	$\log q(r.IV)_s$	$q(r.IV)_s$	$q(r.V)_s$
1	1	1	—	—	—	—	—
1	2	1	—	—	—	—	—
2		—	1	—	9.51708n	−0.3289	—
3		—	—	—	0.33429	+2.1592	1
1	3	—	—	1	9.55028n	−0.3550	—
2		—	1	—	9.40947	+0.2567	—
3		1	—	—	—	—	—
1	4	—	1	—	0.02411	+1.0571	1
2		—	—	1	0.02411	+1.0571	1
1	5	—	—	1	9.58255	+0.3824	1
3		—	—	—	—	—	−1

Die Coefficienten der Endgleichungen, die hieraus folgen, sind in der folgenden Tafel zusammengestellt,

i	(i,I)	(i,II)	(i,III)	(i,IV)	(i,V)
I	3	0	0	0	0
II		3	0	+ 0.9849	+ 1
III			3	+ 1.0845	+ 2
IV				7.3434	+ 4.6558
V					5

und hieraus bekommt man

$$(2)_1 = 0\,,\ (3)_1 = 0\,,\ (4)_1 = 0\,,\qquad (5)_1 = 0$$
$$(3)_2 = 0\,,\ (4)_2 = -(9.51627),\ (5)_2 = -(9.52288)$$
$$(4)_3 = -(9.55811),\ (5)_3 = -(9.82391)$$
$$(5)_4 = -(9.73546)$$
$$(I,I)=3,\ (II,II,1)=3,\ (III,III,2)=3,\ (IV,IV,3)=6.6281,\ (V,V,4)=1.3731$$

39.

Es sollen jetzt wieder die Gewichte derselben Stücke des Netzes berechnet werden, wie im vorhergehenden Falle.

Gewicht des Winkels $(3)_2$. Zu den Zahlenwerthen des Art. 32 kommt hinzu

$$(V,M) = 1$$

und hieraus folgen

$$(V,M,4) = -0{,}1742\,,\ S = 0{,}7255$$
$$P = 3.644$$

im Verhältniss von

$$1 : 1.081$$

grösser wie vorher.

40.

Gewicht des Winkels $(3)_5$. Hiefür bekommen wir jetzt, nachdem dieser Winkel zu den beobachteten gehört,

$$(M,3)_5 = 1\,,\ R = 1\,,\ (V,M) = (V,M,4) = -1\,,\ S = 0.7283$$
$$P = 3{:}681$$

im Verhältniss von

$$1 : 1.373$$

grösser wie vorher.

41.

Gewicht des Winkels $(2)_2$. Hier findet man ausser den Zahlenwerthen des Art. 34

$$(V,M) = 0$$
$$(V,M,4) = + 0.0240\ ,\ S = 0.3989$$
$$P = 1.664$$

Der Zuwachs dieses Gewichts ist sehr klein.

42.

Gewicht des Winkels $(1)_4$. Zu den Zahlenwerthen des Art. 35 kommt hinzu

$$(V,M) = 1$$
$$(V,M,4) = + 0.2702\ ,\ S = 0.4671$$
$$P = 1.877$$

im Verhältniss von

$$1 : 1.100$$

grösser wie vorher.

43.

Gewicht der Seite (2)(5). Zu Art. 36 kommt hinzu

$$(V,M) = - 74.48$$
$$(V,M,4) = - 8.11\ ,\ S = 2240.9$$
$$P = 0.001786$$

im Verhältniss von

$$1 : 1.086,$$

grösser wie vorher.

44.

Gewicht der Seite (4)(5). Zu den Zahlen des Art. 37 kommen hinzu

$$(V,M) = - 28.46$$
$$(V,M,4) = - 12.10\ ,\ S = 254.5$$
$$P = 0.001078$$

im Verhältniss von

$$1 : 1.115$$

grösser wie vorher. Die zweiseitige Beobachtung der Diagonale hat also hier die Gewichte, die aus der einseitigen Beobachtung derselben hervorgehen, mit Ausnahme des Gewichts der hinzugekommenen Beobachtung, nur wenig vergrössert.

45.

Um endlich auch die Wirkung einer Bedingungsgleichung numerisch darlegen zu können, in welcher sehr kleine Winkel vorkommen, soll noch angenommen werden, dass der Winkel (5)(1)(3) = $(2)_1$ gemessen worden ist, welcher nach dem Art. 28 nur $5^0\ 25'$ beträgt.

Die Bedingungsgleichung, die hieraus entsteht, ist schon im Art. 28 aufgestellt, und das neue Täfelchen der Differentialquotienten wird daher, nachdem die neue Bedingungsgleichung mit der Zahl 200 dividirt und $\delta(2)_5$ daraus eliminirt worden ist, das folgende.

r	s	$q(r.I)_s$	$q(r.II)_s$	$q(r.III)_s$	$\log q(r.IV)_s$	$q(r.IV)_s$	$q(r.V)_s$	$\log q(r.VI)_s$	$q(r.VI)_s$
1	1	1	—	—	—	—	—	8.67090*n*	— 0.0469
2		—	—	—	—	—	—	0.38440	+ 2.4233
1	2	1	—	—	—	—	—	8.71050	+ 0.0513
2		—	1	—	9.51708*n*	— 0.3289	—	8.81811*n*	— 0.0658
3		—	—	—	0.33429	+ 2.1592	1	—	—
1	3	—	—	1	9.55028*n*	— 0.3550	—	0.11819	+ 1.3128
2		—	1	—	9.40947	+ 0.2567	—	0.11819	+ 1.3128
3		1	—	—	—	—	—	0.11819	+ 1.3128
1	4	—	1	—	0.02411	+ 1.0571	1	8.81811	+ 0.0658
2		—	—	1	0.02411	+ 1.0571	1	8.58339*n*	— 0.0383
1	5	—	—	1	9.58255	+ 0.3824	1	8.88358	+ 0.0765
3		—	—	—	—	—	—1	—	—

Zu den Coefficienten der Endgleichungen des Art. 38 kommen jetzt die folgenden hinzu.

$$(I,VI) = +\ 1.3172\ ,\ (II,VI) = +\ 1.3128\ ,\ (III,VI) = +\ 1.3510$$
$$(IV,VI) = -\ 0.0492\ ,\ (V,VI) = +\ 0.1040\ ,\ (VI,VI) = \ 11.0631$$

und die für die folgenden Rechnungen erforderlichen Hülfsgrössen sind in vollständiger Zusammenstellung die folgenden.

$$(2)_1 = 0, (3)_1 = 0, (4)_1 = 0\ ,\quad (5)_1 = 0\ ,\quad (6)_1 = -(9.64254)$$
$$(3)_2 = 0, (4)_2 = -(9.51627), (5)_2 = -(9.52288), (6)_2 = -(9.64107)$$
$$(4)_3 = -(9.55811), (5)_3 = -(9.82391), (6)_3 = -(9.65354)$$
$$(5)_4 = -(9.73546), (6)_4 = +(9.16475)$$
$$(6)_5 = +(9.71209)$$
$$(I,I) = 3\ ,\ (II,II,1) = 3\ ,\ (III,III,2) = 3$$
$$(IV,IV,3) = 6.6281\ ,\ (V,V,4) = 1.3731\ ,\ (VI,VI,5) = 8.7956$$

46.

Berechnen wir nun wieder die Gewichte derselben Stücke des Dreiecksnetzes, wie vorher, aber mit Hinzufügung der Stücke des Dreiecks (1)(2)(3).

Gewicht des Winkels $(1)_1$. Hier erhalten wir

$$\Omega = \delta(1)_1 \ , \ (M,1)_1 = 1$$

und alle übrigen Grössen dieser Gattung sind Null.
Ferner

$$R = 1$$

$$(I,M) = 1 \ , \ (VI,M) = -0.0469$$

und hieraus

$$(VI,M,5) = -0.4859 \ , \ S = 0.3601$$

$$P = 1.563$$

im Verhältniss von 1 : 1.042 grösser wie das ursprüngliche Gewicht.

47.

Gewicht des Winkels $(1)_2$.

$$(M,1)_2 = 1 \ , \ (I,M) = 1 \ , \ (VI,M) = +0.0513 \ , \ R = 1$$

$$(VI,M,5) = -0.3877 \ , \ S = 0.3504$$

$$P = 1.540$$

im Verhältniss von 1 : 1.037 grösser wie das ursprüngliche Gewicht. Es ist leicht einzusehen, dass die Gewichte dieser beiden Winkel durch die hinzugekommene Beobachtung des Winkels $(2)_1$ nicht sonderlich vergrössert werden können.

48.

Gewicht des Winkels $(3)_3$. Man findet hier

$$(M,3)_3 = 1 \ , \ (I,M) = 1 \ , \ (VI,M) = +1.3128 \ , \ R = 1$$

$$(VI,M,5) = +0.8738 \ , \ S = 0.4201$$

$$P = 1.725$$

im Verhältniss von 1 : 1.150 grösser wie das ursprüngliche Gewicht. Die Vergrösserung dieses Gewichts ist schon bedeutender, wie die der beiden vorher betrachteten.

49.

Gewicht des hinzugekommenen, beobachteten Winkels $(2)_1$. Hier sind

$$(M,2)_1 = 1 \ , \ (VI,M) = (VI,M,5) = +2.4233$$

$$R = 1 \ , \ S = 0.6676$$

$$P = 3.009$$

im Verhältniss von 1 : 1.758 grösser wie das ursprüngliche, im Art. 29 berechnete, Gewicht. Die Vergrösserung des Gewichts dieses kleinen Winkels ist also bedeutend.

50.

Knüpfen wir hieran sogleich die Berechnung des Gewichts des bis jetzt noch nicht beobachteten Winkels $(2)_5$, der zufolge der Art. 28 $= 4^0 45'$ ist. Wir könnten hier zur Berechnung die Gleichung für $\Omega = \delta(2)_5 =$ etc. des Art. 28 anwenden, allein es ist einfacher sich der folgenden zu bedienen,

$$\Omega = \delta(2)_1 + \delta(1)_3 + \delta(2)_3 + \delta(3)_3$$

die auf einfache Weise aus dem Dreiecke (1)(3)(5) entspringt. Diese Gleichung giebt

$$(M,2)_1 = 1\ ,\ (M,1)_3 = 1\ ,\ (M,2)_3 = 1\ ,\ (M,3)_3 = 1\ ,\ R = 4$$

Ferner

$$(I,M) = 1\ ,\ (II,M) = 1\ ,\ (III,M) = 1\ ,\ (IV,M) = -0.0983,\ (V,M) = 0$$
$$(VI,M) = +6.3617$$

und hieraus

$$(II,M,1) = 1\ ,\ (III,M,2) = 1\ ,\ (IV,M,3) = -0.7881,$$
$$(V,M,4) = -0.5715,\ (VI,M,5) = +4.6251\ ,\ S = 3.7636$$
$$P = 4.231$$

im Verhältniss von 1 : 1.814 grösser wie das im Art. 28 berechnete ursprüngliche Gewicht dieses Winkels. Zu bemerken ist hier, dass wieder nicht nur das Gewicht des berechneten Winkels $(2)_5$ grösser ist wie das des beobachteten $(2)_1$, sondern das Verhältniss der Vergrösserung desselben grösser ist, wie das jenes.

51.

Zur Berechnung des Gewichts des log. der Seite (1)(5) dient wieder die im Art. 30 erhaltene Gleichung, nachdem die Variation $\delta(2)_5$ daraus eliminirt worden ist. Dieses ist a. a. O. schon geschehen, und die dortigen numerischen Werthe gelten auch hier, nur dass

$$(IV,M) = -8.748\ ,\ (V,M) = -11.262\ ,\ (VI,M) = -21.320$$

hinzu kommen. Es werden nun hier

$$(I,M) = -6.969\ ,\ (II,M,1) = +0.914\ ,\ (III,M,2) = -3.221$$
$$(IV,M,3) = -7.884\ ,\ (V,M,4) = -5.133\ ,\ (VI,M,5) = -21.009$$
$$S = 98.7$$
$$P = 0.002388$$

Dieses Gewicht hat sich im Verhältniss von 1 : 1.188 gegen das a. a. O. berechnete vergrössert. Also ungeachtet der kleinen Winkel, auf welchen die neu hinzugekommene Bedingungsgleichung beruht, hat diese doch

wesentlich zur Vergrösserung der Gewichte der zunächst damit in Verbindung stehenden Dreiecksstücke beigetragen.

52.

Gewicht des Winkels $(3)_2$. Zu den Zahlenangaben der Artt. 32 und 39 kommt hinzu

$$(VI,M) = 0$$

und hiemit werden

$$(IV,M,3) = + 2.1592\,,\ (V,M,4) = - 0.1742\,,\ (VI,M,5) = + 0.2257$$

$$S = 0.7313$$

$$P = 3.726$$

und das Verhältniss der Vergrösserung von P gegen die Bestimmung des Art. 39 wie 1 : 1.022.

53.

Gewicht des Winkels $(3)_5$. Zu den Zahlenwerthen des Art. 40 kommt hinzu

$$(VI,M) = 0$$

und hiemit

$$(V,M,4) = - 1\,,\ (VI,M,5) = - 0.5154$$

$$S = 0.7585$$

$$P = 4.141$$

mit dem Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.125 gegen die Bestimmung des Art. 40.

54.

Gewicht des Winkels $(2)_2$. Zu den Artt. 34 und 41 kommt hinzu

$$(VI,M) = - 0.0658$$

also

$$(II,M,1) = 1\,,\ (IV,M,3) = - 0.6572\,,\ (V,M,4) = + 0.0240$$

$$(VI,M,5) = - 0.5871\,,\ S = 0.4381$$

$$P = 1.780$$

mit dem Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.070 gegen die Bestimmung des Art. 41.

55.

Gewicht des Winkels $(1)_4$. Zu den Angaben der Artt. 35 und 42 kommt hinzu

$$(VI,M) = + 0.0658$$

also

$$(II,M,1) = 1 \ , \ (IV,M,3) = + 0.7308 \ , \ (V,M,4) = + 0.2702$$
$$(VI,M,5) = - 0.1260 \ , \ S = 0.4689$$
$$P = 1.883$$

mit dem Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.003 gegen die Bestimmung des Art. 42.

56.

Gewicht des log. der Seite (2)(5). Zu den Artt. 36 und 43 kommt hinzu

$$(VI,M) = - 60.68$$

also

$$(I,M) = - 8.293, \ (II,M,1) = - 34.126, \ (III,M,2) = - 72.660$$
$$(IV,M,3) = - 12.04, \ (V,M,4) = - 8.11 \ , \ (VI,M,5) = - 14.97$$
$$S = 2266.4$$
$$P = 0.001872$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1,048, gegen die Bestimmung des Art. 43.

57.

Gewicht des log. der Seite (4)(5). Zu den Artt. 37 und 44 kommt hinzu

$$(VI,M) = - 7.91$$

hiemit

$$(I,M) = - 8.29, \ (II,M,1) = 0 \ , \ (III,M,2) = - 1.10$$
$$(IV,M,3) = - 28.73, \ (V,M,4) = - 12.10, \ (VI,M,5) = - 14.21$$
$$S = 277.5$$
$$P = 0.001106$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.026 gegen Art. 44.

58.

Schliesslich soll angenommen werden, dass auch der Winkel $(2)_5$ beobachtet worden ist, wodurch den bisherigen Bedingungsgleichungen die folgende hinzugefügt werden muss.

$$(2)_1 + (1)_3 + (2)_3 + (3)_3 + (2)_5 = 180^0$$

Die Tafel des Art. 45 bekommt in Folge dessen die folgende Zusatzcolumne.

r	s	$q(r, VII)$
1	1	—
2		1
1	2	—
2		—
3		—
1	3	1
2		1
3		1
1	4	—
2		—
1	5	—
2		1
3		—

Zu den Coefficienten der Endgleichungen kommen hinzu

$(I, VII) = 1\ ,\ (II, VII) = 1\ ,\ (III, VII) = 1\ ,\ (IV, VII) = -\ 0.0983$

$(V, VII) = 0\ ,\ (VI, VII) = +\ 6.3617\ ,\ (VII, VII) = 5$

und zu den Hülfsgrössen die folgenden

$(7)_1 = -\ (9.52288)\ ,\ (7)_2 = -\ (9.52288)\ ,\ (7)_3 = -\ (9.52288)$

$(7)_4 = +\ (9.07519)\ ,\ (7)_5 = +\ (9.61924)\ ,\ (7)_6 = -\ (9.72084)$

$$(VII, VII, 6)\ 1.2366$$

Es sollen nun wieder die Gewichte derselben Dreiecksstücke berechnet werden wie vorher.

59.

Gewicht des Winkels $(1)_1$. Zu den Zahlenangaben des Art. 46 kommen hinzu

$$(VII, M) = 0\ ,\ (VII, M, 6) = -\ 0.0778$$
$$S = 0.3650$$
$$P = 1.575$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.009, gegen die Bestimmung des Art. 46.

60.

Gewicht des Winkels $(1)_2$. Zum Art. 47 kommen hinzu

$$(VII, M) = 0\ ,\ (VII, M, 6) = -\ 0.1295$$
$$S = 0.3640$$
$$P = 1.572$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.021, gegen Art. 47.

61.

Gewicht des Winkels $(3)_3$. Zum Art. 48 kommen hinzu

$$(VII,M) = 1\ ,\ (VII,M,6) = +\ 0.2073$$
$$S = 0.4549$$
$$P = 1.834$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.064 gegen Art. 48.

62.

Gewicht des Winkels $(2)_1$. Zum Art. 49 kommen hinzu

$$(VII,M) = 1\ ,\ (VII,M,6) = -\ 0.2742$$
$$S = 0.7284$$
$$P = 3.682$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.223 gegen Art. 49.

63.

Gewicht des hinzugekommenen, beobachteten Winkels $(2)_5$. Zum Art. 50 kommen hinzu

$$(VII,M) = (VII,M,6) = 1$$
$$S = 0.8088$$
$$P = 5.230$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.266, gegen Art. 50.

64.

Berechnung des Gewichts des log. der Seite (1)(5). Zum Art. 51 kommen hinzu

$$(VII,M) = -\ 14.925\ ,\ (VII,M,6) = -\ 3.859$$
$$S = 110.7$$
$$P = 0.002458$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.030 gegen Art. 51.

65.

Gewicht des Winkels $(3)_2$. Zum Art. 52 kommen hinzu

$$(VII,M) = 0\ ,\ (VII,M,6) = +\ 0.0656$$
$$S = 0.7347$$
$$P = 3.770$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.012 gegen Art. 52.

66.

Gewicht des Winkels $(3)_5$. Zum Art. 53 kommen hinzu

$$(VII,M) = 0\ ,\ (VII,M,6) = -\ 0.1452$$
$$S = 0.7756$$
$$P = 4.457$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.076 gegen Art. 53.

67.

Gewicht des Winkels $(2)_2$. Zum Art. 54 kommen hinzu

$$(VII,M) = 0\ ,\ (VII,M,6) = +\ 0.2405$$
$$S = 0.4849$$
$$P = 1.941$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.091 gegen Art. 54.

68.

Gewicht des Winkels $(1)_4$. Zum Art. 55 kommen hinzu

$$(VII,M) = 0\ ,\ (VII,M,6) = +\ 0.2654$$
$$S = 0.5259$$
$$P = 2.109$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.120 gegen Art. 55.

69.

Gewicht des log. der Seite (2)(5). Zum Art. 56 kommen hinzu

$$(VII,M) = -\ 43.82\ ,\ (V,M,6) = -\ 2.39$$
$$S = 2271.0$$
$$P = 0.001888$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.009 gegen Art. 56. Ich habe die Berechnung dieses Gewichts eben so behandelt, wie die der übrigen Gewichte. Es liegt hier die Differentialgleichung des Art. 27 zu Grunde, in welcher die Variationen derjenigen Winkel eliminirt worden sind, die dort zu den nicht beobachteten zählten. Allein hier hätte auch die Gleichung

$$\Omega = +\ 9.374\,\delta(1)_1 - 12.156\,\{\delta(1)_3 + \delta(2)_3\}$$
$$-\ 17.667\,\delta(3)_3 - 40.396\,\delta(3)_5$$

desselben Artikels angewandt werden können, da jetzt alle in derselben vorkommenden Winkel zu den beobachteten zählen. Um die Uebereinstimmung der auf beide Arten berechneten Resultate zu zeigen, soll hier noch dasselbe Gewicht mit Zugrundelegung der vorstehenden Gleichung berechnet werden. Man bekommt jetzt

$$(M,1)_1 = + \ 9.374 \ , \ (M,3)_3 = - 17.667$$
$$(M,1)_3 = - 12.156 \ , \ (M,3)_5 = - 10.396$$
$$(M,2)_3 = - 12.156 \ ,$$

und hieraus zuerst

$$R = 2327.3$$

ferner

$$(I,M) = - \ 8.293 \ , \ (V,M) = + 10.396$$
$$(II,M) = - 12.156 \ , \ (VI,M) = - 55.56$$
$$(III,M) = - 12.156 \ , \ (VII,M) = - 11.979$$
$$(IV,M) = + \ 1.195$$

und hieraus

$$(II,M,1) = - 12.156 \ , \ (V,M,4) = + 17.341$$
$$(III,M,2) = - 12.156 \ , \ (VI,M,5) = - 15.327$$
$$(IV,M,3) = + \ 9.580 \ , \ (VII,M,6) = - \ 2.212$$
$$S = 1797.8$$
$$P = 0.001888$$

wie oben.

70.

Gewicht des log. der Seite (4)(5). Zum Art. 57 kommen hinzu

$$(VII,M) = - 3.47 \ , \ (VII,M,6) = - 1.33$$
$$S = 278.9$$
$$P = 0.001107$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.001 gegen Art. 57.

71.

Ich werde nun noch die Gewichte der Seiten (2)(3) und (3)(4) mit Zuziehung aller Bedingungsgleichungen berechnen, die ursprünglich zwar aufgenommen, aber weiterhin übergangen worden sind.

Gewicht des log. der Seite (2)(3). Die Grundgleichung und der Werth $R = 400.1$ bleiben wie im Art. 20, und ausserdem ergeben sich

$$(I,M) = - 8.29 \ , \ (VI,M) = - 23.64 \ , \ (VII,M) = - 17.67$$

woraus

$$(VI,M,5) = - 20.00 \ , \ (VII,M,6) = - 4.40$$
$$S = 84.1$$
$$P = 0.003164$$

hervorgehen. Das Vergrösserungsverhältniss wird 1 : 1.193 gegen Art. 20.

72.

Gewicht des log. der Seite (3)(4). Die Grundgleichung und der Werth $R = 746.5$ bleiben wieder wie im Art. 21, und ausserdem ergeben sich

$$(I,M) = -8.29\ ,\ (IV,M) = -18.24\ ,\ (V,M) = -13.16$$
$$(VI,M) = -25.38\ ,\ (VII,M) = -17.67$$

woraus die Werthe

$$(IV,M,3) = -18.24\ ,\ (V,M,4) = -3.24$$
$$(VI,M,5) = -26.08\ ,\ (VII,M,6) = -4.72$$
$$S = 176.3$$
$$P = 0.001754$$

hervorgehen. Das Vergrösserungsverhältniss wird 1 : 1.269 gegen Art. 21.

73.

Im Vorhergehenden sind mit Ausnahme der beiden oben berechneten Gewichte die Vergrösserungsverhältnisse von Stufe zu Stufe angesetzt worden, hier sollen dagegen dieselben aus den ursprünglichen und den schliesslichen Werthen berechnet angesetzt werden, um die volle Wirkung der angeführten zwei Diagonalen in das ursprünglich betrachtete Dreiecksnetz erkennen zu können.

Winkel	Ursprüngliches Gewicht		Schliessliches Gewicht		Vergrösserungsverhältniss
$(1)_1$,	Art. 18	1.5,	Art. 59	1.575	1 : 1.050
$(1)_2$	- 18	1.5,	- 60	1.572	1 : 1.048
$(3)_3$	- 18	1.5,	- 61	1.834	1 : 1.222
$(2)_1$	- 29	1.712,	- 62	3.682	1 : 2.150
$(2)_5$	- 28	2.331,	- 63	5.230	1 : 2.244
$(3)_2$	- 25	2.372,	- 65	3.770	1 : 1.589
$(3)_5$	- 26	2.356,	- 66	4.457	1 : 1.891
$(2)_2$	- 18	1.5,	- 67	1.941	1 : 1.294
$(1)_4$	- 18	1.5,	- 68	2.109	1 : 1.406
Seiten					
log. (1)(5)	- 30	0.002010,	- 64	0.002458	1 : 1.223
- (2)(5)	- 27	0.001588,	- 69	0.001888	1 : 1.189
- (4)(5)	- 22	0.000863,	- 70	0.001107	1 : 1.283
- (3)(4)	- 21	0.001382,	- 72	0.001754	1 : 1.269
- (2)(3)	- 20	0.002652,	- 71	0.003164	1 : 1.193

Man erkennt hieraus ohne Weiteres, auf welche Dreiecksstücke die Beobachtung der zwei Diagonalen eine grössere oder kleinere Wirkung ausgeübt hat. Es liesse sich in der Figur noch eine Diagonale einführen, aber da ich meine, dass die bisher betrachteten dem Zwecke gnügen, so unterlasse ich dieses.

74.

Wir können aus dem Vorhergehenden schon einige Schlüsse ziehen, die allgemein statt finden.

1) Jede neu hinzukommende Bedingungsgleichung vergrössert die Gewichte, sei sie eine Winkel- oder sei sie eine Seitengleichung, und seien die Coefficienten derselben wie sie wollen.

2) In Folge dessen ist nicht unbedingt nothwendig in jedem Dreiecke alle drei Winkel zu messen, wenn nur statt der fehlenden Winkelgleichungen eine entsprechende Anzahl von Seitengleichungen vorhanden sind.

3) Wo keine Diagonalen eingeschnitten werden können, ist die Messung aller drei Winkel jedes Dreiecks unerlässlich.

4) In den Bedingungsgleichungen sind die kleinsten Winkel zulässig.

5) Seitengleichungen mit sehr kleinen Winkeln üben auf die Vergrösserung einiger Gewichte grossen Einfluss aus, der Einfluss überhaupt erstreckt sich aber nicht weit über den Bereich der Bedingungsgleichung hinaus.

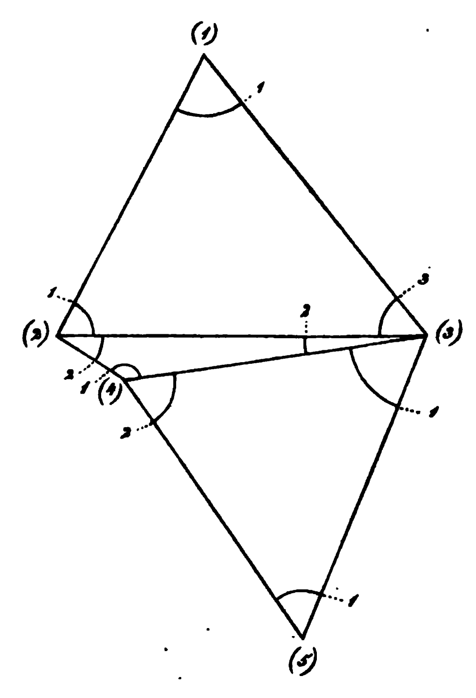
6) Seitengleichungen ohne sehr kleine Winkel vergrössern im Allgemeinen die Gewichte der Winkel, von welchen sie abhängen, weniger, ihre Wirkung erstreckt sich aber auf einen grösseren Theil des Dreiecksnetzes.

7) Zwei einseitig beobachtete Diagonalen wirken in der Regel vortheilhafter ein, wie eine zweiseitig beobachtete.

8) Da die Gewichte der Dreiecksseiten abnehmen, je weiter sie von der Grundlinie entfernt liegen, oder je mehr Dreiecke bei ihrer Berechnung zu durchlaufen sind, so ist es von bedeutendem Vortheil, in angemessenen Entfernungen von einander, so viele Grundlinien zu messen, wie die Umstände zulassen.

75.

Wir wollen jetzt die drei an einander gereihten Dreiecke der folgenden Figur betrachten.



Die Winkel, die eben so bezeichnet sind, wie in der vorhergehenden Figur, sollen hier die folgenden Werthe haben.

$$(1)_1 = 66^0,\quad (2)_2 = 33^0,\quad (1)_3 = 60^0$$
$$(1)_2 = 64\,,\quad (2)_3 = 10\,,\quad (2)_4 = 50$$
$$(3)_3 = 50\,,\quad (1)_4 = 137\,,\quad (1)_5 = 70$$

76.

Die Bedingungsgleichungen und deren Differentialquotienten werden nun wieder dieselben wie im Art. 16, nemlich die letzteren:

r	s	$q(r,I)_s$	$q(r,II)_s$	$q(r,III)_s$
1	1	1	—	—
1	2	1	—	—
2		—	1	—
1	3	—	—	1
2		—	1	—
3		1	—	—
1	4	—	1	—
2		—	—	1
1	5	—	—	1

Die Divisoren werden auch dieselben, nemlich:

$$(I,I) = 3\,,\ (II,II) = 3\,,\ (III,III) = 3$$

und die Gewichte aller Winkel erhalten wieder den gemeinschaftlichen Werth 1,5. Da das erste Dreieck der vorstehenden Figur dieselben Winkel hat, wie das erste Dreieck der Figur des Art. 15, so wird wieder das Gewicht des log. der Seite (2)(3) eben so wie im Art. 20, nemlich

$$= 0.002652$$

aber die Gewichte der Seiten der anderen Dreiecke werden anders.

77.

Gewicht des log. der Seite (3)(4). Die Grundgleichung ist dieselbe wie im Art. 21, aber die numerischen Werthe der Differentialquotienten werden zum Theil anders, und zwar

$$\Omega = +\ 9.38\delta(1)_1 + 32.43\delta(2)_2 - 17.67\delta(3)_3 + 22.58\delta(1)_4$$

Hier bekommt man also

$$(M,1)_1 = +\ 9.38\ ,\ (M,3)_3 = -\ 17.67$$
$$(M,2)_2 = +\ 32.43\ ,\ (M,1)_4 = +\ 22.58$$
$$R = 1961.4$$

ferner

$$(I,M) = -\ 8.29\ ,\quad (II,M) = +\ 55.01\ ,\quad (III,M) = 0$$
$$S = 1031.9$$
$$P = 0.001076$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 0,779 gegen Art. 21. Das Gewicht der oben genannten Seite (3)(4) der Figur des Art. 75 ist also wesentlich kleiner, als das Gewicht der gleichbenannten Seite der Figur des Art. 15.

78.

Gewicht des log. der Seite (4)(5). Die Grundformel ist hier die des Art. 22. und die Differentialgleichung derselben wird jetzt

$$\Omega = +\ 9.38\delta(1)_1 + 32.43\delta(2)_2 + 12.16\delta(1)_3$$
$$-17.67\delta(3)_3 + 22.58\delta(1)_4 + \ 7.67\delta(1)_5$$

also

$$(M,1)_1 = +\ 9.38\ ,\ (M,3)_3 = -\ 17.67$$
$$(M,2)_2 = +\ 32.43\ ,\ (M,1)_4 = +\ 22.58$$
$$(M,1)_3 = +\ 12.16\ ,\ (M,1)_5 = -\ 7.67$$
$$R = 2168.0$$
$$(I,M) = -\ 8,29\ ,\quad (II,M) = +\ 55.01\ ,\quad (III,M) = +\ 4.49$$
$$S = 1038.6$$
$$P = 0.000813$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 0,942 gegen Art. 22. Das Gewicht wird also hier wieder kleiner als das der gleichbenannten Seite der Figur des Art. 15, das Verhältniss der Verkleinerung ist jedoch nicht so gross, wie im vor. Art.

79.

Wir wollen jetzt die Verhältnisse des zweiten Dreiecks der Figur des Art. 75 so ändern, dass der Winkel $(2)_2$ grösser wird. Es seien nun die zwei Winkel dieses Dreiecks

$$(2)_2 = 75^0\,,\quad (1)_4 = 95^0$$

während alle übrigen Winkel unverändert bleiben. Untersuchen wir jetzt die Gewichte der beiden vorher betrachteten Seiten.

80.

Gewicht des log. der Seite (3)(4). Die Differentialgleichung wird jetzt

$$\Omega = +\,9.38\delta(1)_1 + 5.64\delta(2)_2 - 17.67\delta(3)_3 + 1.84\delta(1)_4$$

also

$$(M,1)_1 = +\,9.38\,,\quad (M,3)_3 = -\,17.67$$
$$(M,2)_2 = +\,5.64\,,\quad (M,1)_4 = +\,1.84$$
$$R = 435.3$$
$$(I,M) = -\,8.29\,,\quad (II,M) = +\,7.48\,,\quad (III,M) = 0$$
$$S = 41.6$$
$$P = 0.002540$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.838 gegen Art. 21. Das Vergrösserungsverhältniss ist also hier bedeutend im Vergleich mit der Figur des Art. 15.

81.

Gewicht des log. der Seite (4)(5). Die Differentialgleichung wird jetzt

$$\Omega = +\,9.38\delta(1)_1 + 5.64\delta(2)_2 + 12.16\delta(1)_3$$
$$-\,17.67\delta(3)_3 + 1.84\delta(1)_4 - 7.67\delta(1)_5$$

also

$$(M,1)_1 = +\,9.38\,,\quad (M,3)_3 = -\,17.67$$
$$(M,2)_2 = +\,5.64\,,\quad (M,1)_4 = +\,1.84$$
$$(M,1)_3 = +\,12.16\,,\quad (M,1)_5 = -\,7.67$$
$$R = 641.9$$
$$(I,M) = -\,8.29\,,\quad (II,M) = +\,7.48\,,\quad (III,M) = +\,4.49$$

$$S = 48.3$$
$$P = 0.001685$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1,952 gegen Art. 22. Also auch das Gewicht dieser Seite hat im Vergleich mit dem der gleichbenannten Seite der Figur des Art. 15 eine bedeutende Vergrösserung erhalten.

82.

Wir können aus den vorstehenden Untersuchungen einen wichtigen Schluss ziehen.

«Die alte Vorschrift, dass in den an einander gereihten Dreiecken «eines Dreiecksnetzes kein Winkel vorkommen dürfe, welcher kleiner als «24° oder bez. 30° ist, ist einer bedeutenden Erweiterung fähig.»

Und zwar:

«In an einander gereihten Dreiecken ist auch der kleinste Winkel «statthaft, vorausgesetzt dass in demselben Dreieck kein zweiter einiger «Maassen kleiner Winkel vorkommt, und sich die Fortsetzung des Dreiecksnetzes an die längere Seite knüpft.»

Dieser Satz gilt auch dann wenn mehrere Dreiecke, die Einen kleinen Winkel enthalten, an einander gereiht sind.

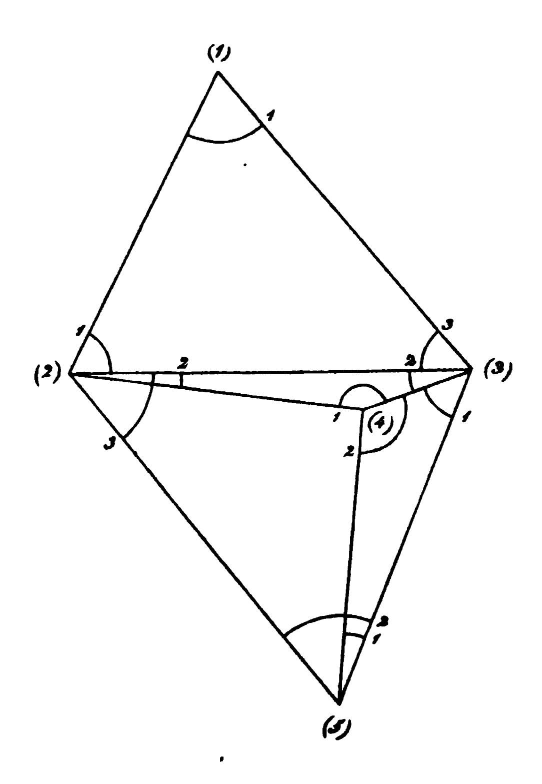
83.

Um den Nachtheil mehr hervor zu heben, welcher entsteht, wenn ein angereihtes Dreieck zwei kleine Winkel hat, und man zugleich die Fortsetzung des Netzes an die kleinste Seite knüpft, soll das folgende Beispiel dienen.

Denkt man sich in der nachfolgenden Figur vorläufig die Seite (2)(5) weg, so besteht sie wieder aus drei an einander gereihten Dreiecken, in welchen die Winkel die folgenden Werthe haben.

$$(1)_1 = 66^0,\quad (2)_2 = 5^0,\quad (1)_3 = 55^0$$
$$(1)_2 = 64\,,\quad (2)_3 = 15\,,\quad (2)_4 = 107$$
$$(3)_3 = 50\,,\quad (1)_4 = 160\,,\quad (1)_5 = 18$$

Es wird nun wieder das Gewicht jedes Winkels = 1,5, und da das erste Dreieck dieselben Winkel hat, wie in den vorhergehenden Figuren, so wird auch wieder das Gewicht des log. der Seite (2)(3) = 0.002652. Aber die Gewichte der übrigen Seiten werden nun sehr klein.



84.

Gewicht des log. der Seite (3)(4). Die Differentialgleichung wird jetzt

$$\Omega = +\ 9{,}38\delta(1)_1 + 240.66\delta(2)_2 - 17.67\delta(3)_3 + 57.85\delta(1)_4$$

also

$$(M,1)_1 = +\ 9.38\ ,\quad (M,3)_3 = -\ 17.67$$
$$(M,2)_2 = +240.66\ ,\quad (M,1)_4 = +\ 57.85$$
$$R = 61663$$
$$(I,M) = -\ 8.29\ ,\quad (II,M) = +\ 298.51\ ,\quad (III,M) = 0$$
$$S = 29726$$
$$P = 0{,}0000313$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 0.023 gegen Art. 21, und dasselbe 1 : 0.012 gegen Art. 80.

85.

Gewicht des log. der Seite (4)(5). Die Differentialgleichung wird jetzt

$$\Omega = +\ 9.38\delta(1)_1 + 240.66\delta(2)_2 + 14.74\delta(1)_3$$
$$-\ 17.67\delta(3)_3 + 57.85\delta(1)_4 - 64.80\delta(1)_5$$

also

$$(M,1)_1 = + 9.38\,, \quad (M,3)_3 = -\ 17.67$$
$$(M,2)_2 = +240.66\,, \quad (M,1)_4 = +\ 57.85$$
$$(M,1)_3 = +\ 14.74\,, \quad (M,1)_5 = -\ 64.80$$
$$R = 66080$$
$$(I,M) = -\ 8.29\,, \quad (II,M) = +\ 298.51\,, \quad (III,M) = -\ 50.06$$
$$S = 30561$$
$$P = 0.0000282$$

Vergrösserungsverhältniss $1:0.033$ gegen Art. 22, und dasselbe $1:0.017$ gegen Art. 81.

86.

Es soll noch das Gewicht der Seite (3)(5) berechnet werden. Die Grundgleichung ist hier

$$\log (3)(5) = \log (1)(2) + \log.\sin (1)_1 \sin (2)_2 \sin (2)_4$$
$$- \log.\sin (3)_3 \sin (1)_4 \sin (1)_5$$

und die Differentialgleichung

$$\Omega = + 9.38\delta(1)_1 + 240.66\delta(2)_2 - 17.67\delta(3)_3$$
$$+ 57.85\delta(1)_4 - 6.44\delta(2)_4 - 64.80\delta(1)_5$$

also

$$(M,1)_1 = + 9.38\,, \quad (M,1)_4 = +\ 57.85$$
$$(M,2)_2 = +240.66\,, \quad (M,2)_4 = -\ 6.44$$
$$(M,3)_3 = -\ 17.67\,, \quad (M,1)_5 = -\ 64.80$$
$$R = 65904$$
$$(I,M) = -\ 8.29\,, \quad (II,M) = +\ 298.51\,, \quad (III,M) = -\ 71.24$$
$$S = 31418$$
$$P = 0.0000290$$

Diese drei Seiten bekommen also im gegenwärtigen Falle sehr kleine Gewichte, wie sich voraussehen liess.

87.

Es kann von Interesse sein in Erfahrung zu bringen, wie die Gewichte der Seite (2)(5) und der anliegenden Winkel $(3)_2$ und $(2)_5$ im gegenwärtigen Falle beschaffen sind, wenn man die Voraussetzung immer noch festhält, dass diese beiden Winkel nicht beobachtet worden sind. Als Vorbereitung zu dieser Rechnung sind, wie weiter oben, zuerst die beiden Bedingungsgleichungen aufzustellen, die statt finden würden, wenn

die genannten Winkel beobachtet wären. Diese findet man leicht aus der Figur des Art. 83 wie folgt:

$$\frac{\sin[(3)_2 - (2)_2] \sin[(1)_3 + (2)_3] \sin(2)_3}{\sin(3)_2 \sin(1)_3 \sin[(1)_4 + (2)_4]} = -1$$

$$(3)_2 + (1)_3 + (2)_3 + (2)_5 = 180^0$$

und die Auflösung der ersten in Bezug auf $(3)_2$ giebt

$$\operatorname{tg}(3)_2 = \frac{\sin[(1)_3 + (2)_3] \sin(2)_4 \sin(2)_3}{\sin(1)_3 \sin[(1)_4 + (2)_4] + \sin[(1)_3 + (2)_3] \sin(2)_4 \cos(2)_3}$$

Hieraus erhält man

$$(3)_2 = 45^0\ 24',70\ , \quad (2)_5 = 64^0\ 35',30$$

Die Differentialgleichung der ersten Bedingungsgleichung wird nachdem sie mit der Zahl 10 dividirt worden ist,

$$\begin{aligned} 0 = & - 2.4729\delta(2)_2 + 0.3975\delta(3)_2 - 0.7080\delta(1)_3 \\ & + 0.7663\delta(2)_3 - 0.1103\delta(1)_4 - 0.74540\delta(2)_4 \end{aligned}$$

und die der zweiten

$$0 = \delta(3)_2 + \delta(1)_3 + \delta(2)_3 + \delta(2)_5$$

Löst man die erste in Bezug auf $\delta(3)_2$ auf, so ergiebt sich für die Berechnung des Gewichts dieses Winkels

$$\begin{aligned} \Omega = \delta(3)_2 = & + 6.2211\delta(2)_2 + 1.7811\delta(1)_3 - 1.9279\delta(2)_3 \\ & + 0.2776\delta(1)_4 + 1.8968\delta(2)_4 \end{aligned}$$

und eliminirt man hiemit $\delta(3)_2$ aus der zweiten, so erhält man für $(2)_5$

$$\begin{aligned} \Omega = \delta(2)_5 = & - 6.2211\delta(2)_2 - 2.7811\delta(1)_3 + 0.9279\delta(2)_3 \\ & - 0.2776\delta(1)_4 - 1.8968\delta(2)_4 \end{aligned}$$

Die Figur giebt ferner

$$\begin{aligned} \log(2)(5) = \log(1)(2) & + \log.\sin(1)_1 \sin[(1)_3 + (2)_3] \\ & - \log.\sin(3)_3 \sin(2)_5 \end{aligned}$$

womit

$$\begin{aligned} \Omega = \delta\log(2)(5) = & + 9.374\delta(1)_1 + 7.663[\delta(1)_3 + \delta(2)_3] \\ & - 17.667\delta(3)_3 - 10.003\delta(2)_5 \end{aligned}$$

oder nachdem $\delta(2)_5$ durch die vorstehende Gleichung eliminirt worden ist,

$$\begin{aligned} \Omega = \delta\log(2)(5) = & + 9.374\delta(1)_1 + 6.223\delta(2)_2 + 35.482\delta(1)_3 \\ & - 1.619\delta(2)_3 - 17.667\delta(3)_3 + 2.777\delta(1)_4 + 18.974\delta(2)_4 \end{aligned}$$

sich ergiebt.

88.

Gewicht des Winkels $(3)_2$. Der vor. Art. giebt

$$(M,2)_2 = +6.2211\ , \quad (M,1)_4 = +0.2776$$

$$(M,1)_3 = +1.7811\ , \quad (M,2)_4 = +1.8968$$

$$(M,2)_3 = -1.9279$$

und hiemit

$$R = 49.28$$

$$(I,M) = 0\ , \quad (II,M) = +\ 4.5708\ , \quad (III,M) = +\ 3.6779$$

$$S = 11.48$$

$$P = 0.0265$$

89.

Gewicht des Winkels $(2)_5$. Der vorvor. Art. giebt

$$(M,2)_2 = -\ 6.2211\ , \quad (M,1)_4 = -\ 0.2776$$

$$(M,1)_3 = -\ 2.781\ , \quad (M,2)_4 = -\ 1.8968$$

$$(M,2)_3 = +\ 0.9279$$

und hiemit

$$R = 50.98$$

$$(I,M) = 0\ , \quad (II,M) = -\ 5.5708\ , \quad (III,M) = -\ 4.6779$$

$$S = 17.64$$

$$P = 0.0300$$

Die Gewichte dieser beiden Winkel werden also sehr klein.

90.

Gewicht des log. der Seite (2)(5). Der Art. 87 giebt

$$(M,1)_1 = +\ 9.374\ , \quad (M,3)_3 = -\ 17.667$$

$$(M,2)_2 = +\ 6.223\ , \quad (M,1)_4 = +\ 2.777$$

$$(M,1)_3 = +\ 35.482\ , \quad (M,2)_4 = +\ 18.974$$

$$(M,2)_3 = -\ 1.619$$

woraus

$$R = 2069$$

$$(I,M) = -\ 8.293\ , \quad (II,M) = +\ 7.379\ , \quad (III,M) = +\ 54.456$$

$$S = 1030$$

$$P = 0.000963$$

hervorgehen. Auch ein kleines Gewicht, es kann jedoch dazu bemerkt werden, dass es ein wenig grösser ist, wie das, welches im Art. 22 für die Seite (4)(5) der dort geltenden Figur erhalten wurde.

91.

Es soll jetzt angenommen werden, dass die beiden Winkel $(3)_2$ und $(2)_5$ beobachtet worden sind, und es sollen die Gewichte der obigen Dreiecksstücke unter dieser Voraussetzung berechnet werden. Die Diffe-

rentialgleichungen der nun hinzukommenden zwei neuen Bedingungsgleichungen sind schon im Art. 87 gegeben, stellen wir sie nebst den überdies statt findenden zusammen, so erhalten wir das folgende Täfelchen.

r	s	$q(r.I)$	$q(r.II)$	$q(r.III)$	$\log q(r.IV)$	$q(r.IV)$	$q(r.V)$
1	1	1	—	—	—	—	—
1	2	1	—	—	—	—	—
2		—	1	—	0.39321n	−2.4729	—
3		—	—	—	9.59934	+0.3975	1
1	3	—	—	1	9.85003n	−0.7080	1
2		—	1	—	9.88442	+0.7663	1
3		1	—	—	—	—	—
1	4	—	1	—	9.04275n	−0.1103	—
2		—	—	1	9.87737n	−0.7540	—
1	5	—	—	1	—	—	—
2		—	—	—	—	—	1

Die Werthe der Coefficienten der Endgleichungen ergeben sich hieraus wie folgt.

	I	II	III	IV	V
I	3.0	0	0	0	0
II		3.0	0	− 1.8169	+ 1.0
III			3.0	− 1.4620	+ 1.0
IV				7.9426	+ 0.4558
V					4.0

und hieraus ergeben sich die folgenden Werthe der Hülfsgrössen

$$(2)_1 = 0\,,\quad (3)_1 = 0\,,\quad (4)_1 = 0\,,\qquad (5)_1 = 0$$

$$(3)_2 = 0\,,\quad (4)_2 = (9.78221)\,,\quad (5)_2 = -(9.52288)$$

$$(4)_3 = (9.68783)\,,\quad (5)_3 = -(9.52288)$$

$$(5)_4 = -(9.40253)$$

$$(I,I) = 3.0\,,\quad (II,II,1) = 3.0\,,\quad (III,III,2) = 3.0$$

$$(IV,IV,3) = 6.1297\,,\quad (V,V,4) = 2.9420$$

92.

Gewicht des Winkels $(3)_2$. Wenn wir direct verfahren, so bekommen wir hier

$$(M,3)_2 = 1\,,\quad R = 1$$

$$(IV,M) = (IV,M,3) = +\,0.3975\,,\quad (V,M) = 1\,,\quad (V,M,4) = +\,0.8996$$

$$S = 0.3009$$

$$P = 1.430$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 54.0 gegen Art. 88.

93.

Gewicht des Winkels $(2)_5$. Eben so wie vorher wird hier

$$(M,2)_5 = 1\ ,\quad R = 1$$
$$(V,M) = (V,M,4) = 1$$
$$S = 0.3399$$
$$P = 1.515$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 50,5 gegen Art. 89.

94.

Gewicht der Seite (2)(5). Da hier der erste Ausdruck von $\Omega = \delta.\log(2)(5) =$ etc. des Art. 87 Geltung hat, so bekommen wir zuerst

$$(M,1)_1 = +\ 9.374\ ,\quad (M,3)_3 = -\ 17.667$$
$$(M,1)_3 = +\ 7.663\ ,\quad (M,2)_5 = -\ 10.003$$
$$(M,2)_3 = +\ 7.663$$

und hiemit

$$R = 417.51$$
$$(I,M) = -\ 8.293\ ,\ (II,M) = +\ 7.663\ ,\ (III,M) = +\ 7.663$$
$$(IV,M) = -\ 0.4471\ ,\ (V,M) = +\ 5.323$$
$$(II,M,1) = (III,M,2) = (II,M)$$
$$(IV,M,3) = +\ 7.928\ ,\quad (V,M,4) = -\ 1.790$$
$$S = 73.43$$
$$P = 0.002906$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 3.018 gegen Art. 90.

95.

Gewicht des log. der Seite (3)(5). Die Grundgleichung kann jetzt wie folgt gestellt werden,

$$\log(3)(5) = \log(1)(2) + \log.\sin(1)_1\sin(3)_2 - \log.\sin(3)_3\sin(2)_5$$

und diese giebt

$$\Omega = +\ 9.374\delta(1)_1 + 20.754\delta(3)_2 - 17.667\delta(3)_3 - 10.003\delta(2)_5$$

mithin

$$(M,1)_1 = +\ 9.374\ ,\quad (M,3)_3 = -\ 17.667$$
$$(M,3)_2 = +\ 20.754\ ,\quad (M,2)_5 = -\ 10.003$$
$$R = 930.80$$
$$(I,M) = -\ 8.293\ ,\quad (II,M) = 0\ ,\quad (III,M) = 0$$
$$(IV,M) = +\ 8.250\ ,\quad (V,M) = +\ 10.751$$
$$(II,M,1) = (III,M,2) = 0,\ (IV,M,3) = +\ 8.250,\ (V,M,4) = +\ 8.666$$

$$S = 59.57$$
$$P = 0.001148$$

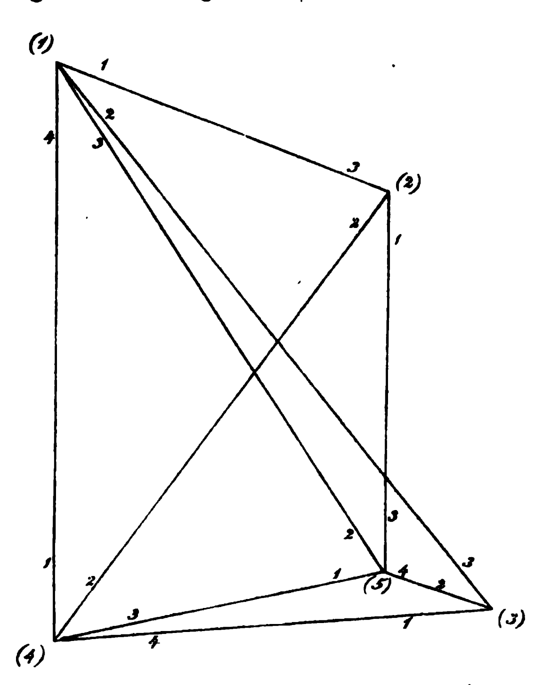
Vergrösserungsverhältniss 1 : 39.58 gegen Art. 86.

96.

In Bezug auf die in den Artt. 92 und 93 erhaltenen Gewichte der Winkel $(3)_2$ und $(2)_5$, von welchen das eine kleiner, und das andere nur wenig grösser ist wie 1.5, ist zu bemerken, dass die Gewichte der Winkel dieses Dreiecks, wenn man den Punkt (4) weglässt, nur 1,333 werden. Die Ursache davon ist die Annahme, dass der Winkel (2)(3)(5) aus den zwei für sich gemessenen Winkeln $(1)_3$ und $(2)_3$ zusammen gesetzt worden ist.

97.

Ein merkwürdiges Beispiel, wie durch Einschaltung eines Dreieckspunkts das Gewicht einer Seite unter Umständen vergrössert werden kann, giebt Gauss in seinem «Supplementum theoriae combinationis etc.» Dieses soll schliesslich hier noch, aber mit einer Aenderung der Winkelgleichungen, die für unsern Zweck dienlich ist, angeführt werden. Die dazu gehörige Figur ist die folgende,



in welcher

(1) die Station Wilsede
(2) - - Wulfsode
(3) - - Breithorn
(4) - - Falkenberg
(5) - - Hauselberg

sind. Zur leichteren Vergleichung führe ich noch die Bezeichnung der Richtungen sowohl nach Gauss wie nach mir an. Diese sind

$$
\begin{array}{lll}
(0) = (1)_4\,, & (4) = (1)_3\,, & (7) = (1)_5 \\
(1) = (2)_4\,, & (5) = (2)_3\,, & (8) = (2)_5 \\
(2) = (3)_4\,, & (6) = (3)_3\,, & (9) = (3)_5 \\
(3) = (4)_4\,, & & (10) = (4)_5 \\
(11) = (1)_2\,, & (14) = (4)_1 & \\
(12) = (2)_2\,, & (15) = (1)_1 & \\
(13) = (3)_2\,, & (16) = (2)_1 & \\
 & (17) = (3)_1 &
\end{array}
$$

in welcher Zusammenstellung linker Hand des Gleichheitszeichens die Gaussische, und rechter Hand meine Bezeichnung enthalten ist.

98.

Die Bedingungsgleichungen, die ich anwenden werde, sind die folgenden,

$$(4)_1 - (1)_1 + (3)_2 - (2)_2 + (2)_4 - (1)_4 = 180^0 + \varepsilon$$
$$(4)_1 - (2)_1 + (3)_3 - (1)_3 + (4)_4 - (1)_4 = 180^0 + \varepsilon'$$
$$(4)_1 - (3)_1 + (3)_4 - (1)_4 + (2)_5 - (1)_5 = 180^0 + \varepsilon''$$
$$(3)_1 - (1)_1 + (3)_2 - (1)_2 + (3)_5 - (2)_5 = 180^0 + \varepsilon'''$$
$$(2)_3 - (1)_3 + (4)_4 - (3)_4 + (4)_5 - (1)_5 = 180^0 + \varepsilon^{IV}$$
$$\frac{\sin[(4)_1-(3)_1]\sin[(3)_3-(2)_3]\sin[(4)_4-(3)_4]}{\sin[(3)_1-(2)_1]\sin[(2)_3-(1)_3]\sin[(3)_4-(1)_4]} = 1$$
$$\frac{\sin[(4)_1-(3)_1]\sin[(3)_2-(1)_2]\sin[(3)_4-(2)_4]}{\sin[(3)_1-(1)_1]\sin[(2)_2-(1)_2]\sin](3)_4-(1)_4]} = 1$$

Die Vergleichung zeigt, dass diese beiden Seitengleichungen mit denen von Gauss aufgestellten ohne Weiteres identisch sind, aber dass dieses bei den Winkelgleichungen nicht der Fall ist; im Grunde findet dieses dennoch statt, da jene sich aus diesen durch Eliminationen herstellen lassen*).

---

*) Es sind $(4)_4 - (3)_4 = 8^0\ 1'$ und $(3)_1 - (2)_1 = 4^0\ 22'$. Man sieht hieraus, dass Gauss sich nicht gescheut hat, Bedingungsgleichungen mit sehr kleinen Winkeln anzuwenden, wie von ihm auch zu erwarten war.

Die Tafel für die Coefficienten der Bedingungsgleichungen steht nun wie folgt,

r	s	q(r.I)	q(r.II)	q(r.III)	q(r.IV)	q(r.V)	log q(r.VI)	log q(r.VII)
1	1	−1	—	—	−1	—	—	9.76433
2		—	−1	—	—	—	0.13893	—
3		—	—	−1	+1	—	0.18653n	0.08607n
4		+1	+1	+1	—	—	9.20276	9.80482
1	2	—	—	—	−1	—	—	9.85866
2		−1	—	—	—	—	—	9.75724n
3		+1	—	—	+1	—	—	9.17725n
1	3	—	−1	—	—	−1	9.29137	—
2		—	—	—	—	+1	9.60010n	—
3		—	+1	—	—	—	9.30685	—
1	4	−1	−1	−1	—	—	8.33445	8.93551
2		+1	—	—	—	—	—	9.68413n
3		—	—	+1	—	−1	9.88615n	9.59879
4		—	+1	—	—	+1	9.87384	—
1	5	—	—	−1	—	+1	—	—
2		—	—	+1	−1	—	—	—
3		—	—	—	+1	—	—	—
4		—	—	—	—	−1	—	—

welche voraussetzt, dass die erste Seitengleichung mit 200, und ie zweite mit 50 dividirt worden ist.

Die Coefficienten der Endgleichungen giebt hierauf das folgende Täfelchen.

	I	II	III	IV	V	VI	VII
I	6	+2	+2	+2	0	+0.1379	−0.0912
II		6	+2	0	+2	−0.4841	+0.5518
III			6	−2	−2	+0.9050	+2.1680
IV				6	0	−1.5365	−2.6730
V					6	+0.9235	−0.3970
VI						5.6722	+1.6716
VII							3.5004

*) Durch die Auflösung der Endgleichungen ergeben sich die folgenden Werthe der Hülfsgrössen die mit zur Berechnung der Gewichte dienen,

---

*) Man findet hieraus, wenn man mit $(200)^2$ multiplicirt,

$$(VI.VI) = 226888$$

während Gauss 224868 angiebt. Es scheint hier der Fehler bei Gauss zu liegen; er hat übrigens nur unbedeutende Wirkung.

$(2)_1 = -(9.52288)$,
$(3)_1 = -(9.52288)$, $(3)_2 = -(9.39794$
$(4)_1 = -(9.52288)$, $(4)_2 = -(9.09691)$, $(4)_3 = +(9.69897)$
$(5)_1 = 0$, $(5)_2 = -(9.57403)$, $(5)_3 = +(9.69897)$
$(6)_1 = -(8.36141)$, $(6)_2 = +(8.99736)$, $(6)_3 = -(9.29732)$
$(7)_1 = +(8.18185)$, $(7)_2 = -(9.03807)$, $(7)_3 = -(9,61338)$

$(5)_4 = +(9.39794)$
$(6)_4 = +(9.45981)$, $(6)_5 = -(9.54942)$
$(7)_4 = +(9.58643)$, $(7)_5 = -(7.82737)$, $(7)_6 = -(9.27562)$
$(I,I) = 6.0$, $(II,II,1) = 5.3333$, $(III,III,2) = 5,0$, $(IV, IV,3) = 4.0$
$(V,V,4) = 3.75$, $(VI, VI,5) = 4.6158$, $(VII,VII,6) = 1.9968$

99.

Ich werde jetzt nur das Gewicht der Seite (3)(4) in Beziehung auf (1)(2), das ist das der Seite Breithorn-Falkenberg in Beziehung auf Wilsede-Wulfsode, dasselbe welches Gauss hat, berechnen. Die Grundformel ist

$$\log(3)(4) = \log(1)(2) + \log.\sin[(4)_1-(2)_1]\sin[(3)_2-(2)_2] - \log.\sin[(3)_3-(1)_3]\sin[(2)_4-(1)_4]$$

zu welcher bemerkt werden kann, dass die Station (5) darin gar nicht vorkommt. Es wird nun

$$\Omega = -27.146\delta(2)_1 + 27.146\delta(4)_1 - 6.326\delta(2)_2 + 6.326\delta(3)_2 + 14.337\delta(1)_3 - 14.337\delta(3)_3 + 27.568\delta(1)_4 - 27.568\delta(2)_4$$

und folglich werden hier

$(M,2)_1 = -27.146$, $(M,3)_2 = +6.326$, $(M,1)_4 = +27.568$
$(M,4)_1 = +27.146$, $(M,1)_3 = +14.337$, $(M,2)_4 = -27.568$
$(M,2)_2 = -6.326$, $(M,3)_3 = -14.337$

und hieraus folgt vor Allem

$$R = 3485.0$$

Die weitere Rechnung giebt,

$(I,M) = -15.338$, $(V,M) = -14.337$
$(II,M) = -1.950$, $(VI,M) = -32.555$
$(III,M) = -0.422$, $(VII,M) = +35.683$
$(IV,M) = +6.326$

$$(II,M,1) = + \ 3.163\ ,\ (V,M,4) = - \ 10.127$$
$$(III,M,2) = + \ 3.900\ ,\ (VI,M,5) = - \ 25.097$$
$$(IV,M,3) = + \ 13.784\ ,\ (VII,M,6) = + \ 43.625$$

und mit Angabe der einzelnen Glieder der Reihe nach

$$\begin{array}{r} 39.2 \\ 1.9 \\ 3.0 \\ 47.5 \\ 27.3 \\ 136.5 \\ 1038.8 \\ \hline S = 1294.2 \end{array}$$

und hieraus folgt

$$P = 0.0004564$$

Denkt man sich nun die Station (5) weg, so fallen die fünf letzten Bedingungsgleichungen weg, und nur die ersten beiden bleiben bestehen. In dem Ausdruck von S fallen zugleich die fünf letzten Glieder weg, und es wird daher jetzt

$$S = 41.1$$

während R unverändert bleibt. Das Gewicht welches nun sich herausstellt ist

$$P = 0.0002903$$

und die Zuziehung der Station (5) zu Bestimmung der Seite (3)(4) hat also das Gewicht derselben im Verhältniss von

$$1 : 1.572$$

vergrössert, welches mit dem Gaussischen Resultat, welches 1 : 1571 ist, befriedigend übereinstimmt. Um das Gewicht der Seite selbst zu erhalten führe ich nach Gauss an, dass die Länge derselben 26767 Meter beträgt, und hiemit geben die beiden obigen Angaben des Gewichts des log. der Seite das Gewicht der Seite selbst, in den beiden Annahmen

$$P = 12.02, \text{ und } = 7.643$$

auch mit Gauss befriedigend übereinstimmend.

Suppl. 2. Von der Bestimmung des mittleren Fehlers der nackten Beobachtungen.

1.

Im Art. 138 der Abhandlung habe ich ausgeführt, wie man durch Winkel, die zu diesem Zweck eigends gemessen worden sind, die Gewichte bestimmen kann, die den verschiedenen Beobachtungen beizulegen sind, wenn man in den Fall kommt bei einer Triangulation verschiedene Gattungen von Beobachtungen von einander unterscheiden zu müssen. Zugleich habe ich dort angedeutet, dass man sich zu demselben Zwecke der bei der Triangulation beobachteten Richtungen bedienen kann; diese Bestimmung soll hier ausführlich behandelt werden.

2.

Die in der Abhandlung eingeführten, mit p, p', etc. $p_{,}$, $p'_{,}$, etc. etc. bezeichneten Gewichte der Beobachtungen l, l', etc. $l_{,}$, $l'_{,}$, etc. etc. sind den Quadraten der mittleren Fehler, womit diese Beobachtungen an sich, und abgesehen von ihrer Verwendung zu irgend einem Zwecke, als behaftet angesehen werden müssen, umgekehrt proportional. Diese mittleren Fehler und die Verhältnisse der ihnen zugehörigen Gewichte haben daher bestimmte Werthe, dermaassen dass jeder vorhandenen Gattung von Beobachtungen, unabhängig von der Verwendung derselben zu irgend einem Zwecke ein bestimmter Werth dieses mittleren Fehlers zukommt.

Da die entsprechenden Gewichte, oder Gewichtsverhältnisse auf welche es hier eigentlich ankommt, mit diesen mittleren Fehlern in so enger und einfacher Beziehung stehen, so besteht unsere gegenwärtige Aufgabe ihrem wesentlichen Inhalt nach darin, die genannten mittleren Fehler aus den Beobachtungen zu ermitteln. Ich will diese mittleren Fehler, um sie von denen zu unterscheiden, die nach der Anwendung der Beobachtungen auf irgend eine Aufgabe erhalten werden, die mittleren Fehler der nackten Beobachtungen nennen.

Jede Verwendung der Beobachtungen zu irgend einem Zwecke, oder mit anderen Worten, jede Anwendung der Beobachtungen zur Lösung einer Aufgabe führt zwar auch auf die Bestimmung des mittleren

Fehlers der dazu verwandten Beobachtungen, aber dieser mittlere Fehler, den man erst am Schlusse aller zur Lösung der Aufgabe erforderlichen Rechnungen erhält, ist von dem mittleren Fehler der nackten Beobachtungen verschieden, der dem Obigen zu Folge zur Berechnung des betreffenden Gewichts p dient. Der jetzt genannte mittlere Fehler besteht aus einer Combination des mittleren Fehlers der nackten Beobachtungen mit der Wirkung der theoretischen Bedingungen, die die Aufgabe, auf welche die Beobachtungen angewandt werden, mit sich führt; er involvirt gemeiniglich auch neue Fehlerquellen, die bei der Betrachtung der Beobachtungen an sich nicht mit einwirken.

Beobachtungen, die an sich gleiche Güte besitzen, oder welchen dasselbe Gewicht p zukommt, können wenn sie auf verschiedene specielle Fälle Einer Aufgabe, oder auf verschiedene Aufgaben angewandt werden, nach der Anwendung eine mehr oder minder grosse Verschiedenheit in den aus der Aufgabe hervorgehenden oder berechneten mittleren Fehlern zeigen, und dieses tritt namentlich ein, wenn in der Aufgabe mehrere Unbekannten vorkommen, die von einander abhängig sind, und durch Beobachtungen, die von einander unabhängig sind bestimmt werden müssen. Die Bedeutung dieser, durch die Auflösung einer Aufgabe erhaltenen mittleren Fehler kann nie auf die Beobachtungen an sich, oder auf die mittleren Fehler der nackten Beobachtungen, bezogen werden, sondern er bildet blos die Grundlage zur Bestimmung der mittleren Fehler der Resultate, die man durch Anwendung der Beobachtungen auf die betreffende Aufgabe erhalten hat.

3.

Es ist daher, um zu einem bestimmten Falle überzugehen, schon aus den eben erklärten Gründen unrichtig bei der Ausgleichung eines Dreiecksnetzes die durch die Ausgleichungen auf den Stationen erlangten Summen der Fehlerquadrate, die in der Abhandlung allgemein mit (ll,n) bezeichnet worden sind, zur Bestimmung des mittleren Fehlers oder des Gewichts p der nackten Beobachtungen zu verwenden, denn diese (ll,n) bestehen schon aus einer Combination des mittleren Fehlers der nackten Beobachtungen mit den Bedingungen zwischen den verschiedenen Unbekannten, die die Aufgabe der Ausgleichung auf der Station, aus welcher eben (ll,n) hervorgeht, eingeführt hat; Bedingungen, die in der Regel auf jeder Station verschieden sind.

4.

Aber im eben betrachteten Falle lässt sich für die Unhaltbarkeit der Bestimmung des mittleren Fehlers der nackten Beobachtungen aus den (ll,n) noch ein anderer Grund anführen. Es ist leicht nachzuweisen, dass die (ll,n) keines Weges unveränderliche, feststehende Grössen sind, sondern dass im Belieben des Rechners steht ihnen manigfache Werthe zuzutheilen. Man hat in § 3 der Abhandlung gesehen, dass es in der Auflösung der allgemeinen Aufgabe, von welcher die Ausgleichung eines Dreiecksnetzes ein specieller Fall ist, unter Umständen nothwendig werden kann, bei der Bildung des Systems von Gleichungen, deren Auflösung den ersten Theil der Auflösung der Aufgabe überhaupt ausmacht, Eine oder mehrere der Bedingungsgleichungen mit zu verwenden, und dass man in jedem Falle, auch wenn es nicht nothwendig wird, zu einer solchen Verwendung der Bedingungsgleichungen berechtigt ist, durch welche die Endresultate der Auflösung nicht im Mindesten geändert werden. Es ist dieses a. a. O. nicht nur theoretisch bewiesen, sondern auch durch das Beispiel des Art. 56, u. f. dargethan worden. In der geodätischen Anwendung der allgemeinen Aufgabe, oder in der Ausgleichung eines Dreiecksnetzes darf man daher auch zu den Ausgleichungen auf den Stationen nach Belieben Eine oder mehrere der vorhandenen Bedingungsgleichungen hinzuziehen, obgleich dieses hier nicht nothwendig wird.

5.

Die Bedingungsgleichungen, auf welche diese Aufgabe führt, enthalten immer Richtungen von wenigstens drei Stationen, und durch die Zuziehung von Einer oder mehreren derselben zu den Ausgleichungen auf den betreffenden Stationen, kann man die Ausgleichung von drei oder mehreren Stationen mit einander verbinden, und zu Einem gemeinschaftlichen Resultat vereinigen. Es ist leicht einzusehen, dass hierauf Werthe hervorgehen müssen, die von denen wesentlich verschieden sind, die durch die Einzelnbehandlung dieser Stationen erhalten worden wären, die aber demungeachtet mit diesen gleiche Berechtigung haben. Nicht nur die auf diesen Stationen ausgeglichenen Richtungen, sondern auch, worauf es hier besonders ankommt, der Werth von (ll,n) wird ein anderer, und es wird folglich die Verwendung dieses Werthes zur

Bestimmung des mittleren Fehlers der nackten Beobachtungen ein anderes Resultat geben, wie in dem Falle, wo keine Bedingungsgleichung zur Ausgleichung auf den Stationen verwandt worden ist.

6.

Durch die erklärte Zuziehung von Bedingungsgleichungen werden nicht nur die Resultate des ersten Theils der Auflösung der Aufgabe, sondern zugleich auch die des zweiten Theils derselben geändert, und zwar letztere so, dass schliesslich dieselben Endresultate zum Vorschein kommen, die man ohne die genannte Zuziehung erhalten haben würde. Es werden also namentlich nicht blos die Werthe der (ll,n), sondern es wird auch der Werth von R_q anders werden, aber diese Aenderungen werden stets so beschaffen sein, dass der aus der ganzen Rechnung hervorgehende Werth der Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Fehlerquadrate, nemlich

$$W = \Sigma(ll,n) + R_q$$

in jedem speciellen Falle unverändert derselbe bleibt. Unter den verschiedenen in dieser Aufgabe vorkommenden Summen von Fehlerquadraten ist daher in jedem vorliegenden Falle (d. h. in jedem zu behandelnden Dreiecksnetze) nur W diejenige, die einen bestimmten Werth hat, während alle (ll,n) nebst R_q, je nach der Behandlung der Aufgabe, sehr verschiedene Werthe annehmen können.

Da nun die mittleren Fehler der nackten Beobachtungen, der oben gegebenen Erklärung derselben zu Folge, auch feste und unveränderliche Werthe besitzen, so können um so weniger die erhaltenen Werthe der (ll,n) zu deren Bestimmung angewandt werden.

7.

Wenn man etwa hiezu bemerken wollte, dass die ohne Zuziehung von Bedingungsgleichungen erhaltenen Werthe von (ll,n) einen Vorzug vor denen voraus hätten, die sich nach dieser Zuziehung ergeben, und daher vorzugsweise zur Bestimmung der mittleren Fehler der nackten Beobachtungen zu verwenden wären, so lassen sich diesem die folgenden Betrachtungen entgegenstellen. Die durch die im Vorhergehenden erklärten, combinirten Ausgleichungen auf den Stationen erhaltenen Werthe der (ll,n) haben in der in Rede stehenden Aufgabe dieselbe theoretische sowohl, wie praktische, Berechtigung wie jene aus den

Einzelnausgleichungen auf den Stationen hervorgehenden Werthe derselben Grössen. Wenn daher die Einen Werthe Berechtigung zur Bestimmung der genannten mittleren Fehler haben, so haben die Andern dieselbe Berechtigung auch. Da aber diese Werthe von einander verschieden sind, so werden auch verschiedene Werthe der mittleren Fehler daraus hervorgehen, welches unannehmbar ist, da es in der Natur der Sache liegt, dass diesen feste und unveränderliche Werthe zukommen müssen.

8.

Um nun aus den bei einer hinreichend ausgedehnten Triangulation beobachteten Richtungen die Quadrate der mittleren Fehler zu erhalten, bietet sich zunächst das folgende Verfahren dar. Man ordne auf jeder Station die vorhandenen Gyri auf dieselbe Weise, wie zur Ausgleichung des Dreiecksnetzes erforderlich ist, nemlich man stelle sie in solche Gruppen zusammen, dass die in jeder dieser vorkommenden Richtungen ohne Lücken vorhanden sind. Aus jeder Gruppe bilde man so viele unabhängige Winkel wie möglich, aus welchen hierauf, so wie im Art. 138 erklärt worden ist, das Quadrat des mittleren Fehlers zu berechnen ist.

Dieses Verfahren ist jedoch nicht das Vortheilhafteste. Denn bezeichnet man die in irgend einer Gruppe von Gyris enthaltenen Richtungen mit (1), (2), (3), etc., so kann man höchstens nur die halbe Anzahl von unabhängigen Winkeln erhalten, da keine Richtung zu zwei oder mehr Winkeln verwandt werden darf. Man kann die Winkel

$$(2) - (1),\ (4) - (3),\ (6) - (5),\ \text{etc.}$$
$$\text{oder } (3) - (1),\ (4) - (2),\ (7) - (5),\ \text{etc.}$$

u. s. w. bilden, und erkennt leicht, dass in den Fällen, in welchen die Zahl der vorhandenen Richtungen ungrade ist, eine derselben zum vorliegenden Zweck unbenutzt übrig bleibt. Es ist aber ein anderes Verfahren möglich, durch welches alle vorhandenen Richtungen vortheilhafter benutzt werden. Dieses soll im Folgenden erklärt werden.

9.

Das Verfahren des vor. Art. setzt stillschweigend voraus, dass man allen auf der Station beobachteten Richtungen dasselbe Gewicht beilegt, und da dieses durchgängig zulässig ist, und man selten oder nie sich in den Stand gesetzt sieht, etwaige reelle Unterschiede der Güte solcher

Beobachtungen gnügend unterscheiden und bestimmen zu können, so soll diese Annahme hier ausdrücklich beibehalten werden. In Folge dessen, wird man nun vor Allem aus den Beobachtungen einer jeden Richtung in jedem der vorhandenen Gyri das arithmetische Mittel nehmen, und dieses von allen betr. Beobachtungen abziehen müssen. Mit diesen Unterschieden ist dann weiter zu verfahren. Einen wesentlichen Umstand bildet hiebei die Eigenschaft, dass der gemeinschaftliche Anfangspunkt aller Beobachtungen eines jeden Gyrus eine unbestimmte Grösse ist, und man dem zu Folge vor der Vornahme der oben beschriebenen Rechnung die einzelnen Gyri in Bezug auf ihren Anfangspunkt nur nach Gutdünken hat aufstellen können. Jeder der eben erklärten Unterschiede besteht daher aus der Summe von zwei Fehlern, nemlich aus dem eigentlichen Beobachtungsfehler und dem Fehler, den man bei der willkührlichen Annahme des gemeinschaftlichen Anfangspunkts des betr. Gyrus begangen hat. Seien für den ersten Gyrus, und für die verschiedenen Richtungen der erst genannte Fehler ξ, ξ', ξ'', etc. der andere v, für den zweiten Gyrus dieselben $\xi_,$, $\xi'_,$, $\xi''_,$, etc. nebst $v_,$, u. s. w. dann haben die oben beschriebenen Unterschiede die Form

$$\xi + v\,,\ \xi' + v\,,\ \xi'' + v\,,\ \text{etc.}$$
$$\xi_, + v_,\,,\ \xi'_, + v_,\,,\ \xi''_, + v_,\,,\ \text{etc.}$$
$$\xi_{,,} + v_{,,}\,,\ \xi'_{,,} + v_{,,}\,,\ \xi''_{,,} + v_{,,}\,,\ \text{etc.}$$

u. s. w. Sei nun n die Anzahl der Richtungen, die in jedem Gyrus der betreffenden Gruppe enthalten sind, und

$$\mu = \frac{\xi + \xi' + \xi'' + \ldots}{n}$$
$$\mu_, = \frac{\xi_, + \xi_,' + \xi_,'' + \ldots}{n}$$
etc.

dann sind die arithmetischen Mittel aus den vorstehenden Unterschieden jeder Zeile

$$\mu + v$$
$$\mu_, + v_,$$
$$\mu_{,,} + v_{,,}$$
etc.

und zieht man diese von jenen ab, so erhält man

$$\xi - \mu\,,\ \xi' - \mu\,,\ \xi'' - \mu\,,\ \text{etc.}$$
$$\xi_, - \mu_,\,,\ \xi'_, - \mu_,\,,\ \xi''_, - \mu_,\,,\ \text{etc.}$$
$$\xi_{,,} - \mu_{,,}\,,\ \xi'_{,,} - \mu_{,,}\,,\ \xi''_{,,} - \mu_{,,}\,,\ \text{etc.}$$
etc.

für die eigentlichen Fehler der Beobachtungen, da hieraus die Unbestimmtheit, die der gemeinschaftliche willkührliche Anfangspunkt eines jeden Gyrus darbietet, vollständig entfernt ist. Um dieses deutlicher zu machen will ich annehmen, dass man allen Beobachtungen irgend eines der Gyri, vor der Berechnung des arithmetischen Mittels aus den Beobachtungen, z. B. des ersten Gyrus die willkührliche Anzahl von x Secunden hinzugefügt habe. Man wird hierauf statt der oben angegebenen ersten Unterschiede die folgenden erhalten haben,

$$\xi + v + \frac{m-1}{m}x,\ \xi' + v + \frac{m-1}{m}x,\ \xi'' + v + \frac{m-1}{m}x, \text{ etc.}$$

$$\xi_{,} + v_{,} - \frac{x}{m},\ \xi'_{,} + v_{,} - \frac{x}{m},\ \xi''_{,} + v_{,} - \frac{x}{m}, \text{ etc.}$$

$$\xi_{,,} + v_{,,} - \frac{x}{m},\ \xi'_{,,} + v_{,,} - \frac{x}{m},\ \xi''_{,,} + v_{,,} - \frac{x}{m}, \text{ etc.}$$

etc.

und die arithmetischen Mittel aus den Grössen jeder Zeile werden jetzt

$$\mu + v + \frac{m-1}{m}x$$

$$\mu_{,} + v_{,} - \frac{x}{m}$$

$$\mu_{,,} + v_{,,} - \frac{x}{m}$$

etc.

Zieht man diese von jenen ab, so erhält man dieselben Unterschiede wie oben. W. z. b. w.

10.

Das Verfahren des vor. Art. giebt für die Anwendung die Berechnung nach folgenden Formeln. Seien l, l', l'', etc. die Beobachtungen des ersten Gyrus, $l_{,}$, $l'_{,}$, $l''_{,}$, etc. die des zweiten Gyrus, $l_{,,}$, $l'_{,,}$, $l''_{,,}$, etc. die des dritten Gyrus u. s. w. Alle diese Beobachtungen können in Bezug auf den gemeinschaftlichen Anfangspunkt jedes Gyrus ganz willkührlich aufgestellt werden, zweckmässig ist jedoch sie durch Anbringung einer constanten Zahl für jede Gyrus so zu stellen, dass sie für jede Richtung nur kleine Unterschiede zeigen. Nennt man ferner m die Anzahl der Gyri die in der Gruppe enthalten sind, so rechne man erst

$$p = \frac{l + l_{,} + l_{,,} + \ldots}{m}$$

$$p' = \frac{l' + l'_{,} + l'_{,,} + \ldots}{m}$$

$$p'' = \frac{l'' + l''_{,} + l''_{,,} + \ldots}{m}$$

etc.

und hiemit

$$\begin{array}{llll} l-p\ , & l_{,}-p\ , & l_{,,}-p\ , & \text{etc.} \\ l'-p'\ , & l'_{,}-p'\ , & l'_{,,}-p'\ , & \text{etc.} \\ l''-p''\ , & l''_{,}-p''\ , & l''_{,,}-p''\ , & \text{etc.} \end{array}$$

etc.

die man am Zweckmässigsten in der vorstehenden Aufeinanderfolge niederschreibt. Es sind hierauf die folgenden Mittel zu rechnen,

$$q = \frac{(l-p) + (l'-p') + (l''-p'') + \ldots}{n}$$

$$q_{,} = \frac{(l_{,}-p) + (l'_{,}-p') + (l''_{,}-p'') + \ldots}{n}$$

$$q_{,,} = \frac{(l_{,,}-p) + (l'_{,,}-p') + (l''_{,,}-p'') + \ldots}{n}$$

etc.

wenn wieder n die Anzahl der Richtungen bedeutet. Die von der Wirkung der allgemeinen Anfangspunkte befreiten, eigentlichen Beobachtungsfehler werden hierauf

$$\begin{array}{llll} l-p-q\ , & l'-p'-q\ , & l''-p''-q\ , & \text{etc.} \\ l_{,}-p-q_{,}\ , & l'_{,}-p'-q_{,}\ , & l''_{,}-p''-q_{,}\ , & \text{etc.} \\ l_{,,}-p-q_{,,}\ , & l'_{,,}-p'-q_{,,}\ , & l''_{,,}-p''-q_{,,}\ , & \text{etc.} \end{array}$$

etc.

Ich bemerke hiezu noch, dass man die Aufeinanderfolge der Mittel umwechseln und setzen kann,

$$q = \frac{l + l' + l'' + \ldots}{n}$$

$$q_{,} = \frac{l_{,} + l'_{,} + l''_{,} + \ldots}{n}$$

$$q_{,,} = \frac{l_{,,} + l'_{,,} + l''_{,,} + \ldots}{n}$$

etc.

$$p = \frac{(l-q) + (l_{,}-q_{,}) + (l_{,,}-q_{,,}) + \ldots}{m}$$

$$p' = \frac{(l'-q) + (l'_{,}-q_{,}) + (l'_{,,}-q_{,,}) + \ldots}{m}$$

$$p'' = \frac{(l''-q) + (l''_{,}-q_{,}) + (l''_{,,}-q_{,,}) + \ldots}{m}$$

etc.

Dieses Verfahren führt auf dieselben Werthe der $(l-p-q)$, $(l'-p'-q)$, etc. etc. Beide Verfahrungsarten stehen mit dem im Art. 68 der Abhandlung bewiesenen Satze in engster Verbindung.

11.

Sei

$$M = (l - p - q)^2 + (l' - p' - q)^2 + (l'' - p'' - q)^2 + \ldots$$
$$+ (l_, - p - q_,)^2 + (l'_, - p' - q_,)^2 + (l''_, - p'' - q_,)^2 + \ldots$$
$$+ (l_{,,} - p - q_{,,})^2 + (l'_{,,} - p' - q_{,,})^2 + (l''_{,,} - p'' - q_{,,})^2 + \ldots$$
$$+ \text{etc.}$$

so kann M dem vor. Art. zufolge auf zwei verschiedene Arten berechnet werden. Aber diese Function zweiter Ordnung kann nach bekannten Sätzen auf verschiedene andere Formen gebracht werden. Ich werde hier drei solcher Formen angeben. Löst man die Quadrate dergestalt auf, dass die q von den $l-p$ getrennt werden, und setzt zur Abkürzung

$$L = l - p,\quad L' = l' - p',\quad L'' = l'' - p'',\ \text{etc.}$$
$$L_, = l_, - p,\quad L'_, = l'_, - p',\quad L''_, = l''_, - p'',\ \text{etc.}$$
$$L_{,,} = l_{,,} - p,\quad L'_{,,} = l'_{,,} - p',\quad L''_{,,} = l''_{,,} - p'',\ \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

so ergiebt sich zuerst

$$M = L^2 + L'^2 + L''^2 + \ldots - 2q(L + L' + L'' + \ldots)$$
$$+ L_,^2 + L'^2_, + L''^2_, + \ldots - 2q_,(L_, + L'_, + L''_, + \ldots)$$
$$+ L_{,,}^2 + L'^2_{,,} + L''^2_{,,} + \ldots - 2q_{,,}(L_{,,} + L'_{,,} + L''_{,,} + \ldots)$$
$$+ \text{etc.} \qquad - \text{etc.}$$
$$+ n(q^2 + q_,^2 + q_{,,}^2 + \ldots)$$

und hieraus vermittelst der ersten Ausdrücke der q des vor. Art.

$$M = \left\{\begin{matrix} L^2 + L'^2 + L''^2 + \ldots \\ + L_,^2 + L'^2_, + L''^2_, + \ldots \\ + L_{,,}^2 + L'^2_{,,} + L''^2_{,,} + \ldots \\ + \text{etc.} \end{matrix}\right\} - \frac{\left\{\begin{matrix} (L + L' + L'' + \ldots)^2 \\ + (L_, + L'_, + L''_, + \ldots)^2 \\ + (L_{,,} + L'_{,,} + L''_{,,} + \ldots)^2 \\ + \text{etc.} \end{matrix}\right\}}{n}$$

wo

$$p = \frac{l + l_, + l_{,,} + \ldots}{m}$$
$$p' = \frac{l' + l'_, + l'_{,,} + \ldots}{m}$$
$$p'' = \frac{l'' + l''_, + l''_{,,} + \ldots}{m}$$
$$\text{etc.}$$

zu setzen ist. Trennt man die p von den $l-q$, so bekommt man auf dieselbe Art, wenn man

$$\begin{array}{llll} \Delta = l - q\,, & \Delta_{,} = l_{,} - q_{,}\,, & \Delta_{,,} = l_{,,} - q_{,,}\,, & \text{etc.} \\ \Delta' = l' - q\,, & \Delta'_{,} = l'_{,} - q_{,}\,, & \Delta'_{,,} = l'_{,,} - q_{,,}\,, & \text{etc.} \\ \Delta'' = l'' - q\,, & \Delta''_{,} = l''_{,} - q_{,}\,, & \Delta''_{,,} = l''_{,,} - q_{,,}\,, & \text{etc.} \\ \text{etc.} & & & \end{array}$$

setzt

$$M = \left\{\begin{array}{l} \Delta^2 + \Delta_{,}^2 + \Delta_{,,}^2 + \ldots \\ + \Delta'^2 + \Delta_{,}'^2 + \Delta_{,,}'^2 + \ldots \\ + \Delta''^2 + \Delta_{,}''^2 + \Delta_{,,}''^2 + \ldots \\ + \text{etc.} \end{array}\right\} - \frac{\left\{\begin{array}{l} (\Delta + \Delta_{,} + \Delta_{,,} + \ldots)^2 \\ + (\Delta' + \Delta'_{,} + \Delta'_{,,} + \ldots)^2 \\ + (\Delta'' + \Delta''_{,} + \Delta''_{,,} + \ldots)^2 \\ + \text{etc.} \end{array}\right\}}{m}$$

wo

$$q = \frac{l + l' + l'' + \ldots}{n}$$

$$q_{,} = \frac{l_{,} + l'_{,} + l''_{,} + \ldots}{n}$$

$$q_{,,} = \frac{l_{,,} + l'_{,,} + l''_{,,} + \ldots}{n}$$

etc.

zu setzen ist. Aus der einen oder der anderen der beiden vorstehenden Formen bekommt man, wenn man auch die p, oder bez. die q von den l trennt, auf dieselbe Art

$$M = \left\{\begin{array}{l} l^2 + l'^2 + l''^2 + \ldots \\ + l_{,}^2 + l_{,}'^2 + l_{,}''^2 + \ldots \\ + l_{,,}^2 + l_{,,}'^2 + l_{,,}''^2 + \ldots \\ + \text{etc.} \end{array}\right\} - \frac{\left\{\begin{array}{l} (l + l' + l'' + \ldots)^2 \\ + (l_{,} + l'_{,} + l''_{,} + \ldots)^2 \\ + (l_{,,} + l'_{,,} + l''_{,,} + \ldots)^2 \\ + \text{etc.} \end{array}\right\}}{n}$$

$$- \frac{\left\{\begin{array}{l} (l + l_{,} + l_{,,} + \ldots)^2 \\ + (l' + l'_{,} + l'_{,,} + \ldots)^2 \\ + (l'' + l''_{,} + l''_{,,} + \ldots)^2 \\ + \text{etc.} \end{array}\right\}}{m} + \frac{\left\{\begin{array}{l} l + l_{,} + l_{,,} + \ldots \\ + l' + l'_{,} + l'_{,,} + \ldots \\ + l'' + l''_{,} + l''_{,,} + \ldots \\ + \text{etc.} \end{array}\right\}^2}{mn}$$

unter welchen fünf Berechnungsarten von M man nach Belieben wählen kann, da sie alle identisch sind. Ich wiederhole, dass wie im vor. Art. n die Anzahl der Richtungen und m die Anzahl der einzelnen Gyri in der betreffenden Gruppe von Gyris bedeuten.

12.

Die durch das oben beschriebene Verfahren erlangten Beobachtungsfehler $(l - p - q)$, etc. müssen nun zufolge des im Art. 1 der

Abhandlung aufgestellten Grundsatzes als die wahrscheinlichsten Fehler der Beobachtungen angesehen werden, und da sie aus den blossen Beobachtungen, ohne Zuziehung irgend eines anderen Zweckes erlangt worden sind, so sind sie die wahrscheinlichsten Fehler der nackten Beobachtungen. Man bekommt aus ihnen den mittleren Fehler der nackten Beobachtungen nach Massgabe des Ausdrucks des Art. 150 für den mittleren Fehler überhaupt, und nennt man diesen hier μ, so wird

$$\mu = \sqrt{\frac{M}{D}}$$

wo D so zu berechnen ist, wie a. a. O. angegeben ist. In Bezug darauf kann angeführt werden, dass im gegenwärtigen Falle immer die Gleichungen

$$(Ab) = 0\,,\ (As) = 1\,,\ (Al) = (Ax)(Au)$$

statt finden. Der Ausdruck von (As) bedeutet nemlich nun nicht die einzige Station, sondern die einzige Gruppe von Gyris, die hier immer für sich allein in Betracht gezogen wird, und der Ausdruck (Au) bedeutet jetzt die Anzahl der einzelnen Gyri in der betrachteten Gruppe von Gyris.

13.

Die Bestimmung des mittleren Fehlers der nackten Beobachtungen durch eine einzige Gruppe von Gyris kann nie als hinreichend genau betrachtet werden.

Man muss bei dieser Bestimmung stets den Umstand vor Augen behalten, dass der oben angegebene Ausdruck ein genäherter ist, dessen Ableitung voraussetzt, dass im Ausdruck des Zählers desselben alle möglichen Fehler vertreten sind. Bei einer kleinen Anzahl von Beobachtungen ist dieses nun selbstverständlich immer am Wenigsten der Fall, während das Grundprincip der Wahrscheinlichkeitsrechnung (S. Art. 1 der Abhandlung) anzeigt, dass diese Bedingung sich desto mehr erfüllen wird, je grösser die Anzahl der Beobachtungen ist, die zur Bildung des Zählers M beigetragen haben. Eine Bestimmung des mittleren Fehlers aus einer kleinen Anzahl von Beobachtungen kann daher so sehr vom wahren dieser Grösse abweichen, dass sie kaum für eine genäherte Bestimmung derselben gehalten werden kann. Die zufälligen Fehler, die in einer kleinen Anzahl von Beobachtungen vorkommen, überwiegen einestheils durch ihre zufällige Beschaffenheit, ob sie zufällig gross oder ob sie zufällig klein sind, und anderntheils dadurch dass sie einen nur

kleinen Divisor bekommen. Je grösser aber die Zahl der Beobachtungen ist, die zu dieser Bestimmung verwandt wird, desto mehr gleichen sich die Zufälligkeiten aus, und desto mehr tritt der wahre Werth hervor, dessen Genauigkeit überdies durch den wachsenden Werth des Divisors vergrössert wird.

Man darf daher bei der Bestimmung eines mittleren Fehlers überhaupt nur in dem Falle auf die Sicherheit der Bestimmung rechnen, wenn eine grosse Anzahl von Beobachtungen, hier eine grosse Anzahl von Gruppen von Gyris, dazu verwandt worden ist, und es soll daher angenommen werden, dass auf der Station ausser der Gruppe von Gyris die M und D gegeben hat, noch mehrere vorhanden sind, die bez. M' und D', M'' und D'', etc. gegeben haben. Sicherer wird diese Bestimmung noch, wenn mehrere Stationen vorhanden sind, für welche man berechtigt ist, die Beobachtungen derselben Gattung zuzuzählen, welcher jene angehören. Um diesen Fall, der eigentlich zur sicheren Bestimmung des mittleren Fehlers immer vorhanden sein muss, mit Leichtigkeit in die gegenwärtigen Betrachtungen einschliessen zu können, sollen schliesslich statt der obigen Bezeichnungen die folgenden M_s und D_s, M_s' und D_s', M_s'' und D_s'', etc. eingeführt werden, und es wird daher vorausgesetzt, dass man in hinreichender Anzahl die einzelnen Bestimmungen

$$\mu^2 = \frac{M_s}{D_s}\ ,\ \mu^2 = \frac{M'_s}{D'_s}\ ,\ \mu^2 = \frac{M''_s}{D''_s}\ ,\ \text{etc.}$$

erhalten habe, in welchen s verschiedene Werthe annimmt.

14.

Um die zweckmässigste Verbindung dieser Einzelnbestimmungen zu einem Endresultat anzugeben, kann man sich des mittleren zu befürchtenden Fehlers bedienen, den Gauss für die Bestimmung des Quadrats des mittleren Fehlers entwickelt hat; da dieser aber zu verwickelt ausfällt, so kann man die Grenzen desselben, die auch von Gauss angegeben worden sind, zu diesem Zwecke anwenden. Nimmt man die weiteren Grenzen, so ist das Quadrat des mittleren, in der Bestimmung von μ^2 zu befürchtenden Fehlers

$$= \frac{2\mu^4}{D}$$

*) und das Gewicht der Bestimmung von μ^2 ist diesem umgekehrt pro-

*) S. Gauss, Theoria combinationis observationum etc. letzter Artikel.

portional. Da in diesem Ausdruck unter μ dessen wahrer Werth verstanden werden muss, welcher für jede Gattung von Beobachtungen unveränderlich ist, und die Gewichte Verhältnisszahlen sind, so ergiebt sich hieraus, dass für die Gewichte der Einzelnbestimmungen des vor. Art. bez. D_s, D_s', D_s'', etc. angenommen werden können, und hieraus folgt vermöge der Gleichung (9) der Abhandlung das Endresultat

$$\mu^2 = \frac{\Sigma\{M_s + M_s' + M_s'' + \ldots\}}{\Sigma\{D_s + D_s' + D_s'' + \ldots\}}$$

wo die Summenzeichen sich auf s beziehen. Auf diese Weise sprechen auch die Bestimmungen, die, weil sie auf einer geringen Anzahl von Beobachtungen beruhen, einzeln und für sich betrachtet, nur geringen oder gar keinen Werth haben, auf geeignete Weise mit, und tragen das Ihrige zur sicheren Bestimmung des mittleren Fehlers auf angemessene Art bei.

15.

Wenn in einer Triangulation alle Beobachtungen der Richtungen in Eine Klasse gestellt, und folglich Allen dasselbe Gewicht, welches $= 1$ gesetzt werden kann, beigelegt werden darf, so haben die im Vorhergehenden entwickelten Bestimmungen höchstens den Zweck die Güte der Beobachtungen an sich kennen zu lernen, und ihre Ausführung kann, wenn hiefür kein besonderer Grund vorhanden ist, unterlassen werden. Wenn aber auf verschiedenen Stationen verschiedene Gattungen von Beobachtungen angenommen werden müssen, dann tritt die Nothwendigkeit ihrer Ausführung ein.

Schreibt man zur Abkürzung für die rechte Seite des letzten Ausdrucks des vor. Art. K, so dass allgemein $\mu^2 = K$ wird, so bekommt man für die Stationen, deren Beobachtungen das Gewicht π beizulegen ist, die Gleichung

$$\frac{c}{\pi} = K$$

wo c eine beliebige Constante ist. Auf dieselbe Weise wird man für andere Stationen, auf welchen andere Gattungen von Beobachtungen vorkommen, die durch das im Vorhergehenden erklärte Verfahren K', K'', etc. statt K gegeben haben, die Gleichungen

$$\frac{c}{\pi'} = K', \quad \frac{c}{\pi''} = K'', \text{ etc.}$$

erhalten, wenn π', π'', etc. die Gewichte bezeichnen, die den Beobachtungen dieser Stationen beizulegen sind. Hieraus folgen

$$\pi' = \pi \frac{K}{K'}, \quad \pi'' = \pi \frac{K}{K''}, \text{ etc.}$$

oder da Ein Gewicht willkührlich ist, und man demnach

$$\pi = 1$$

setzen darf *),

$$\pi' = \frac{K}{K'}, \quad \pi'' = \frac{K}{K''}, \text{ etc.}$$

womit die Gewichte aller vorhandenen, verschiedenen Gattungen von Beobachtungen bestimmt sind, und man die Producte

$$(1,1)_s . \pi_s, \quad (2,2,1)_s . \pi_s, \quad (3,3,2)_s . \pi_s, \text{ etc. } (ll,n)_s \, \pi_s$$

berechnen kann, die zufolge des Art. 138 der Abhandlung im zweiten Theile der Auflösung gebraucht werden.

16.

Zur Berechnung von M sind noch einige Bemerkungen zu machen. Die Correctionen, die eine mit einem Theodoliten eingeschnittene Richtung verlangt, sind wenn man von den Theilungsfehlern des Kreises, und einem etwa durch das Niveau desselben angezeigten Mangel an Verticalität in der Stellung der Drehungsachse vorläufig absieht, durch den folgenden Ausdruck gegeben,

$$c \sec \theta + c' \operatorname{tg} \theta$$

in welchem 90^0-c den Winkel zwischen der Absehungslinie und der Achse des Fernrohrs, $90^0-c'$ den Winkel zwischen der Achse des Fernrohrs und der Achse der Alhidade, und θ den Winkel bezeichnet, den die Absehenslinie während der Beobachtung mit der Ebene des Horizontalkreises macht, (den Höhenwinkel des einzuschneidenden Punkts). Ausserdem hat die Erfahrung angezeigt, dass zuweilen während der Beobachtungen eine kleine Drehung des Stativs, gemeiniglich von Osten nach Westen, statt findet. Auch kommt die Correction in Betracht, die wegen etwaiger Excentricität des Fernrohrs erforderlich ist.

Die letzt genannte Correction anbelangend, die

$$\frac{r}{R} \, 206265''' \sec \theta$$

zum Ausdruck hat, wenn R die Entfernung des Gegenstandes vom Theodoliten, und r die kürzeste Entfernung der Absehenslinie vom Mittelpunkt des Theodoliten bezeichnen, ist es klar, dass sie aus dem

*) Die Bestimmung, die man hie und da findet, dass die Einheit des Gewichts solchen Beobachtungen entsprechen soll, deren mittlerer Fehler 1'' beträgt, hat gar keinen inneren Grund, und ist als unzweckmässig zu verwerfen; statt dessen ist für irgend eine der wirklich vorhandenen Gattungen von Beobachtungen $\pi=1$ zu setzen.



Resultat verschwindet, wenn man einestheils aus den Beobachtungen mit dem Fernrohr linker Hand, anderntheils aus denen mit dem Fernrohr rechter Hand die Mittel, und aus diesen Mitteln wieder das Mittel nimmt. Sind in jeder dieser beiden Lagen gleich viele Beobachtungen angestellt, so verschwindet die Correction ohne Weiteres aus dem Mittel aus allen Beobachtungen. Aber auch die beiden von c und c' abhängigen Correctionen verschwinden durch dasselbe Verfahren, vorausgesetzt dass man bei der Veränderung der Lage des Fernrohrs dieselben Zapfen der Fernrohrsachse in denselben Lagern belassen hat.

Denn durch diese Aenderung wird bewirkt, dass der Winkel θ sich in $180^0 - \theta$ verwandelt, und folglich die obige Correctionsformel in

$$- c\sec\theta - c'\operatorname{tg}\theta$$

übergeht. Wollte man zugleich mit der genannten Aenderung die Zapfen der Fernrohrsachse in die entgegengesetzten Lager bringen, so würde nur das erste Glied des vorstehenden Ausdrucks sein Zeichen ändern, also die Correction nicht ganz verschwinden.

Dem schädlichen Einfluss einer etwaigen Drehung des Stativs auf die Beobachtungen beugt man dadurch möglichst vor, dass man von Gyrus zu Gyrus abwechselnd von der linken zur rechten, und von der rechten zur linken die Gegenstände nach und nach einschneidet.

Wenn man sich daher zur Regel macht, die vorbenannten Abänderungen zusammen genommen abwechselnd von Gyrus zu Gyrus eintreten zu lassen, so sind die Summen der Beobachtungen und die Mittel daraus von den erwähnten Fehlern unabhängig.

Die Berücksichtigung der Theilungsfehler wird am vollkommensten, wenn sie im Voraus für die anzuwendenden Theodoliten besonders ermittelt worden sind, wenn dieses aber nicht der Fall ist, so bleibt nichts weiter übrig als vor Anfang eines jeden Gyrus den Nullpunkt auf dem Kreise zu verändern, wodurch man hoffen darf, dass die Wirkung der Theilungsfehler im Ganzen vermindert wird. Eine etwa hierauf übrig bleibende Wirkung der Theilungsfehler ist unter diesen Umständen nicht zu vermeiden.

Wenn das Nivellement des Theodoliten nicht vollständig ausgeführt worden ist, so muss man, um die desfallsige Correction der beobachteten Richtungen berechnen zu können, die Neigung Δi des Horizontalkreises gegen den Horizont, und die Ablesung ϱ ermitteln, die dem höchsten Punkt dieses Kreises entspricht. Beide diese Data können nur durch das

Niveau bestimmt werden, und zwar Δi mit grosser Genauigkeit, aber ϱ weit weniger genau, wenn Δi klein ist; es kann aber auch in diesem Falle ein grösserer Fehler in ϱ zugegeben werden. Nennt man nun die Ablesung für irgend eine beobachtete Richtung r, so ist die Correction derselben

$$\Delta r = \operatorname{tg} \theta \sin (r - \varrho) \Delta i$$

Man erkennt hieraus, dass diese Correction bei kleinen Höhen- oder Tiefenwinkeln θ der einzuschneidenden Gegenstände unbedeutend ist, wenn nur Δi klein ist; in gebirgigen Gegenden, wo grössere Werthe von θ vorkommen können, kann sie aber nicht unbedeutend werden, man muss also in solchen Gegenden mehr Fleiss auf die Ausführung des Nivellements des Theodoliten verwenden.

17.

Aus dem vor. Art. ist ersichtlich, dass man, mit Ausnahme der zuletzt erklärten Correction, die Beobachtungen stets so einrichten kann, dass ihre Summen oder ihre Mittel, ohne besondere Rechnungen ausführen zu müssen, frei von den Correctionen des Instruments erhalten werden. Da in den Ausgleichungsrechnungen nur diese Summen gebraucht werden, so ist es für die Ausführung dieser gar nicht nöthig die Correctionen des Instruments in Erfahrung zu bringen, es wäre denn, dass man nach der Ausführung der Beobachtungen erkannt hätte, dass hie und da im Nivellement des Theodoliten zu grosse Fehler vorgekommen wären.

Da im Gegentheil in den Unterschieden der einzelnen Beobachtungen von dem Mittel derselben, oder von einer constanten Zahl, die Correctionen des Theodoliten ihre volle Wirkung äussern, so scheint es, als müsste man für die Bestimmung des mittleren Fehlers der nackten Beobachtungen diese Correctionen kennen, oder als könnte man hiefür die Beobachtungen nur paarweise benutzen. Dass man aber hiebei die Beobachtungen auch einzeln anwenden kann, ohne den Betrag der genannten Correctionen zu kennen, soll jetzt gezeigt werden.

18.

Dass die aus Δi entstehende Correction hiebei nicht in Betracht kommt, wenn auch Δi noch so gross ist, liegt an der Hand. Da man ferner vor dem Beginn der Beobachtungen sich immer bemühen wird

c und c' fast Null zu machen, dieses mit Leichtigkeit und Sicherheit auch geschehen kann, und ein Mal hergestellt, bei einem gut gebauten Theodoliten auch lange Zeit so bleibt, so kann man die durch c und c' entstehenden Fehler in den Unterschieden der einzelnen Beobachtungen von dem Mittel derselben wohl stets als verschwindend betrachten, und es bleibt also blos die etwaige Excentricität des Fernrohrs zu betrachten übrig.

Diese Excentricität hat nicht immer Einfluss auf die genannten Unterschiede, denn nehmen wir an, dass alle eingeschnittenen Gegenstände sich in gleicher Entfernung von der Station befinden und gleiche Höhenwinkel haben, so haben selbstverständlich alle Correctionen wegen Excentricität gleichen Betrag, und üben keine andere Wirkung aus, als dass sie die Correction der Nullpunkte der Gyri ändern. Wenn folglich die eingeschnittenen Gegenstände nahe gleiche Entfernungen und kleine Höhenwinkel haben, so werden sie nur kleine Wirkungen auf die Unterschiede, die hier in Rede stehen haben. Nur wenn die eingeschnittenen Gegenstände sehr ungleiche Entfernungen haben, oder sehr grosse und kleine Höhenwinkel vorkommen, wird der Einfluss der Excentricität auf die Unterschiede wesentlich gross, und darf nicht unberücksichtigt bleiben.

Aber man braucht deshalb nicht die Centrirungen zu berechnen, man braucht nur jede Gruppe von Gyris so in zwei Abtheilungen zu theilen, dass die eine dieser alle Beobachtungen enthält, die in der einen, und die andere Abtheilung alle Beobachtungen, die in der andern Lage des Fernrohrs angestellt worden sind. Hierauf ist nun nichts weiter zu thun, wie jede dieser beiden Abtheilungen für sich dem im Vorhergehenden erklärten Verfahren zu unterwerfen, worauf sich für jede derartige Gruppe von Gyris zwei Werthe von M ergeben, deren jeder denselben Divisor D bekommt. Das partielle Resultat, welches jede so behandelte Gruppe von Gyris für das Quadrat des mittleren Fehlers der nackten Beobachtungen giebt, wird also

$$\frac{m + m'}{2D}$$

zum Ausdruck haben, wenn m und m' die beiden Werthe von M sind, die man auf die eben angezeigte Art berechnet hat.

Das Resultat, welches man durch dieses Verfahren erhält, ist nicht nur frei von der Wirkung der Excentricität des Fernrohrs, sondern auch frei von der Wirkung der von c und c' abhängigen Correctionen der



Beobachtungen, ferner sind sie in dem Falle, dass man die Beobachtungen, wie oben erklärt, angestellt hat, möglichst frei von der Wirkung einer etwa vorgekommenen Drehung des Stativs während der Beobachtungen.

Die Theilungsfehler des Kreises üben freilich jeden Falls, sei es dass man die oben beschriebenen Abtheilungen hat einführen müssen, oder sei es dass dieses nicht nöthig gewesen ist, wenn sie nicht besonders ermittelt und angebracht worden sind, eine Wirkung auf das Resultat aus, aber sie gehören alsdann auch mit zu den Fehlerquellen, die den mittleren Fehler der nackten Beobachtungen bedingen.

19.

Bei der Bestimmung des mittleren Fehlers der nackten Beobachtungen ist es unerlässlich, die einzelnen Beobachtungen zu berücksichtigen, da man, wenn man hiezu Gruppen von Beobachtungen benutzen wollte, auf zu kleine Divisoren, und daher auf wenig sichere Resultate geführt werden würde. Hingegen zur Bestimmung des mittleren Fehlers einer Richtung, welcher sich schliesslich, nach der Ausführung der Ausgleichung des Dreiecksnetzes ergiebt, alle vorhandenen Fehlerquellen in sich schliesst, und zur Ermittelung der mittleren Fehler der Resultate, oder der einzelnen Stücke des Dreiecksnetzes dient; zur Bestimmung dieses mittleren Fehlers kann man sich der Gruppen von Gyris bedienen, aus welchen die strengen Werthe der Unbekannten hervorgehen, wie in der Abhandlung erklärt ist. Bei dieser Bestimmung vereinigen sich alle Beobachtungen, die bei der Ausführung der Triangulation angestellt worden sind, zu einem Ganzen, und der Divisor D bekommt daher schon, wenn er aus den Gruppen berechnet wird, und die Ausdehnung der Triangulation nicht zu klein ist, einen ansehnlichen Werth.

Dieses Verfahren ist dem der Bildung von Normalörtern, und der Verwendung dieser zur Bestimmung der Elemente, der Planeten- oder Cometenbahnen, nebst den sich hiebei ergebenden mittleren Fehlern, analog.

20.

Will man sich indessen die vergrösserte Arbeit nicht verdriessen lassen, die hier die Zuziehung der einzelnen Beobachtungen verursacht, so lässt sich weiter nichts dagegen sagen, als dass der Erfolg oftmals dieser Bemühung nicht adäquat ist. Ich will für den Fall, dass der Eine

oder der Andere zur Anwendung dieses Verfahrens geneigt sein möchte, die Aenderungen die es veranlasst, und die sich blos auf die Berechnung der in der Abhandlung mit (ll) bezeichneten Grössen erstrecken, angeben.

Seien für irgend eine Station, und für irgend eine der auf derselben vorkommenden Gruppen von Gyris l, l', l'', etc. $l_{,}$, $l'_{,}$, $l''_{,}$, etc. etc. die Unterschiede der einzelnen Beobachtungen von den vorläufigen Werthen der Richtungen, die im ersten Stationstäfelchen angenommen worden sind, und

$$q = \frac{l + l' + l'' + \ldots}{n}$$

$$q_{,} = \frac{l_{,} + l_{,}' + l_{,}'' + \ldots}{n}$$

$$q_{,,} = \frac{l_{,,} + l'_{,,} + l_{,,}'' + \ldots}{n}$$

wo n die Anzahl der Richtungen bezeichnet, die in der betrachteten Gruppe von Gyris vorkommen, dann wird

$$(ll) = \Sigma' \left\{ \begin{array}{l} (l-q)^2 + (l'-q)^2 + (l''-q)^2 + \ldots \\ + (l_{,}-q_{,})^2 + (l_{,}'-q_{,})^2 + (l_{,}''-q_{,})^2 + \ldots \\ + (l_{,,}-q_{,,})^2 + (l_{,,}'-q_{,,})^2 + (l_{,,}''-q_{,,})^2 + \ldots \\ + \text{etc.} \end{array} \right\}$$

wo das Summenzeichen Σ' sich auf alle Gruppen von Gyris bezieht, die auf der betreffenden Station vorhanden sind. Man kann diesen Ausdruck auf ähnliche Art, wie im Art. 11 bei M geschehen ist, umformen, und erhält dadurch

$$(ll) = \Sigma \left\{ \begin{array}{l} l^2 + l'^2 + l''^2 + \ldots \\ + l_{,}^2 + l_{,}'^2 + l_{,}''^2 + \ldots \\ + l_{,,}^2 + l_{,,}'^2 + l_{,,}''^2 + \ldots \\ + \text{etc.} \end{array} \right\} - \Sigma \left\{ \frac{\left\{ \begin{array}{l} (l + l' + l'' + \ldots)^2 \\ + (l_{,} + l_{,}' + l_{,}'' + \ldots)^2 \\ + (l_{,,} + l_{,,}' + l_{,,}'' + \ldots)^2 \\ + \text{etc.} \end{array} \right\}}{n} \right\}$$

Man erkennt leicht, dass in den Fällen, in welchen auf der Station nur Eine Gruppe von Gyris vorhanden ist, (ll) sowohl mit M wie mit (ll,n) identisch wird, vorausgesetzt dass man unter den l nicht die Unterschiede der Beobachtungen von beliebigen, als vorläufige Werthe der Richtung angenommenen Zahlen, sondern von den bez. arithmetischen Mitteln versteht, die in diesem Falle die auf der Station ausgeglichenen Werthe der Richtungen sind.

Auf den Stationen, auf welchen zwei oder mehr Gruppen von Gyris vorkommen, finden die eben angeführten Identitäten nicht statt.

21.

Die Fälle, in welchen mit einem Theodoliten beobachtet worden ist, welcher mit einem excentrisch angebrachten Fernrohr versehen ist, erfordern hier eine besondere Betrachtung. Wenn auf der Station nur Eine Gruppe von Gyris vorhanden ist, dann ist leicht einzusehen, dass der Satz des vor. Art. seine volle Geltung behält, vorausgesetzt dass man die oben beschriebenen zwei Abtheilungen bildet, und unter den l die Unterschiede der Beobachtungen von den bez. beiden arithmetischen Mitteln versteht, denn die Werthe der auf der Station ausgeglichenen Richtungen sind in diesem Falle die Mittel aus jenen Mitteln.

Wenn aber auf der Station zwei oder mehr Gruppen von Gyris vorhanden sind, dann haben die arithmetischen Mittel in der Ausgleichungstheorie gar keine Bedeutung mehr, und es muss in diesen Fällen die hier in Rede stehende Untersuchung anders durchgeführt werden. Es müssen nun vor Allem, gleichwie oben, unter den l die Unterschiede der einzelnen Beobachtungen von den vorläufig angenommenen Werthen der Richtungen verstanden werden, aber diese Unterschiede begreifen die Wirkung der Excentricität des Fernrohrs in sich, die nicht zu den Beobachtungsfehlern gezählt werden kann, und daher daraus entfernt werden muss. Hiefür bieten sich zunächst zwei Mittel dar, man kann einestheils, wenn die Entfernungen der eingeschnittenen Gegenstände schon hinreichend genau bekannt sind, für jeden derselben die Wirkung der Excentricität berechnen, und die Beobachtungen davon befreien, anderntheils kann man diese Wirkung schon dadurch entfernen, dass man die Beobachtungen paarweise benutzt, nemlich vor Allem aus je zwei Beobachtungen, die in entgegengesetzten Lagen des Fernrohrs angestellt worden sind, das arithmetische Mittel nimmt, von diesen Mitteln den vorläufig angenommenen Werth der bez. Richtung abzieht, und die so erhaltenen Unterschiede als die Werthe der l betrachtet.

22.

Es ist ausser diesem noch ein drittes Verfahren möglich, welches die Kenntniss der Entfernungen der eingeschnittenen Gegenstände nicht voraussetzt, und dennoch die directe Benutzung der einzelnen Beobachtungen gestattet. Seien α, α', α'', etc. die einzelnen Beobachtungen irgend einer Richtung in einer Gruppe von Gyris, die in der einen Lage des

Fernrohrs erhalten worden sind, so wie β, β', β'', etc. die Beobachtungen derselben Richtung in derselben Gruppe von Gyris, die man in der anderen Lage des Fernrohrs erhalten hat; sei e die Wirkung der Excentricität des Fernrohrs in Bezug auf diese Richtung. Die von dieser Wirkung befreiten Beobachtungen sind also

$$\alpha + e\,,\quad \alpha' + e\,,\quad \alpha'' + e\,,\quad \text{etc.}$$
$$\beta - e\,,\quad \beta' - e\,,\quad \beta'' - e\,,\quad \text{etc.}$$

und wenn keine Beobachtungsfehler vorhanden wären, so müssten nicht nur

$$\alpha + e = \beta - e$$
$$\alpha' + e = \beta' - e$$
$$\alpha'' + e = \beta'' - e$$
$$\text{etc.}$$

sein, sondern es müsste auch aus allen diesen Gleichungen derselbe Werth von e hervorgehen. Zufolge des allgemeinen Grundsatzes des Art. 1 der Abhandlung wird hiemit, in der Voraussetzung dass allen Beobachtungen gleiche Güte beigelegt wird,

$$e = \frac{\beta + \beta' + \beta'' + \text{etc.} - \alpha - \alpha' - \alpha'' - \text{etc.}}{n}$$

wenn n die Anzahl der einzelnen Gyri der betreffenden Gruppe bezeichnet. Hiemit kann man die Summen und Unterschiede

$$\alpha + e\,,\quad \alpha' + e\,,\quad \alpha'' + e\,,\quad \text{etc.}$$
$$\beta - e\,,\quad \beta' - e\,,\quad \beta'' - e\,,\quad \text{etc.}$$

berechnen, von welchen um die bez. l zu bilden der vorläufig angenommene Werth der Richtung abzuziehen ist*). Dieses Verfahren ist für jede in der bez. Gruppe beobachtete Richtung besonders auszuführen.

Sind nun alle l dem Vorhergehenden gemäss berechnet worden, dann wird nach einem der beiden Ausdrücke des vorvor. Art. (ll) berechnet, und die darauf folgende Berechnung von (ll,n) wird ohne Veränderung so ausgeführt, wie in der Abhandlung erklärt worden ist.

---

*) Man kann bemerken, dass in dem Falle, wo die Gruppe von Gyris nur aus zwei Gyris besteht, hieraus

$$\alpha + e = \beta - e = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

hervor geht, und folglich dieses Verfahren mit dem oben angegebenen zweiten Verfahren identisch wird.



Suppl. 3. Ableitung einer bisher unbekannten Bedingungsgleichung, die im zweiten Theile der Ausgleichung eines Dreiecksnetzes statt findet.

1.

Der im Art. 72 der Abhandlung bewiesene und durch die Gleichung (64) ausgedrückte Satz, nemlich

$$Nx + N'x' + N''x'' + \ldots + \theta = 0$$

welcher, nachdem im Art. 76 $\theta = 0$ gesetzt worden, und diese Bestimmung im Verlaufe der Abhandlung beibehalten worden ist, auf

$$Nx + N'x' + N''x'' + \ldots = 0$$

reducirt wird, bezieht sich auf die Ausgleichungen auf den Stationen, indem hier x, x', x'' etc. die Resultate dieser Ausgleichungen bezeichnen. Später, nach Abänderung der anfänglich benutzten Bezeichnungen in andere, die in der Anwendung passender erscheinen, nimmt er die Form

$$Nw(1) + N'w(2) + N''w(3) + \ldots = 0$$

an, und in dieser Form ist er namentlich im § 6 angeführt, und als ein, zur Prüfung der Richtigkeit der Ausführung der numerischen Berechnungen der Ausgleichungen auf den Stationen geeignetes, einfaches Mittel bezeichnet worden, da er für beliebige Werthe der N, N', etc. gilt, und nur seine Wirksamkeit aufhört, wenn man alle N gleich Null macht. In diesem Falle, welcher im zweiten Verfahren vorkommt, ist dieser Satz nemlich stets identisch erfüllt, welche Rechnungsfehler man auch in der Ausgleichung auf den Stationen begangen haben mag.

Ich werde hier weiter gehen, und den Beweis führen, dass dieser Satz auch im zweiten Theile der Auflösung statt findet, das ist, dass auch die Gleichung

$$Nz(1)_s + N'z(2)_s + N''z(3)_s + \ldots = 0$$

statt findet, wodurch für die Prüfung der Richtigkeit der Berechnung der numerischen Werthe der $z(1)_s$, $z(2)_s$, etc. und, wie man sehen wird, auch der $f(r,I)$, $f(r,II)$, etc. eine neue Controle erlangt wird.

2.

Wenden wir uns zum Art. 35 der Abhandlung und multipliciren die dort befindlichen Ausdrücke für $(\alpha\eta)$, $(\beta\eta)$, $(\gamma\eta)$, etc., bez. mit N, N', N'', etc. dann erhalten wir

$$(\alpha\eta)N + (\beta\eta)N' + (\gamma\eta)N'' + \ldots = \{(1,1)N + (1,2)N' + (1,3)N'' + \ldots\}q$$
$$+ \{(1,2)N + (2,2)N' + (2,3)N'' + \ldots\}q'$$
$$+ \{(1,3)N + (2,3)N' + (3,3)N'' + \ldots\}q''$$
$$+ \text{etc.}$$

Aber im Art. 71 haben die mit (1,1), (1,2), etc. etc. bezeichneten Grössen dieselbe Bedeutung wie im Art. 35, und folglich geht die vorstehende Gleichung durch Hülfe der (63) in die folgende über,

$$(\alpha\eta)N + (\beta\eta)N' + (\gamma\eta)N'' + \ldots = \frac{S}{\Sigma N}(q + q' + q'' + \ldots$$

Eben so bekommt man

$$(\alpha\varkappa)N + (\beta\varkappa)N' + (\gamma\varkappa)N'' + \ldots = \frac{S}{\Sigma N}(r + r' + r'' + \ldots$$
$$(\alpha\lambda)N + (\beta\lambda)N' + (\gamma\lambda)N'' + \ldots = \frac{S}{\Sigma N}(s + s' + s'' + \ldots$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

wo zufolge der (30) q, q', q'', etc. r, r', r'', etc. s, s', s'', etc. etc. die Coefficienten der Unbekannten in den verschiedenen Bedingungsgleichungen sind.

Gehen wir nun speciel zur geodätischen Aufgabe über, und bemerken, dass in dieser die Bedingungsgleichungen blos Winkel, oder Unterschiede von paarweise genommenen Richtungen enthalten, so folgt dass in dieser Aufgabe nicht blos im Allgemeinen, sondern für jede Station ins Besondere

$$0 = q + q' + q'' + \ldots$$
$$0 = r + r' + r'' + \ldots$$
$$0 = s + s' + s'' + \ldots$$
$$\text{etc.}$$

sind. Die oben erhaltenen Gleichungen gehen daher über in

$$0 = (\alpha\eta)N + (\beta\eta)N' + (\gamma\eta)N'' + \ldots$$
$$0 = (\alpha\varkappa)N + (\beta\varkappa)N' + (\gamma\varkappa)N'' + \ldots$$
$$0 = (\alpha\lambda)N + (\beta\lambda)N' + (\gamma\lambda)N'' + \ldots$$
$$\text{etc.}$$

Da nun zufolge des Art. 49

$$z = (\alpha\eta)\alpha_{,} + (\alpha\varkappa)\beta_{,} + (\alpha\lambda)\gamma_{,} + \ldots$$
$$z' = (\beta\eta)\alpha_{,} + (\beta\varkappa)\beta_{,} + (\beta\lambda)\gamma_{,} + \ldots$$
$$z'' = (\gamma\eta)\alpha_{,} + (\gamma\varkappa)\beta_{,} + (\gamma\lambda)\gamma_{,} + \ldots$$
$$\text{etc.}$$

und dort z, z', z'', etc. dieselbe Bedeutung haben, wie später $z(1)_s$, $z(2)_s$, $z(3)_s$, etc., so bekommt man sogleich

$$0 = Nz(1)_s + N'z(2)_s + N''z(3)_s + \dots$$

für jede Station besonders. W. z. b. w.

3.

Um diesen Satz auf ein Beispiel anzuwenden nehme ich die Station (1) des Hauptbeispiels vor. Im Art. 96 wurde gefunden

$$z(1)_1 = +0''.107\ ,\ z(2)_1 = +0''.073\ ,\ z(3)_1 = -0''.440$$
$$z(4)_1 = +0.459\ ,\ z(a)_1 = -0.038\ ,\ z(b)_1 = -0.068\ ,$$

und im Art. 84 für dieselbe Station

$$N = 1.5\ ,\ N' = 3.0\ ,\ N'' = 0.5\ ,$$
$$N''' = 0\ ,\ N^{iv} = 2.5\ ,\ N^{v} = 0.9444$$

Die Rechnung giebt daher

$$z(1)_1 = (9.0294)\ ,\ z(2)_1 = (8.8633)\ ,\ z(3)_1 = (9.6435n)$$
$$N\ = (0.1769)\ ,\ N'\ = (0.4771)\ ,\ N''\ = (9.6990\ )$$
$$\overline{9.2063}\qquad \overline{9.3404}\qquad \overline{9.3425n}$$

$$z(4)_1 = (\qquad)\ ,\ z(a)_1 = (8.5798n)\ ,\ z(b)_1 = (8.8325n)$$
$$N'''\ = (-\infty)\ ,\ N^{iv}\ = (0.3979\ )\ ,\ N^{v}\ = (9.9752\ )$$
$$\overline{8.9777n}\qquad \overline{8.8077n}$$

und die Producte sind folglich

$$\begin{array}{rr} & +\ 0''.161 \\ & +\ 0.219 \\ & -\ 0.220 \\ & 0 \\ & -\ 0.095 \\ & -\ 0.064 \\ \hline \text{Sa.} = & +\ 0.001 \end{array}$$

welches für Null zu erachten ist.

Im Art. 78 wurde bewiesen, dass für jede Station, auf welcher in jedem Gyrus alle vorhandenen Richtungen eingeschnitten worden sind, die Gleichung

$$N = N' = N'' = \text{etc.}$$

statt findet, und für jede solche Station wird also der oben bewiesene Satz

$$0 = z(1)_s + z(2)_s + z(3)_s + \dots$$

Das Beispiel der Abhandlung bietet keinen solchen Fall dar, aber in der Gaussischen Abhandlung «Supplementum theoriae combinationis etc.» findet er auf allen im dortigen, aus der hannöverschen Gradmessung entlehnten, Beispiel vorkommenden Stationen statt. Da die dortige Bezeichnung (0), (1), (2), (3); (4), (5) (6); etc. mit der hier eingeführten $z(1)_1$, $z(2)_1$, $z(3)_1$, $z(4)_1$; $z(1)_2$, $z(2)_2$, $z(3)_2$; etc. identisch ist, so findet man im Art. 24 der angezogenen Abhandlung,

$$\begin{array}{lll} z(1)_1 = +\ 0''.065, & & z(1)_3 = -\ 0''.481 \\ z(2)_1 = -\ 0.212\ , & z(1)_2 = +\ 0''.233\ , & z(2)_3 = +\ 0.406 \\ z(3)_1 = +\ 0.339\ , & z(2)_2 = -\ 0.071\ , & z(3)_3 = +\ 0.021 \\ z(4)_1 = -\ 0.193\ , & z(3)_2 = -\ 0.162\ , & z(4)_3 = +\ 0.054 \\ \hline \text{Sa.} = -\ 0.001\ , & \text{Sa.} = \ \ 0.000\ . & \text{Sa.} = \ \ 0.000 \end{array}$$

u. s. w. mit dem obigen Satze übereinstimmend. Da Gauss dieses Satzes gar nicht erwähnt, so muss man schliessen, dass er ihm entgangen ist.

4.

Als Corollarium zum oben bewiesenen Satze kann noch das Folgende bemerkt werden. Da statt der oben angewandten Bezeichnungen

$$\begin{array}{c} (\alpha\eta)\ ,\ (\beta\eta)\ .\ (\gamma\eta)\ ,\ \text{etc.} \\ (\alpha\varkappa)\ ,\ (\beta\varkappa)\ ,\ (\gamma\varkappa)\ ,\ \text{etc.} \\ \text{etc.} \end{array}$$

im Verlaufe der Abhandlung die folgenden eingeführt worden sind,

$$\begin{array}{c} f(1,I)_s\ ,\ f(2,I)_s\ ,\ f(3,I)_s\ ,\ \text{etc.} \\ f(1,II)_s,\ f(2,II)_s,\ f(3,II)_s,\ \text{etc.} \\ \text{etc.} \end{array}$$

so giebt der vorvor. Art. auch die Relationen

$$\begin{array}{l} 0 = N.f(1.I)_s \ + N'.f(2,I)_s \ + N''.f(3,I)_s \ + \dots \\ 0 = N.f(1,II)_s + N'.f(2,II)_s + N''.f(3,II)_s + \dots \\ 0 = N.f(1,III)_s + N'.f(2,III)_s + N''.f(3,III)_s + \dots \\ \qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}$$

die für jede Station besonders statt finden, und auch zur Prüfung der Richtigkeit der numerischen Rechnungen, so wie zur leichteren Auffindung etwaiger Fehler in denselben dienen können.

Ich bemerke noch, dass alle hier entwickelten Relationen wegfällig werden, wenn man sich des in der Abhandlung entwickelten zweiten Verfahrens bedient.

Beobachtungen, ferner sind sie in dem Falle, dass man die Beobachtungen, wie oben erklärt, angestellt hat, möglichst frei von der Wirkung einer etwa vorgekommenen Drehung des Stativs während der Beobachtungen.

Die Theilungsfehler des Kreises üben freilich jeden Falls, sei es dass man die oben beschriebenen Abtheilungen hat einführen müssen, oder sei es dass dieses nicht nöthig gewesen ist, wenn sie nicht besonders ermittelt und angebracht worden sind, eine Wirkung auf das Resultat aus, aber sie gehören alsdann auch mit zu den Fehlerquellen, die den mittleren Fehler der nackten Beobachtungen bedingen.

19.

Bei der Bestimmung des mittleren Fehlers der nackten Beobachtungen ist es unerlässlich, die einzelnen Beobachtungen zu berücksichtigen, da man, wenn man hiezu Gruppen von Beobachtungen benutzen wollte, auf zu kleine Divisoren, und daher auf wenig sichere Resultate geführt werden würde. Hingegen zur Bestimmung des mittleren Fehlers einer Richtung, welcher sich schliesslich, nach der Ausführung der Ausgleichung des Dreiecksnetzes ergiebt, alle vorhandenen Fehlerquellen in sich schliesst, und zur Ermittelung der mittleren Fehler der Resultate, oder der einzelnen Stücke des Dreiecksnetzes dient; zur Bestimmung dieses mittleren Fehlers kann man sich der Gruppen von Gyris bedienen, aus welchen die strengen Werthe der Unbekannten hervorgehen, wie in der Abhandlung erklärt ist. Bei dieser Bestimmung vereinigen sich alle Beobachtungen, die bei der Ausführung der Triangulation angestellt worden sind, zu einem Ganzen, und der Divisor D bekommt daher schon, wenn er aus den Gruppen berechnet wird, und die Ausdehnung der Triangulation nicht zu klein ist, einen ansehnlichen Werth.

Dieses Verfahren ist dem der Bildung von Normalörtern, und der Verwendung dieser zur Bestimmung der Elemente, der Planeten- oder Cometenbahnen, nebst den sich hiebei ergebenden mittleren Fehlern, analog.

20.

Will man sich indessen die vergrösserte Arbeit nicht verdriessen lassen, die hier die Zuziehung der einzelnen Beobachtungen verursacht, so lässt sich weiter nichts dagegen sagen, als dass der Erfolg oftmals dieser Bemühung nicht adäquat ist. Ich will für den Fall, dass der Eine

oder der Andere zur Anwendung dieses Verfahrens geneigt sein möchte, die Aenderungen die es veranlasst, und die sich blos auf die Berechnung der in der Abhandlung mit (ll) bezeichneten Grössen erstrecken, angeben.

Seien für irgend eine Station, und für irgend eine der auf derselben vorkommenden Gruppen von Gyris l, l', l'', etc. $l_{,}$, $l_{,}'$, $l_{,}''$, etc. etc. die Unterschiede der einzelnen Beobachtungen von den vorläufigen Werthen der Richtungen, die im ersten Stationstäfelchen angenommen worden sind, und

$$q = \frac{l + l' + l'' + \dots}{n}$$

$$q_{,} = \frac{l_{,} + l_{,}' + l_{,}'' + \dots}{n}$$

$$q_{,,} = \frac{l_{,,} + l_{,,}' + l_{,,}'' + \dots}{n}$$

wo n die Anzahl der Richtungen bezeichnet, die in der betrachteten Gruppe von Gyris vorkommen, dann wird

$$(ll) = \Sigma \begin{Bmatrix} (l - q)^2 + (l' - q)^2 + (l'' - q)^2 + \dots \\ + (l_{,} - q_{,})^2 + (l_{,}' - q_{,})^2 + (l_{,}'' - q_{,})^2 + \dots \\ + (l_{,,} - q_{,,})^2 + (l_{,,}' - q_{,,})^2 + (l_{,,}'' - q_{,,})^2 + \dots \\ + \text{etc.} \end{Bmatrix}$$

wo das Summenzeichen Σ sich auf alle Gruppen von Gyris bezieht, die auf der betreffenden Station vorhanden sind. Man kann diesen Ausdruck auf ähnliche Art, wie im Art. 11 bei M geschehen ist, umformen, und erhält dadurch

$$(ll) = \Sigma \begin{Bmatrix} l^2 + l'^2 + l''^2 + \dots \\ + l_{,}^2 + l_{,}'^2 + l_{,}''^2 + \dots \\ + l_{,,}^2 + l_{,,}'^2 + l_{,,}''^2 + \dots \\ + \text{etc.} \end{Bmatrix} - \Sigma \begin{Bmatrix} \dfrac{\begin{Bmatrix} (l + l' + l'' + \dots)^2 \\ + (l_{,} + l_{,}' + l_{,}'' + \dots)^2 \\ + (l_{,,} + l_{,,}' + l_{,,}'' + \dots)^2 \\ + \text{etc.} \end{Bmatrix}}{n} \end{Bmatrix}$$

Man erkennt leicht, dass in den Fällen, in welchen auf der Station nur Eine Gruppe von Gyris vorhanden ist, (ll) sowohl mit M wie mit (ll,n) identisch wird, vorausgesetzt dass man unter den l nicht die Unterschiede der Beobachtungen von beliebigen, als vorläufige Werthe der Richtung angenommenen Zahlen, sondern von den bez. arithmetischen Mitteln versteht, die in diesem Falle die auf der Station ausgeglichenen Werthe der Richtungen sind.

Auf den Stationen, auf welchen zwei oder mehr Gruppen von Gyris vorkommen, finden die eben angeführten Identitäten nicht statt.

21.

Die Fälle, in welchen mit einem Theodoliten beobachtet worden ist, welcher mit einem excentrisch angebrachten Fernrohr versehen ist, erfordern hier eine besondere Betrachtung. Wenn auf der Station nur Eine Gruppe von Gyris vorhanden ist, dann ist leicht einzusehen, dass der Satz des vor. Art. seine volle Geltung behält, vorausgesetzt dass man die oben beschriebenen zwei Abtheilungen bildet, und unter den l die Unterschiede der Beobachtungen von den bez. beiden arithmetischen Mitteln versteht, denn die Werthe der auf der Station ausgeglichenen Richtungen sind in diesem Falle die Mittel aus jenen Mitteln.

Wenn aber auf der Station zwei oder mehr Gruppen von Gyris vorhanden sind, dann haben die arithmetischen Mittel in der Ausgleichungstheorie gar keine Bedeutung mehr, und es muss in diesen Fällen die hier in Rede stehende Untersuchung anders durchgeführt werden. Es müssen nun vor Allem, gleichwie oben, unter den l die Unterschiede der einzelnen Beobachtungen von den vorläufig angenommenen Werthen der Richtungen verstanden werden, aber diese Unterschiede begreifen die Wirkung der Excentricität des Fernrohrs in sich, die nicht zu den Beobachtungsfehlern gezählt werden kann, und daher daraus entfernt werden muss. Hiefür bieten sich zunächst zwei Mittel dar, man kann einestheils, wenn die Entfernungen der eingeschnittenen Gegenstände schon hinreichend genau bekannt sind, für jeden derselben die Wirkung der Excentricität berechnen, und die Beobachtungen davon befreien, anderntheils kann man diese Wirkung schon dadurch entfernen, dass man die Beobachtungen paarweise benutzt, nemlich vor Allem aus je zwei Beobachtungen, die in entgegengesetzten Lagen des Fernrohrs angestellt worden sind, das arithmetische Mittel nimmt, von diesen Mitteln den vorläufig angenommenen Werth der bez. Richtung abzieht, und die so erhaltenen Unterschiede als die Werthe der l betrachtet.

22.

Es ist ausser diesem noch ein drittes Verfahren möglich, welches die Kenntniss der Entfernungen der eingeschnittenen Gegenstände nicht voraussetzt, und dennoch die directe Benutzung der einzelnen Beobachtungen gestattet. Seien α, α', α'', etc. die einzelnen Beobachtungen irgend einer Richtung in einer Gruppe von Gyris, die in der einen Lage des

Fernrohrs erhalten worden sind, so wie β, β', β'', etc. die Beobachtungen derselben Richtung in derselben Gruppe von Gyris, die man in der anderen Lage des Fernrohrs erhalten hat; sei e die Wirkung der Excentricität des Fernrohrs in Bezug auf diese Richtung. Die von dieser Wirkung befreiten Beobachtungen sind also

$$\alpha + e\,,\quad \alpha' + e\,,\quad \alpha'' + e\,,\ \text{etc.}$$
$$\beta - e\,,\quad \beta' - e\,,\quad \beta'' - e\,,\ \text{etc.}$$

und wenn keine Beobachtungsfehler vorhanden wären, so müssten nicht nur

$$\alpha + e = \beta - e$$
$$\alpha' + e = \beta' - e$$
$$\alpha'' + e = \beta'' - e$$
$$\text{etc.}$$

sein, sondern es müsste auch aus allen diesen Gleichungen derselbe Werth von e hervorgehen. Zufolge des allgemeinen Grundsatzes des Art. 1 der Abhandlung wird hiemit, in der Voraussetzung dass allen Beobachtungen gleiche Güte beigelegt wird,

$$e = \frac{\beta + \beta' + \beta'' + \text{etc.} - \alpha - \alpha' - \alpha'' - \text{etc.}}{n}$$

wenn n die Anzahl der einzelnen Gyri der betreffenden Gruppe bezeichnet. Hiemit kann man die Summen und Unterschiede

$$\alpha + e\,,\quad \alpha' + e\,,\quad \alpha'' + e\,,\ \text{etc.}$$
$$\beta - e\,,\quad \beta' - e\,,\quad \beta'' - e\,,\ \text{etc.}$$

berechnen, von welchen um die bez. l zu bilden der vorläufig angenommene Werth der Richtung abzuziehen ist*). Dieses Verfahren ist für jede in der bez. Gruppe beobachtete Richtung besonders auszuführen.

Sind nun alle l dem Vorhergehenden gemäss berechnet worden, dann wird nach einem der beiden Ausdrücke des vorvor. Art. (ll) berechnet, und die darauf folgende Berechnung von (ll,n) wird ohne Veränderung so ausgeführt, wie in der Abhandlung erklärt worden ist.

---

*) Man kann bemerken, dass in dem Falle, wo die Gruppe von Gyris nur aus zwei Gyris besteht, hieraus

$$\alpha + e = \beta - e = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

hervor geht, und folglich dieses Verfahren mit dem oben angegebenen zweiten Verfahren identisch wird.

Suppl. 3. Ableitung einer bisher unbekannten Bedingungsgleichung, die im zweiten Theile der Ausgleichung eines Dreiecksnetzes statt findet.

1.

Der im Art. 72 der Abhandlung bewiesene und durch die Gleichung (64) ausgedrückte Satz, nemlich

$$Nx + N'x' + N''x'' + \ldots + \theta = 0$$

welcher, nachdem im Art. 76 $\theta = 0$ gesetzt worden, und diese Bestimmung im Verlaufe der Abhandlung beibehalten worden ist, auf

$$Nx + N'x' + N''x'' + \ldots = 0$$

reducirt wird, bezieht sich auf die Ausgleichungen auf den Stationen, indem hier x, x', x'' etc. die Resultate dieser Ausgleichungen bezeichnen. Später, nach Abänderung der anfänglich benutzten Bezeichnungen in andere, die in der Anwendung passender erscheinen, nimmt er die Form

$$Nw(1) + N'w(2) + N''w(3) + \ldots = 0$$

an, und in dieser Form ist er namentlich im § 6 angeführt, und als ein, zur Prüfung der Richtigkeit der Ausführung der numerischen Berechnungen der Ausgleichungen auf den Stationen geeignetes, einfaches Mittel bezeichnet worden, da er für beliebige Werthe der N, N', etc. gilt, und nur seine Wirksamkeit aufhört, wenn man alle N gleich Null macht. In diesem Falle, welcher im zweiten Verfahren vorkommt, ist dieser Satz nemlich stets identisch erfüllt, welche Rechnungsfehler man auch in der Ausgleichung auf den Stationen begangen haben mag.

Ich werde hier weiter gehen, und den Beweis führen, dass dieser Satz auch im zweiten Theile der Auflösung statt findet, das ist, dass auch die Gleichung

$$Nz(1)_s + N'z(2)_s + N''z(3)_s + \ldots = 0$$

statt findet, wodurch für die Prüfung der Richtigkeit der Berechnung der numerischen Werthe der $z(1)_s$, $z(2)_s$, etc. und, wie man sehen wird, auch der $f(r,I)$, $f(r,II)$, etc. eine neue Controle erlangt wird.

2.

Wenden wir uns zum Art. 35 der Abhandlung und multipliciren die dort befindlichen Ausdrücke für $(\alpha\eta)$, $(\beta\eta)$, $(\gamma\eta)$, etc., bez. mit N, N', N'', etc. dann erhalten wir

$$(\alpha\eta)N + (\beta\eta)N' + (\gamma\eta)N'' + \ldots = \{(1,1)N + (1,2)N' + (1,3)N'' + \ldots\}q$$
$$+ \{(1,2)N + (2,2)N' + (2,3)N'' + \ldots\}q'$$
$$+ \{(1,3)N + (2,3)N' + (3,3)N'' + \ldots\}q''$$
$$+ \text{etc.}$$

Aber im Art. 71 haben die mit (1,1), (1,2), etc. etc. bezeichneten Grössen dieselbe Bedeutung wie im Art. 35, und folglich geht die vorstehende Gleichung durch Hülfe der (63) in die folgende über,

$$(\alpha\eta)N + (\beta\eta)N' + (\gamma\eta)N'' + \ldots = \frac{S}{\Sigma N}(q + q' + q'' + \ldots$$

Eben so bekommt man

$$(\alpha\varkappa)N + (\beta\varkappa)N' + (\gamma\varkappa)N'' + \ldots = \frac{S}{\Sigma N}(r + r' + r'' + \ldots$$
$$(\alpha\lambda)N + (\beta\lambda)N' + (\gamma\lambda)N'' + \ldots = \frac{S}{\Sigma N}(s + s' + s'' + \ldots$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

wo zufolge der (30) q, q', q'', etc. r, r', r'', etc. s, s', s'', etc. etc. die Coefficienten der Unbekannten in den verschiedenen Bedingungsgleichungen sind.

Gehen wir nun speciel zur geodätischen Aufgabe über, und bemerken, dass in dieser die Bedingungsgleichungen blos Winkel, oder Unterschiede von paarweise genommenen Richtungen enthalten, so folgt dass in dieser Aufgabe nicht blos im Allgemeinen, sondern für jede Station ins Besondere

$$0 = q + q' + q'' + \ldots$$
$$0 = r + r' + r'' + \ldots$$
$$0 = s + s' + s'' + \ldots$$
$$\text{etc.}$$

sind. Die oben erhaltenen Gleichungen gehen daher über in

$$0 = (\alpha\eta)N + (\beta\eta)N' + (\gamma\eta)N'' + \ldots$$
$$0 = (\alpha\varkappa)N + (\beta\varkappa)N' + (\gamma\varkappa)N'' + \ldots$$
$$0 = (\alpha\lambda)N + (\beta\lambda)N' + (\gamma\lambda)N'' + \ldots$$
$$\text{etc.}$$

Da nun zufolge des Art. 49

$$z = (\alpha\eta)\alpha_, + (\alpha\varkappa)\beta_, + (\alpha\lambda)\gamma_, + \ldots$$
$$z' = (\beta\eta)\alpha_, + (\beta\varkappa)\beta_, + (\beta\lambda)\gamma_, + \ldots$$
$$z'' = (\gamma\eta)\alpha_, + (\gamma\varkappa)\beta_, + (\gamma\lambda)\gamma_, + \ldots$$
$$\text{etc.}$$

und dort z, z', z'', etc. dieselbe Bedeutung haben, wie später $z(1)_s$, $z(2)_s$, $z(3)_s$, etc., so bekommt man sogleich

$$0 = Nz(1)_s + N'z(2)_s + N''z(3)_s + \ldots$$

für jede Station besonders. W. z. b. w.

3.

Um diesen Satz auf ein Beispiel anzuwenden nehme ich die Station (1) des Hauptbeispiels vor. Im Art. 96 wurde gefunden

$$z(1)_1 = +0''.107\ ,\quad z(2)_1 = +0''.073\ ,\quad z(3)_1 = -0''.440$$
$$z(4)_1 = +0.459\ ,\quad z(a)_1 = -0.038\ ,\quad z(b)_1 = -0.068\ .$$

und im Art. 84 für dieselbe Station

$$N = 1.5\ ,\quad N' = 3.0\ ,\quad N'' = 0.5\ ,$$
$$N''' = 0\ ,\quad N^{IV} = 2.5\ ,\quad N^{V} = 0.9444$$

Die Rechnung giebt daher

$$\begin{array}{llllll}
z(1)_1 = (9.0294)\ , & z(2)_1 = (8.8633)\ , & z(3)_1 = (9.6435n) \\
N \;\;\; = (0.1769)\ , & N' \;\; = (0.4771)\ , & N'' \;\; = (9.6990\ ) \\
\hline
\quad\;\; 9.2063 & \quad\;\; 9.3404 & \quad\;\; 9.3425n \\
z(4)_1 = (\qquad)\ , & z(a)_1 = (8.5798n)\ , & z(b)_1 = (8.8325n) \\
N''' = (-\infty)\ , & N^{IV} = (0.3979\ )\ , & N^{V} = (9.9752\ ) \\
\hline
 & \quad\;\; 8.9777n & \quad\;\; 8.8077n
\end{array}$$

und die Producte sind folglich

$$\begin{array}{rl}
 & +\,0''.161 \\
 & +\,0.219 \\
 & -\,0.220 \\
 & \;\;\;0 \\
 & -\,0.095 \\
 & -\,0.064 \\
\hline
\text{Sa.} = & +\,0.001
\end{array}$$

welches für Null zu erachten ist.

Im Art. 78 wurde bewiesen, dass für jede Station, auf welcher in jedem Gyrus alle vorhandenen Richtungen eingeschnitten worden sind, die Gleichung

$$N = N' = N'' = \text{etc.}$$

statt findet, und für jede solche Station wird also der oben bewiesene Satz

$$0 = z(1)_s + z(2)_s + z(3)_s + \ldots$$

Das Beispiel der Abhandlung bietet keinen solchen Fall dar, aber in der Gaussischen Abhandlung «Supplementum theoriae combinationis etc.» findet er auf allen im dortigen, aus der hannöverschen Gradmessung entlehnten, Beispiel vorkommenden Stationen statt. Da die dortige Bezeichnung (0), (1), (2), (3); (4), (5) (6); etc. mit der hier eingeführten $z(1)_1$, $z(2)_1$, $z(3)_1$, $z(4)_1$; $z(1)_2$, $z(2)_2$, $z(3)_2$; etc. identisch ist, so findet man im Art. 24 der angezogenen Abhandlung,

$$\begin{array}{lll} z(1)_1 = +\ 0''.065, & & z(1)_3 = -\ 0''.481 \\ z(2)_1 = -\ 0.212\ , & z(1)_2 = +\ 0''.233\ , & z(2)_3 = +\ 0.406 \\ z(3)_1 = +\ 0.339\ , & z(2)_2 = -\ 0.071\ , & z(3)_3 = +\ 0.021 \\ z(4)_1 = -\ 0.193\ , & z(3)_2 = -\ 0.162\ , & z(4)_3 = +\ 0.054 \\ \hline \text{Sa.} = -\ 0.001\ , & \text{Sa.} = \quad 0.000\ , & \text{Sa.} = \quad 0.000 \end{array}$$

u. s. w. mit dem obigen Satze übereinstimmend. Da Gauss dieses Satzes gar nicht erwähnt, so muss man schliessen, dass er ihm entgangen ist.

4.

Als Corollarium zum oben bewiesenen Satze kann noch das Folgende bemerkt werden. Da statt der oben angewandten Bezeichnungen

$$\begin{array}{c} (\alpha\eta)\ ,\ (\beta\eta)\ ,\ (\gamma\eta)\ ,\ \text{etc.} \\ (\alpha\varkappa)\ ,\ (\beta\varkappa)\ ,\ (\gamma\varkappa)\ ,\ \text{etc.} \\ \text{etc.} \end{array}$$

im Verlaufe der Abhandlung die folgenden eingeführt worden sind,

$$\begin{array}{c} f(1,I)_s\ ,\ f(2,I)_s\ ,\ f(3,I)_s\ ,\ \text{etc.} \\ f(1,II)_s,\ f(2,II)_s,\ f(3,II)_s,\ \text{etc.} \\ \text{etc.} \end{array}$$

so giebt der vorvor. Art. auch die Relationen

$$\begin{array}{l} 0 = N.f(1,I)_s + N'.f(2,I)_s + N''.f(3,I)_s + \dots \\ 0 = N.f(1,II)_s + N'.f(2,II)_s + N''.f(3,II)_s + \dots \\ 0 = N.f(1,III)_s + N'.f(2,III)_s + N''.f(3,III)_s + \dots \\ \qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}$$

die für jede Station besonders statt finden, und auch zur Prüfung der Richtigkeit der numerischen Rechnungen, so wie zur leichteren Auffindung etwaiger Fehler in denselben dienen können.

Ich bemerke noch, dass alle hier entwickelten Relationen wegfällig werden, wenn man sich des in der Abhandlung entwickelten zweiten Verfahrens bedient.

Suppl. 4. Von der Behandlung etwa vorhandener, überzähligen Richtungen.

1.

Im Art. 79 der Abhandlung habe ich in Bezug auf etwa vorhandene überzählige Richtungen angegeben diesen in der Reihenfolge der Richtungen der betreffenden Station die letzten Stellen zuzutheilen, indem sie darauf im zweiten Theile der Auflösung so wenig wie möglich eintreten. Hier werde ich zeigen, wie man bewirken kann, dass sie im zweiten Theile der Auflösung gar nicht erscheinen, und dabei alle übrigen Vortheile, die das erste Verfahren darbietet, vollständig bewahrt bleiben. Ich werde zuerst den Fall Einer überzähligen Richtung, und darauf den, in welchem zwei solcher auf irgend einer Station vorhanden sind, betrachten; aus den hiedurch sich ergebenden Formeln kann man leicht erkennen, wie in Fällen, wo drei oder mehr überzählige Richtungen vorhanden sind, zu verfahren ist.

2.

Die erste jetzt zu beachtende Regel ist die, dass man alle vorhandenen überzähligen Richtungen aus der natürlichen Reihenfolge der überhaupt auf der Station vorhandenen Richtungen herausheben, und den Richtungen nach den Dreieckspunkten voran stellen muss.

Sei nun Eine überzählige Richtung vorhanden, so stelle ich die Aufgabe zu bewirken, dass nicht wie im Art. 76 die Coefficienten

$$(ab)\ ,\ (ac)\ ,\ (ad)\ ,\ \text{etc. nebst } (bc)$$

der Gleichungen (61) des Art. 69, sondern statt dieser die Coefficienten

$$(bc,1)\ ,\ (bd,1)\ ,\ (be,1)\ ,\ \text{etc. nebst } (cd,1)$$

Null werden.

3.

Wenden wir uns zu den Ausdrücken des Art. 43, so finden wir, dass die oben aufgestellten Bedingungen zunächst auf die folgenden Gleichungen führen,

$$\left.\begin{array}{l} (bc,1) = 0 = (bc) + (ac)\alpha' \\ (bd,1) = 0 = (bd) + (cd)\alpha' \\ (be,1) = 0 = (be) + (ae)\alpha' \\ \qquad\text{etc.} \\ (cd,1) = 0 = (cd) + (ad)\beta' \end{array}\right\} (A)$$

in welchen

$$\left.\begin{array}{l} (ab) + (aa)\alpha' = 0 \\ (ac) + (aa)\beta' = 0 \end{array}\right\} (B)$$

sind; auf der Auflösung dieser Gleichungen beruht die Auflösung unserer Aufgabe, als deren Unbekannte die im Art. 69 eingeführten, und mit N, N', N'', etc. bezeichneten Grössen zu betrachten sind.

4.

Es wären nun zunächst aus den Gleichungen des vor. Art. α' und β' zu eliminiren, und in die daraus hervorgehenden Gleichungen die allgemeinen Ausdrücke der (aa), (ab), etc. etc., die auch im Art. 69 gegeben sind, zu substituiren. Diese Gleichungen würden hierauf zu Functionen der N, N', N'', etc. werden, deren Ausdrücke hierauf durch wechselseitige Eliminationen zu entwickeln wären. Diese Behandlung dieser Gleichungen führt indess auf Ausdrücke für die genannten Unbekannten, die so verwickelt sind, dass sie sich zur Anwendung nicht eignen. Man muss daher ein anderes Verfahren anwenden, und dieses kann man auf den Umstand stützen, dass nicht alle N aus diesen Gleichungen bestimmt werden können, sondern eine dieser Grössen willkührlich bleibt. Man hat a. a. O. gesehen, dass die Anzahl der N der Anzahl aller auf der Station überhaupt eingeschnittenen Richtungen gleich ist, findet dagegen aber leicht, dass die Anzahl der Bedingungen, die im vorvor. Art. eingeführt wurden, um Eins kleiner ist, wie diese Richtungen, und hieraus folgt, dass Eine der Grössen N, N', N'', etc. willkührlich bleibt. Wenn man diesen Umstand zweckmässig benutzt, so ergiebt sich eine sehr einfache Auflösung unserer Aufgabe.

5.

Sei von nun an

$$N = 0$$

und in Folge dessen

$$(aa) = Q - (pp)\ , \quad (bb)' = Q' - (p'p')$$
$$(ab) = \quad - (pp')\ , \quad (bc)' = \quad - (p'p'')$$
$$(ac) = \quad - (pp'')\ , \quad (bd)' = \quad - (p'p''')$$
$$(ad) = \quad - (pp''')\ , \quad \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$
$$(al) = (lx)\ , \quad (bl) = (lx')$$

$$(cc)' = Q'' - (p''p'')\ , \quad (dd)' = Q''' - (p'''p''')$$
$$(cd)' = \quad - (p''p''')\ , \quad \text{etc.}$$
$$\text{etc.} \quad (dl) = (lx''')$$
$$(cl) = (lx'') \quad \text{etc.}$$

worauf

$$(bb) = (bb)' + N'^2\ , \quad (cc) = (cc)' + N''^2$$
$$(bc) = (bc)' + N'N''\ , \quad (cd) = (cd)' + N''N'''$$
$$(bd) = (bd)' + N'N'''\ , \quad \text{etc.}$$
$$\text{etc.} \quad (dd) = (dd)' + N'''^2$$
$$\text{etc.}$$

etc. werden, während der Ausdruck für (ll) unverändert bleibt. Setzt man nun diese letzteren Ausdrücke in die Gleichungen (A), so erhält man

$$N'N'' = -(bc)' - (ac)\alpha' = -(bc,1)'$$
$$N'N''' = -(bd)' - (ad)\alpha' = -(bd,1)'$$
$$N'N^{IV} = -(be)' - (ae)\alpha' = -(be,1)'$$
$$\text{etc.}$$
$$N''N''' = -(cd)' - (ad)\beta' = -(cd,1)'$$

wenn

$$(bc,1)' = (bc)' + (ac)\alpha'$$
$$(bd,1)' = (bd)' + (ad)\alpha'$$
$$(be,1)' = (be)' + (ae)\alpha'$$
$$\text{etc.}$$
$$(cd,1)' = (cd)' + (ad)\beta'$$
$$(ce,1)' = (ce)' + (ae)\beta'$$
$$\text{etc.}$$
$$(de,1)' = (de)' + (ae)\gamma'$$
$$\text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

gesetzt wird. Bestimmt man nun die N', N'', etc. so dass

$$N' = \sqrt{-\frac{(bc,1)'\,(bd,1)'}{(cd,1)}} \qquad N^{iv} = -\frac{(be,1)'}{N'}$$

$$N'' = \sqrt{-\frac{(bc,1)'\,(cd,1)'}{(bd,1)'}} \qquad \text{etc.}$$

$$N''' = \sqrt{-\frac{(bd,1)'\,(cd,1)'}{(bc,1)'}}$$

werden, so erhält man sogleich

$$(bb,1) = (bb,1)' + N'^2$$
$$(bc,1) = 0$$
$$(bd,1) = 0$$
$$(be,1) = 0$$
$$\text{etc.}$$
$$(cc,1) = (cc,1)' + N''^2$$
$$(cd,1) = 0$$
$$(ce,1) = (ce,1)' + N''N^{iv}$$
$$\text{etc.}$$
$$(dd,1) = (dd,1)' + N'''^2$$
$$(de,1) = (de,1)' + N'''N^{iv}$$
$$\text{etc.}$$
$$(ee,1) = (ee,1)' + N^{iv2}$$
$$\text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

wo die $(bb,1)'$, $(cc,1)'$, etc. eben so zu berechnen sind, wie die übrigen, ähnlich bezeichneten, Grössen, und die Berechnung der $(bl,1)$, $(cl,1)$, etc. unverändert so ausgeführt wird, wie im § 4 der Abhandlung angegeben ist. Hiemit ist die Aufgabe schon vollständig gelöst, und vorausgesetzt, dass man den wahrscheinlichsten Werth der überzähligen Richtung nicht kennen zu lernen braucht, wird der weitere Verlauf der Auflösung genau so durchgeführt, wie im § 6 bei dem «ersten Verfahren» gezeigt worden ist. In dem Falle, dass man auch den wahrscheinlichsten Werth der überzähligen Richtung kennen lernen will, kommt eine kleine Rechnung hinzu, die weiter unten erklärt werden wird.

6.

Dass im ersten Theile der Auflösung die überzählige Richtung nicht weiter eintritt, ist an sich klar, aber dass sie im zweiten Theile der Auflösung gar nicht eintritt, muss besonders gezeigt werden. Da in Folge der Coefficienten, die oben gleich Null gemacht worden sind, auch

$$\beta'' = \gamma'' = \delta'' = \text{etc.} = \gamma''' = 0$$

werden, so nehmen die allgemeinen Ausdrücke der $\eta(r,I)_s$, $\eta(r,II)_s$, etc. die folgende Form an

$$\begin{aligned}
\eta(a,I)_s &= q(a,I)_s \\
\eta(b,I)_s &= \alpha'.\,q(a,I)_s + q(b,I)_s \\
\eta(c,I)_s &= \alpha''.q(a,I)_s + q(c,I)_s \\
\eta(d,I)_s &= \alpha'''.q(a,I)_s + q(d,I)_s \\
\eta(e,I)_s &= \alpha^{IV}.q(a,I)_s + \gamma^{IV}.q(c,I)_s + \delta^{IV}.q(d,I)_s + q(e.I) \\
& \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

die durch Vertauschung der I mit der II, III, etc. nach und nach auf alle Bedingungsgleichungen auszudehnen sind. Da aber die Richtung a eine überzählige ist, die mit dem Dreiecksnetze in keiner Verbindung steht, so sind immer die Differentialquotienten

$$q(a,I)_s = q(a,II)_s = q(a,III)_s = \text{etc.} = 0$$

und streicht man demzufolge die betreffenden Glieder aus den vorstehenden Ausdrücken weg, so werden erstlich

$$\eta(a,I)_s = \eta(a,II)_s = \eta(a,III)_s = \text{etc.} = 0$$

und aus den übrigen Grössen dieser Gattung verschwindet Alles, was von der überzähligen Richtung abhängt, indem γ'', δ^{IV}, etc. etc. von den α', α'', α''', etc. unabhängig sind. Da somit die $\eta(r,I)_s$, $\eta(r,II)_s$, etc. von der überzähligen Richtung unabhängig sind, so sind die $f(r,I)_s$, $f(r,II)_s$, etc. und die Coefficienten der Endgleichungen es auch, und der ganze zweite Theil der Auflösung ist demnach von der überzähligen Richtung unabhängig. W. z. b. w.

7.

Zur leichteren Uebersicht sollen jetzt die im Vorhergehenden entwickelten Ausdrücke in die im § 6 der Abhandlung angewandte Bezeichnung übersetzt, und ausführlich angeführt werden. Die überzählige Richtung werde ich mit a bezeichnen, während wie a. a. O. die übrigen Richtungen mit den fortlaufenden Zahlen 1, 2, 3, etc. bezeichnet werden. Die Hülfsgrössen α', β', γ', etc., die von der überzähligen Richtung abhängen, sollen um sie von den übrigen ähnlichen zu unterscheiden mit a', b', c', etc. bezeichnet, und hierauf mit α', β', etc. β'', γ'', etc. γ''', δ''', etc. etc. fortgefahren werden. Da endlich $N = 0$ ist, so werde ich auch N statt N', N' statt N'', etc. schreiben. Es sind nun erst zu berechnen

$$(aa) = Q - (pp), \quad (bb) = Q' - (p'p')$$
$$(ab) = \quad - (pp'), \quad (bc) = \quad - (p'p'')$$
$$(ac) = \quad - (pp''), \quad (bd) = \quad - (p'p''')$$
$$(ad) = \quad - (pp'''), \quad \text{etc.}$$
$$\text{etc.} \quad (bl) = (lx')$$
$$(al) = (lx),$$

$$(cc) = Q'' - (p''p''), \quad (dd) = Q''' - (p'''p''')$$
$$(cd) = \quad - (p''p'''), \quad \text{etc.}$$
$$\text{etc.} \quad (dl) = (lx''')$$
$$(cl) = (lx''),$$

u. s. w. so wie (ll) wie vorher zu berechnen. Hierauf rechne man

$$a' = -\frac{(ab)}{(aa)},\ b' = -\frac{(ac)}{(aa)},\ c' = -\frac{(ad)}{(aa)}, \text{ etc. } \chi^{(a)} = -\frac{(al)}{(aa)}$$

$$(bb,1) = (bb) + (ab)a'$$
$$(bc,1) = (bc) + (ac)a'$$
$$(bd,1) = (bd) + (ad)a'$$
$$\text{etc.}$$
$$(bl,1) = (bl) + (al)a'$$

$$(cc,1) = (cc) + (ac)b'$$
$$(cd,1) = (cd) + (ad)b'$$
$$\text{etc.}$$
$$(cl,1) = (cl) + (al)b'$$

$$(dd,1) = (dd) + (ad)c'$$
$$\text{etc.}$$
$$(dl,1) = (dl) + (al)c'$$

etc. bis

$$(ll,a) = (ll) + (al)\chi^{(a)}$$

Man sieht, dass diese Ausdrücke die erste Abtheilung der bekannten Auflösung der Gleichungen bilden, auf die die Methode der kleinsten Quadrate immer hinführt. Hierauf ist zu berechnen

$$M = \sqrt{-(bc,1)\,(bd,1)\,(cd,1)}$$
$$N = -\frac{M}{(cd,1)} \qquad N''' = -\frac{(be,1)}{N}$$
$$N' = -\frac{M}{(bd,1)} \qquad N^{IV} = -\frac{(bf,1)}{N}$$
$$N'' = -\frac{M}{(bc,1)} \qquad \text{etc.}$$

worauf sich die folgenden Ausdrücke ergeben,

$$(1,1) = (bb,1) + N^2 , \quad (2,2,1) = (cc,1) + N'^2$$
$$(1,2) = 0 \quad (2,3,1) = 0$$
$$(1,3) = 0 \quad (2,4,1) = (ce,1) + N'N'''$$
$$\text{etc.} \quad \text{etc.}$$
$$(1,l) = (bl,1) \quad , \quad (2,l,1) = (cl,1)$$

$$(3,3,2) = (dd,1) + N''^2 \quad . \quad (4,4,1) = (ee,1) + N'''^2$$
$$(3,4,2) = (de,1) + N''N''' , \quad \text{etc.}$$
$$\text{etc.} \quad (4,l,1) = (el,1)$$
$$(3,l,2) = (dl,1) \quad ,$$

u. s. w. wenn mehr Richtungen vorhanden sind. Mit diesen Coefficienten wird nun die fernere Rechnung bis an das Ende derselben genau so ausgeführt wie im § 6 bei dem ersten Verfahren beschrieben worden ist. In Bezug auf die Bezeichnung ist die einzige Bemerkung zu machen, dass man statt des a. a. O. vorkommenden Ausdrucks

$$(ll,1) = (ll) + (1,l)\chi'$$

jetzt

$$(ll,1) = (ll,a) + (1,l)\chi'$$

schreiben muss.

8.

Wenn man auch den wahrscheinlichsten Werth der überzähligen Richtung kennen lernen will, so dienen dazu die folgenden Ausdrücke. Man rechne zuerst

$$a' = a'$$
$$a'' = b'$$
$$a''' = c'$$
$$a^{IV} = d' + \gamma''a'' + \gamma'''a'''$$
$$a^{V} = e' + \delta''a'' + \delta'''a''' + \delta^{IV}a^{IV}$$
$$\text{etc.}$$

worauf man

$$-w(a) = \chi^{(a)} + \chi'a' + \chi''a'' + \chi'''a''' + \chi^{IV}a^{IV} + \chi^{V}a^{V} + \ldots$$

erhält. Setzt man ferner

$$f(a,I)_s = a'Q(1,I)_s + a''Q(2,I)_s + a'''Q(3,I)_s + a^{IV}Q(4,I)_s + \ldots$$

und demgemäss für alle übrigen vorhandenen Bedingungsgleichungen, so ergiebt sich

$$z(a) = f(a,I)_s(I) + f(a,II)_s(II) + f(a,III)_s(III) + \ldots$$

wo wieder (I), (II), (III), etc. die Werthe der Unbekannten der Endgleichungen bezeichnen. Nennt man endlich wieder (a) den vorläufigen Werth, den man im ersten Anfange der Rechnung für die überzählige Richtung angenommen hat, so wird der wahrscheinlichste Werth derselben

$$x(a) = (a) + w(a) - z(a)$$

9.

Nehmen wir nun an, dass auf irgend einer Station zwei überzählige Richtungen eingeschnitten worden sind, so folgt die Auflösung dieser Aufgabe so einfach aus der vorhergehenden, sich auf Eine solche Richtung beziehenden, dass sie ohne Weiteres hingeschrieben werden kann. Man setze zuerst die beiden überzähligen Richtungen allen andern voran, und mache wie in der vorhergehenden Aufgabe

$$\begin{array}{ll}
(aa) = Q - (pp)\,, & (bb) = Q' - (p'p') \\
(ab) = \quad - (pp')\,, & (bc) = \quad - (p'p'') \\
(ac) = \quad - (pp'')\,, & (bd) = \quad - (p'p''') \\
(ad) = \quad - (pp''')\,, & \text{etc.} \\
\text{etc.} & \\
\underline{(al) = (lx)}\,, & \underline{(bl) = (lx')} \\
(cc) = Q'' - (p''p'')\,, & (dd) = Q''' - (p'''p''') \\
(cd) = \quad - (p''p''')\,, & \text{etc.} \\
\text{etc.} & \\
\underline{(cl) = (lx'')}\,, & \underline{(dl) = (lx''')}
\end{array}$$

u. s. w. und rechne auch (ll) wie immer. Hierauf berechne man die zwei ersten Abtheilungen der bekannten Auflösung, nemlich

$$a' = -\frac{(ab)}{(aa)},\; b' = -\frac{(ac)}{(aa)},\; c' = -\frac{(ad)}{(aa)},\; \text{etc. } \chi^{(a)} = -\frac{(al)}{(aa)}$$

$$\begin{aligned}
(bb,1) &= (bb) + (ab)a' \\
(bc,1) &= (bc) + (ac)a' \\
(bd,1) &= (bd) + (ad)a' \\
&\text{etc.} \\
(bl,1) &= (bl) + (al)a' \\
(cc,1) &= (cc) + (ac)b'
\end{aligned}$$

$$(cd,1) = (cd) + (ad)b'$$
etc.
$$(cl,1) = (cl) + (al)b'$$
$$(dd,1) = (dd) + (ad)c'$$
etc.
$$(dl,1) = (dl) + (al)c'$$
etc. bis
$$(ll,a) = (ll) + (al)\chi^{(a)}$$

$$b'' = -\frac{(bc,1)}{(bb,1)},\quad c'' = -\frac{(bd,1)}{(bb,1)},\quad \text{etc.}\quad \chi^{(b)} = -\frac{(bl,1)}{(bb,1)}$$

$$(cc,2) = (cc,1) + (bc,1)b''$$
$$(cd,2) = (cd,1) + (bd,1)b''$$
etc.
$$(cl,2) = (cl,1) + (bl,1)b''$$
$$(dd,2) = (dd,1) + (bd,1)c''$$
etc.
$$(dl,2) = (dl,1) + (bl,1)c''$$
etc. bis
$$(ll,b) = (ll,a) + (bl,1)\chi^{(b)}$$

Hierauf werden

$$M = \sqrt{-(cd,2)(ce,2)(de,2)}$$

$$N = -\frac{M}{(de,2)} \qquad N''' = -\frac{(cf,2)}{N}$$
$$N' = -\frac{M}{(ce,2)} \qquad N^{IV} = -\frac{(cg,2)}{N}$$
$$N'' = -\frac{M}{(cd,2)} \qquad \text{etc.}$$

berechnet, worauf man

$$(1,1) = (cc,2) + N^2, \qquad (2,2,1) = (dd,2) + N'^2$$
$$(2,4,1) = (df,2) + N'N'''$$
$$(2,5,1) = (dg,2) + N'N^{IV}$$
etc.
$$(1,l) = (cl,1), \qquad (2,l,1) = (dl,2)$$
$$(3,3,2) = (ee,2) + N''^2, \qquad (4,4,1) = (ff,2) + N'''^2$$
$$(3,4,2) = (ef,2) + N''N''', \qquad (4,5,1) = (fg,2) + N'''N^{IV}$$
$$(3,5,2) = (eg,2) + N''N^{IV}, \qquad \text{etc.}$$
$$\text{etc.} \qquad (4,l,1) = (fl,2)$$
$$(3,l,2) = (el,2) \qquad (5,5,1) = (gg,2) + N^{IV2}$$
etc.
$$(5,l,1) = (gl,2)$$

u. s. w. erhält. Mit diesen Coefficienten ist wieder die fernere Rechnung bis an das Ende derselben genau so auszuführen, wie im § 6 der Abhandlung bei dem ersten Verfahren beschrieben worden ist. Nur muss wieder statt des dort befindlichen Ausdrucks

$$(ll,1) = (ll) + (1,l)\chi'$$

jetzt

$$(ll,1) = (ll,b) + (1,l)\chi'$$

geschrieben werden.

10.

Wenn auch die wahrscheinlichsten Werthe der beiden überzähligen Richtungen zur Kenntniss gebracht werden sollen, so sind im gegenwärtigen Falle die folgenden Ausdrücke anzuwenden. Zuerst

$$\begin{array}{l}
a' = a' \\
\hline
a'' = b' + b''a' \\
b'' = \qquad b'' \\
\hline
a''' = c' + c''a' \\
b''' = \qquad c'' \\
\hline
a^{IV} = d' + d''a' \\
b^{IV} = \qquad d'' \\
\hline
a^{V} = e' + e''a' + \gamma''a''' + \gamma'''a^{IV} \\
b^{V} = \qquad e'' + \gamma''b''' + \gamma'''b^{IV} \\
\hline
a^{VI} = f' + f''a' + \delta''a''' + \delta'''a^{IV} + \delta^{IV}a^{V} \\
b^{VI} = \qquad f'' + \delta''b''' + \delta'''b^{IV} + \delta^{IV}b^{V} \\
\hline
\text{etc.}
\end{array}$$

woraus

$$-w(a) = \chi^{(a)}a' + \chi^{(b)}a' + \chi'a'' + \chi''a''' + \chi'''a^{IV} + \chi^{IV}a^{V} + \chi^{V}a^{VI} + \ldots$$
$$-w(b) = \chi^{(b)} + \chi'b'' + \chi''b''' + \chi'''b^{IV} + \chi^{IV}b^{V} + \chi^{V}b^{VI} + \ldots$$

hervorgehen. Ferner

$$f(a,I)_s = a''Q(1,I)_s + a'''Q(2,I)_s + a^{IV}Q(3,I)_s + a^{V}Q(4,I)_s + a^{VI}Q(5,I)_s + \ldots$$
$$f(b,I)_s = b''Q(1,I)_s + b'''Q(2,I)_s + b^{IV}Q(3,I)_s + b^{V}Q(4,I)_s + b^{VI}Q(5,I)_s + \ldots$$

und demgemäss für alle übrigen Bedingungsgleichungen. Endlich

$$z(a) = f(a,I)_s(I) + f(a,II)_s(II) + f(a,III)_s(III) + \ldots$$
$$z(b) = f(b,I)_s(I) + f(b,II)_s(II) + f(b,III)_s(III) + \ldots$$

nebst den wahrscheinlichsten Werthen

$$x(a) = (a) + w(a) - z(a)$$
$$x(b) = (b) + w(b) - z(b)$$

wenn wieder (a) und (b) die beim ersten Anfang der Rechnungen diesen Richtungen beigelegten vorläufigen Werthe bedeuten.

11.

Die Fälle, in welchen auf einer Station drei oder mehr überzählige Richtungen eingeschnitten worden sind, brauchen nun nicht weiter erörtert zu werden, da das in denselben einzuhaltende Verfahren sehr leicht aus den zwei behandelten Fällen sich ergiebt. Höchstens kann die Ausdehnung der Berechnung der a'', b'', etc. auf drei oder mehr Richtungen eine kleine Schwierigkeit verursachen, und ich will daher diese Ausdrücke auf drei Richtungen ausgedehnt hier zum Ueberfluss anführen.

$$
\begin{array}{lllllll}
a' = a' & & & & & & \\
\hline
a'' = b' & + b''a' & & & & & \\
b'' = & b'' & & & & & \\
\hline
a''' = c' & + c''a' & + c'''a'' & & & & \\
b''' = & c'' & + c'''b'' & & & & \\
c''' = & & c''' & & & & \\
\hline
a^{iv} = d' & + d''a' & + d'''a'' & & & & \\
b^{iv} = & d'' & + d'''b'' & & & & \\
c^{iv} = & & d''' & & & & \\
\hline
a^{v} = e' & + e''a' & + e'''a'' & & & & \\
b^{v} = & e'' & + e'''b'' & & & & \\
c^{v} = & & e''' & & & & \\
\hline
a^{vi} = f' & + f''a' & + f'''a'' & + \gamma''a^{iv} & + \gamma'''a^{v} & & \\
b^{vi} = & f'' & + f'''b'' & + \gamma''b^{iv} & + \gamma'''b^{v} & & \\
c^{vi} = & & f''' & + \gamma''c^{iv} & + \gamma'''c^{v} & & \\
\hline
a^{vii} = g' & + g''a' & + g'''a'' & + \delta''a^{iv} & + \delta'''a^{v} & + \delta^{iv}a^{vi} & \\
b^{vii} = & g'' & + g'''b'' & + \delta''b^{iv} & + \delta'''b^{v} & + \delta^{iv}b^{vi} & \\
c^{vii} = & & g''' & + \delta''c^{iv} & + \delta'''c^{v} & + \delta^{iv}c^{vi} & \\
\hline
\end{array}
$$

etc.

Vergleicht man diese Ausdrücke mit denen, die oben für zwei und eine überzähligen Richtungen gegeben worden sind, so findet man leicht die Ausdrücke für vier und mehr dieser Richtungen.

12.

Um die vorhergehenden Entwickelungen durch ein Beispiel zu erläutern, soll die erste Station des Hauptbeispiels der Abhandlung dienen,

auf welcher zwei überzählige Richtungen vorkommen. Setzt man diese jetzt voran, so steht das Täfelchen für die (pp), (pp'), etc. wie folgt

$r =$	(a)	(b)	(1)	(2)	(3)	(4)
	p	p'	p''	p'''	p^{IV}	p^{V}
p	20.4167	12.0833	3.75	2.6667	7.75	5.3333
p'		20.75	1.4167	1.3333	9.9167	5.5
p''			6.5833	4.5	0.75	0
p'''				6.0	1.5	0
p^{IV}					14.0833	2.0
p^{V}						10.1667
Q	52	51	17	16	36	23
(lx)	+ 15″.983	− 22″.704	− 9″.220	+ 13″.523	+ 6″.742	− 4″.323

Hiemit bekommt man zuerst

$(aa) = 31.5833$

$(ab) = -12.0833$, $(bb) = 30.25$

$(ac) = -3.75$, $(bc) = -1.4167$, $(cc) = 10.4167$

$(ad) = -2.6667$, $(bd) = -1.3333$, $(cd) = -4.5$

$(ae) = -7.75$, $(be) = -9.9167$, $(ce) = -0.75$

$(af) = -5.3333$, $(bf) = -5.5$, $(cf) = 0$

$(al) = +15''.983$, $(bl) = -22''.704$, $(cl) = -9''.220$

$(dd) = 10.0$

$(de) = -1.5$, $(ee) = 21.9167$

$(df) = 0$, $(ef) = -2.0$, $(ff) = 12.8333$

$(dl) = +13''.523$, $(el) = +6''.742$, $(fl) = -4''.323$

und wie in der Abhandlung

$$(ll) = 174.367$$

Die Ausdrücke des Art. 9 geben nun hiemit

$a' = (9.58273)$, $b' = (9.07459)$, $c' = (8.92651)$

$d' = (9.38984)$, $e' = (9.22754)$, $\chi^{(a)} = -(9.70420)$

wo, wie immer, die in Klammern eingeschlossenen Zahlen die Logarithmen sind. Ferner

$(bb,1) = 25.6270$

$(bc,1) = -2.8514$, $(cc,1) = 9.9714$,

$(bd,1) = -2.3535$, $(cd,1) = -4.8166$, $(dd,1) = 9.7748$

$(be,1) = -12.8818$, $(ce,1) = -1.6702$, $(de,1) = -2.1544$

$(bf,1) = -7.5405$, $(cf,1) = -0.6333$, $(df,1) = -0.4503$

$(bl,1) = -16''.5891$, $(cl,1) = -7''.3222$, $(dl,1) = +14''.8725$

$(ee,1) = \quad 20.0150$
$(ef,1) = - \quad 3.3087$, $(ff,1) = \quad 11.9327$
$(el,1) = + \ 10''.6639$, $(fl,1) = - \quad 1''.6240$, $(ll,a) = 166.279$

$b'' = (9.04636)$, $c'' = (8.96301)$, $d'' = (9.70129)$
$e'' = (9.46870)$, $\chi^{(b)} = (9.81112)$.

$(cc,2) = \quad 9.6541$
$(cd,2) = - \ 5.0785$, $(dd,2) = \quad 9.5587$
$(ce,2) = - \ 3.1035$, $(de,2) = - \quad 3.3374$, $(ee,2) = \quad 13.5397$
$(cf,2) = - \ 1.4723$, $(df,2) = - \quad 1.1428$, $(ef,2) = - \quad 7.0990$
$(cl,2) = - \ 9''.1679$, $(dl,2) = + \ 13''.3491$, $(el,2) = + \quad 2''.3253$
$(ff,2) = \quad 9.7141$
$(fl,2) = - \ 6''.5049$, $(ll,b) = 155.541$

Die Rechnung für die N, N', etc. steht nun vollständig so

$- (cd,2) = (0.70574)$
$- (ce,2) = (0.49185)$
$- (de,2) = (0.52341)$
$\quad 1.72100$
$M = (0.86050)$
$N = (0.33709)$
$N' = (0.36865)$ $\quad - (cf,2) = (0.16800)$
$N'' = (0.15476)$ $\quad N = (0.33709)$
$N''' = (9.83091)$ 9.83091

und hieraus

$N^2 = \quad 4.7225$
$NN' = +5.0785$, $N'^2 = \quad 5.4614$
$NN'' = +3.1035$, $N'N'' = +3.3374$, $N''^2 = \quad 2.0395$
$NN''' = +1.4723$, $N'N''' = +1.5833$, $N''N''' = +0.9675$, $N'''^2 = 0.4590$

womit die Werthe

$(1,1) = \quad 14.3766$, $(2,2,1) = \quad 15.0201$
$(3,3,2) = \quad 15.5792$
$(2,4,1) = + \ 0.4405$, $(3,4,2) = - \ 6.1315$
$(1,l) = - \ 9''.1679$, $(2,l,1) = +13''.3491$, $(3,l,2) = + \ 2''.3253$
$(4,4,1) = \quad 10.1731$
$(4,l,1) = - \ 6''.5049$, $(ll,b) = 155.541$

erhalten werden, auf welche die betr. Ausdrücke des § 6 anzuwenden sind. Diese geben

$$\chi' = (9.80461)\,,\ (ll,1) = 149.695$$
$$\gamma'' = -(8.46728)\,,\ \chi'' = -(9.94878)$$
$$(4,4,2) = 10.1602$$
$$(4,l,2) = -6''.8964\,,\ (ll,2) = 137.831$$
$$\gamma''' = (9.59501)\,,\ \chi''' = -(9.17404)$$
$$(4,4,3) = 7.7471$$
$$(4,l,3) = -5''.9810\,,\ (ll,3) = 137.484$$
$$\chi'' = (9.88763)$$
$$(ll,4) = 132.866$$

Dieser Werth von $(ll,4)$, welcher mit dem von $(ll,6)$ des Art. 84 identisch sein muss, stimmt mit diesem so nahe überein, wie die Ausdehnung der angewandten Logarithmen es gestattet. Es wird nun ferner durch die oben angezogenen Ausdrücke

$$w(1) = -0''.6377$$
$$w(2) = +0.9114$$
$$w(3) = -0.1545$$
$$w(4) = -0.7720$$

und diese müssen vor Allem der Bedingungsgleichung

$$Nw(1) + N'w(2) + N''w(3) + N'''w(4) = 0$$

gnügen. Man findet

$N = (0.3371)$, $N' = (0.3687)$, $N'' = (0.1548)$, $N''' = (9.8309)$
$w(1) = (9.8046n)$, $w(2) = (9.9597)$, $w(3) = (9.1889n)$, $w(4) = (9.8876n)$

und die vier Producte werden

$$\begin{array}{rr} & -1''.386 \\ & +2.130 \\ & -0.221 \\ & -0.523 \\ \hline \text{Sa.} = & 0.000 \end{array}$$

Zweitens müssen die Unterschiede der w mit denen des Art. 84 der Abhandlung übereinstimmen, und die Vergleichung zeigt, dass dieses auch der Fall ist.

13.

Zur Ausführung des zweiten Theils der Auflösung sind nun aus den vorhergehenden Rechnungen zu entlehnen,

$$(1,1) = (1.15766) \qquad \beta'' = -(8.46728)$$
$$(2,2,1) = (1.17667) \qquad \gamma''' = +(9.59501)$$
$$(3,3,2) = (1.19255)$$
$$(4,4,3) = (0.88914)$$

nebst den Differentialquotienten der Bedingungsgleichungen des Dreiecksnetzes, oder den $q(r,I)_1$, $q(r,II)_1$, etc., deren Werthe man im Art. 93 der Abhandlung findet. Die betr. im § 6 zusammengestellten Ausdrücke gaben,

r	s	$\log \eta(r,I)_1$	$\log \eta(r,II)_1$	$\log \eta(r,III)_1$	$\log \eta(r,IV)_1$	$\log \eta(r,V)_1$	$\log \eta(r,VI)_1$
1	1	0.	0. n	–	—	0.16280n	9.99860n
2		—	0.	0. n	—	9.81470	—
3		0. n	—	—	0.	—	9.28926
4		9.59501n	8.46728n	0.01257	9.78297n	9.89376	9.94385
r	s	$\log Q(r,I)_1$	$\log Q(r,II)_1$	$\log Q(r,III)_1$	$\log Q(r,IV)_1$	$\log Q(r,V)_1$	$\log Q(r,VI)_1$
1	1	8.84234	8.84234n	—	—	9.00514n	8.84094n
2		—	8.82333	8.82333n	—	8.63803	—
3		8.80745n	—	—	8.80715n	—	8.09671
4		8.70587n	7.57814n	9.12343	8.89365n	9.00462	9.05471
r	s	$\log f(r,I)_1$	$\log f(r,II)_1$	$\log f(r,III)_1$	$\log f(r,IV)_1$	$\log f(r,V)_1$	$\log f(r,VI)_1$
1	1	8.84234	8.84234n	—	—	9.00514n	8.84094n
2		7.17315	8.82406	8.84803n	7.36093	8.60735	7.52199n
3		8.92521n	7.17315n	8.71844	8.52349	8.59963	8.75690
4		8.70587n	7.57814n	9.12343	8.89365n	9.00462	9.05471

Aus der Verbindung der q mit diesen Werthen der f ergiebt sich der folgende Beitrag, den die Station (1) jetzt zu den Coefficienten der Endgleichungen liefert, dem ich die einzelnen Glieder, aus welchen er besteht, hinzufüge. Ich füge diesen ferner noch eine Abschrift der bez. Glieder hinzu, die zu den in der Abhandlung gegebenen Werthen gehören, damit man die neuen mit den alten Werthen vergleichen kann. Die oberen Abtheilungen der folgenden Tafel enthalten die neuen, und die unteren Abtheilungen die alten Werthe dieser Glieder.

r	s	logg.	(I,I)	logg.	(I,II)	logg.	(I,III)
1	1	8.84234	0.06955	8.84234n	−0.06955	—	—
2		—	—	—	—	—	—
3		8.92521	0.08418	7.17315	+0.00149	8.71844n	−0.05229
4		—	—	—	—	—	—
			0.15373		−0.06806		−0.05229
1	1	8.89734	0.07893	8.89734n	−0.07894	—	—
2		—	—	—	—	—	—
3		8.87386	0.07480	8.03663	+0.01088	8.71846n	−0.05229
4		—	—	—	—	—	—
			0.15373		−0.06806		−0.05229

r	s	logg.	(I,IV)	logg.	(I,V)	logg.	(I,VI)
1	1	—	—	9.00514n	−0.10119	8.84094n	−0.06933
2		—	—	—	—	—	—
3		8.52349n	−0.03338	8.59963	−0.03977	8.75690n	−0.05714
4		—	—	—	—	—	—
			−0.03338		−0.14096		−0.12647
1		—	—	9.06014n	−0.11485	8.89594n	−0.07868
2		—	—	—	—	—	—
3		8.52349n	−0.03338	8.41694n	−0.02612	8.67923n	−0.04778
4		—	—	—	—	—	—
			−0.03338		−0.14097		−0.12646

r	s	logg.	(II,II)	logg.	(II,III)	logg.	(II,IV)
1	1	8.84234	0.06955	—	—	—	—
2		8.82406	0.06670	8.84803n	−0.07047	7.36093	+0.00230
3		—	—	—	—	—	—
4		—	—	—	—	—	—
			0.13625		−0.07047		+0.00230
1	1	8.89734	0.07894	—	—	—	—
2		8.75814	0.05729	8.84805n	−0.07047	7.36078	+0.00230
3		—	—	—	—	—	—
4		—	—	—	—	—	—
			0.13623		−0.07047		+0.00230

r	s	logg.	(II,V)	logg.	(II,VI)	logg.	(III,III)
1	1	9.00514	+0.10119	8.84094	+0.06933	—	—
2		8.60735	+0.04049	7.52199n	−0.00333	8.84803	0.07047
3		—	—	—	—	—	—
4		—	—	—	—	9.12342	0.13287
			+0.14168		+0.06600		0.20334

r	s	logg.		logg.		logg.	
1	1	9.06014	+0.11485	8.89594	+0.07868	—	—
2		8.42862	+0.02683	8.10332n	−0.01268	8.84805	0.07047
3		—	—	—	—	—	—
4		—	—	—	—	9.12342	0.13287
			+0.14168		+0.06600		0.20334
r	**s**	**logg.**	**(III,IV)**	**logg.**	**(III,V)**	**logg.**	**(III,VI)**
1	1	—	—	—	—	—	—
2		7.36093n	−0.00230	8.60735n	−0.04049	7.52199	+0.00333
3		—	—	—	—	—	—
4		8.83965n	−0.06913	9.00462	+0.10107	9.05471	+0.11343
			−0.07143		+0.06058		+0.11676
1	1	—	—	—	—	—	—
2		7.36078n	−0.00230	8.42862n	−0.02683	8.10332	+0.01268
3		—	—	—	—	—	—
4		8.89364n	−0.06913	8.94156	+0.08741	9.01732	+0.10407
			−0.07143		+0.06058		+0.11675
r	**s**	**logg.**	**(IV,IV)**	**logg.**	**(IV,V)**	**logg.**	**(IV,VI)**
1	1	—	—	—	—	—	—
2		—	—	—	—	—	—
3		8.52349	0.03338	8.59963	+0.03977	8.75690	+0.05714
4		8.89365	0.07828	9.00462n	−0.10107	9.05471n	−0.11343
			0.11166		−0.06130		−0.05629
1	1	—	—	—	—	—	—
2		—	—	—	—	—	—
3		8.52349	0.03338	8.41694	+0.02612	8.67923	+0.04778
4		8.89364	0.07828	8.94156n	−0.08741	9.01732n	−0.10407
			0.11166		−0.06129		−0.05629
r	**s**	**logg.**	**(V,V)**	**logg.**	**(V,VI)**	**logg.**	**(VI,VI)**
1	1	9.16794	0.14721	9.00374	+0.10086	8.83954	0.06911
2		8.42205	0.02643	7.33669n	−0.00217	—	—
3		—	—	—	—	8.04616	0.01112
4		8.90886	0.08107	8.95895	+0.09098	8.95895	0.09098
			0.25471		+0.18967		0.17121
1	1	9.22294	0.16708	9.05874	+0.11448	8.89454	0.07844
2		6.24332	0.01751	7.91802n	−0.00828	—	—
3		—	—	—	—	7.96849	0.00930
4		8.84580	0.07011	8.92156	+0.08348	8.92156	0.08348
			0.25470		+0.18968		0.17122

Man erkennt hieraus, dass nach der neuen, hier ausgeführten Berechnung die Coefficienten der Endgleichungen unverändert dieselben bleiben, obgleich die einzelnen Glieder, aus welchen sie zusammenge-

setzt sind, grösstentheils sehr verschiedene Werthe haben. Die Unbekannten (I), (II), etc. dieser Gleichungen behalten daher jetzt auch noch dieselben Werthe, die im Art. 95 der Abhandlung gegeben sind. Verbindet man diese mit den oben gegebenen Werthen der f nach Anleitung des Art. 142, so bekommt man die folgenden Werthe der $z(r)$.

$$z(1) = +\ 0''.0937$$
$$z(2) = +\ 0.0603$$
$$z(3) = -\ 0.4529$$
$$z(4) = +\ 0.4460$$

Diese müssen zufolge des vorhergehenden Suppl. vor Allem der Gleichung

$$Nz(1) + N'z(2) + N''z(3) + N'''z(4) = 0$$

gnügen, und die numerische Rechnung bestätigt dieses. Denn es werden

$$N = (0.3371)\,,\ N' = (0.3687)\,,\ N'' = (0.1548)\,,\ N''' = (9.8309)$$
$$z(1) = (8.9717)\,, z(2) = (8.7803)\,,\ z(3) = (9.6560n),\ z(4) = (9.6493)$$

und die einzelnen Glieder der vorstehenden Gleichung

$$\begin{array}{rr} & +\ 0''.2036 \\ & +\ 0.1409 \\ & -\ 0.6469 \\ & +\ 0.3021 \\ \hline \text{Sa.} = & -\ 0.0003 \end{array}$$

welche Summe für Null zu achten ist. Die Unterschiede dieser Werthe der $z(r)$ müssen ferner mit den Unterschieden der in der Abhandlung im Art. 96 erhaltenen übereinstimmen, und die Vergleichung zeigt, dass dieses auch der Fall ist.

14.

Die Ausgleichung des betr. Dreiecksnetzes ist mit dem Vorhergehenden schon vollständig, auf die neue hier entwickelte Art, ausgeführt, ich werde aber um die betreffenden Ausdrücke zu erläutern, hier noch die wahrscheinlichsten Werthe der beiden überzähligen Richtungen berechnen. Durch die Ausdrücke des Art. 10 findet man

$$a' = (9.58273)$$
$$a'' = (9.20764)\,,\ b'' = (9.04634)$$
$$a''' = (9.07761)\,,\ b''' = (8.96300)$$
$$a^{iv} = (0.64116)\,,\ b^{iv} = (9.70124)$$
$$a^{v} = (9.65337)\,,\ b^{v} = (9.68960)$$

und hiemit, so wie mit den obigen Werthen der $\chi^{(a)}$, $\chi^{(b)}$, χ', etc.

$$w(a) = -0''.0204$$
$$w(b) = -0.9395$$

Der Unterschied dieser beiden, so wie die Unterschiede derselben mit den oben gefundenen Werthen der $w(1)$, $w(2)$, etc. müssen mit den Unterschieden der im Art. 84 der Abhandlung erhaltenen Werthe derselben Grössen übereinstimmen, und die Vergleichung zeigt, dass dieses auch der Fall ist.

Die Ausdrücke des Art. 10 geben ferner

r	s	$\log f(r,I)_1$	$\log f(r,II)_1$	$\log f(r,III)_1$	$\log f(r,IV)_1$	$\log f(r,V)_1$	$\log f(r,VI)_1$
a	1	8.5992n	7.6958n	8.7148	7.8539n	8.5362	8.6565
b		8.6935n	7.5412n	8.7701	7.7812n	8.6252	8.7330

und hiemit, so wie mit den Werthen der (I), (II), etc., die aus der Abhandlung zu nehmen sind, ergeben sich

$$z(a) = -0''.0505$$
$$z(b) = -0.0805$$

Der Unterschied dieser beiden, so wie die Unterschiede derselben mit den oben gefundenen Werthen der $z(1)$, $z(2)$, etc. müssen wieder mit den Unterschieden der im Art. 96 der Abhandlung erhaltenen Werthe derselben Grössen übereinstimmen, und man kann sich leicht überzeugen, dass dieses in der That der Fall ist.

Suppl. 5. Entwickelung eines besonderen Falles, in welchem die für die Ausgleichung auf der Station aufzulösenden Gleichungen sich in zwei oder mehrere, von einander völlig unabhängige Systeme zerlegen lassen.

1.

Wenn auf einer Station eine gewisse Anzahl der überhaupt beobachteten Richtungen in keinem Gyrus mit den übrigen Richtungen zugleich beobachtet worden ist, so ist von selbst klar, dass die Gleichungen, die für die Ausgleichung auf dieser Station aufzulösen sind, in zwei von einander unabhängige Systeme zerfallen müssen, und wenn auf derselben Station mehr solcher Lücken vorhanden sind, so müssen die genannten Gleichungen in mehr wie zwei von einander unabhängige

Systeme zerfallen. Um diese Fälle, die sich von selbst verstehen, handelt es sich aber hier nicht, sondern es soll gezeigt werden, dass die genannte Zerlegung sich auch auf den Stationen ausführen lässt, auf welchen eine gewisse Anzahl von Richtungen mit einer gewissen anderen Anzahl durch Eine, sowohl zugleich mit diesen wie mit jenen, beobachtete Richtung verbunden sind. Es wird dabei gezeigt werden, dass sich diese Zerlegung auf verschiedene Arten ausführen lässt.

2.

Es braucht nur der Fall der Zerlegung in zwei Systeme betrachtet zu werden, da die Behandlung der Fälle, wo mehr Zerlegungen möglich sind, daraus von selbst folgt. Die Richtung die mit allen anderen verbunden ist, will ich zuerst in der Reihenfolge voranstellen, und mit x bezeichnen, die übrigen eingeschnittenen Richtungen sollen mit x', x'', x''', etc. und $x_{,}$, $x_{,,}$, $x_{,,,}$, etc. bezeichnet und angenommen werden, dass die mit oben angehängten Strichen versehenen Richtungen mit denen, welchen die Striche unten angehängt worden sind, nicht zugleich beobachtet worden sind. Es können übrigens so viele verschiedenartige Gruppen von Gyris vorkommen, wie die Anzahl der Richtungen zulässt. Versieht man nun die Hülfsgrössen eben so mit oben und bez. unten angehängten Strichen, so findet man leicht, dass in dem hier in Betrachtung stehenden Falle die

$$\begin{array}{llll}
(p'p_{,}) = (p'p_{,,}) = (p'p_{,,,}) = \text{etc.} = 0 \\
(p''p_{,}) = (p''p_{,,}) = (p''p_{,,,}) = \text{etc.} = 0 \\
(p'''p_{,}) = (p'''p_{,,}) = (p'''p_{,,,}) = \text{etc.} = 0 \\
\qquad\quad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{array}$$

werden, und es werden daher, wenn das erste in der Abhandlung entwickelte Verfahren befolgt wird, die aufzulösenden Gleichungen die folgenden sein.

$$\begin{array}{l}
\{Q+N^2-(pp)\}x+\{NN'-(pp')\}x'+\{NN''-(pp'')\}x''+\{NN'''-(pp''')\}x'''+\text{etc.} \\
\qquad +\{NN_{,}-(pp_{,})\}x_{,}+\{NN_{,,}-(pp_{,,})\}x_{,,}+\{NN_{,,,}-(pp_{,,,})\}x_{,,,}+\text{etc.}=(lx) \\
\{NN'-(pp')\}x+\{Q'+N'^2-(p'p')\}x'+\{N'N''-(p'p'')\}x''+\{N'N'''-(p'p''')\}x'''+\text{etc.} \\
\qquad + N'N_{,}x_{,} + N'N_{,,}x_{,,} + N'N_{,,,}x_{,,,} +\text{etc.}=(lx') \\
\{NN''-(pp'')\}x+\{N'N''-(p'p'')\}x'+\{Q''+N''^2-(p''p'')\}x''+\{N''N'''-(p''p''')\}+\text{etc.} \\
\qquad + N''N_{,}x_{,} + N''N_{,,}x_{,,} + N'N_{,,,}x_{,,,} +\text{etc.}=(lx'') \\
\{NN'''-(pp''')\}x+\{N'N'''-(p'p''')\}x'+\{N''N'''-(p''p''')\}x''+\{Q'''+N'''^2-(p'''p''')\}x'''+\text{etc.} \\
\qquad + N'''N_{,}x_{,} + N'''N_{,,}x_{,,} + N'''N_{,,,}x_{,,,} +\text{etc.}=(lx''') \\
\qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{array}$$

$$\{NN_{,}-(pp_{,})\}x+N'N_{,}x'+N''N_{,}x''+N'''N_{,}x'''+\text{etc.}$$
$$+\{Q_{,}+N_{,}^2-(p_{,}p_{,})\}x_{,}+\{N_{,}N_{,,}-(p_{,}p_{,,})\}x_{,,}+\{N_{,}N_{,,,}-(p_{,}p_{,,,})\}x_{,,,}+\text{etc.}=(lx_{,})$$
$$\{NN_{,,}-(pp_{,,})\}x+N'N_{,,}x'+N''N_{,,}x''+N'''N_{,,}x'''+\text{etc.}$$
$$+\{N_{,}N_{,,}-(p_{,}p_{,,})\}x_{,}+\{Q_{,,}+N_{,,}^2-(p_{,,}p_{,,})\}x_{,,}+\{N_{,,}N_{,,,}-(p_{,,}p_{,,,})\}x_{,,,}+\text{etc.}=(lx_{,,})$$
$$\{NN_{,,,}-(pp_{,,,})\}x+N'N_{,,,}x'+N''N_{,,,}x''+N'''N_{,,,}x'''+\text{etc.}$$
$$+\{N_{,}N_{,,,}-(p_{,}p_{,,,})\}x_{,}+\{N_{,,}N_{,,,}-(p_{,,}p_{,,,})\}x_{,,}+\{Q_{,,,}+N_{,,,}^2-(p_{,,,}p_{,,,})\}x_{,,,}+\text{etc.}=(lx_{,,,})$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

3.

Um die eben erhaltenen Gleichungen in zwei von einander unabhängige Systeme zu zerlegen braucht man nur

$$NN_{,}=(pp_{,}),\quad NN_{,,}=(pp_{,,}),\quad NN_{,,,}=(pp_{,,,}),\quad \text{etc.}$$
$$N'=0,\quad N''=0,\quad N'''=0,\quad \text{etc.}$$

zu setzen, denn hiemit bekommt man sogleich

$$\{Q+N^2-(pp)\}x-(pp')x'-(pp'')x''-(pp''')x'''+\text{etc.}=(lx)$$
$$-(pp')x+\{Q'-(p'p')\}x'-(p'p'')x''-(p'p''')x'''+\text{etc.}=(lx')$$
$$-(pp'')x-(p'p'')x'+\{Q''-(p''p'')\}x''-(p''p''')x'''+\text{etc.}=(lx'')$$
$$-(pp''')x-(p'p''')x'-(p''p''')x''+\{Q'''-(p'''p''')\}x'''+\text{etc.}=(lx''')$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

$$\{Q_{,}+N_{,}^2-(p_{,}p_{,})\}x_{,}+\{N_{,}N_{,,}-(p_{,}p_{,,})\}x_{,,}+\{N_{,}N_{,,,}-(p_{,}p_{,,,})\}x_{,,,}+\text{etc.}=(lx_{,})$$
$$\{N_{,}N_{,,}-(p_{,}p_{,,})\}x_{,}+\{Q_{,,}+N_{,,}^2-(p_{,,}p_{,,})\}x_{,,}+\{N_{,,}N_{,,,}-(p_{,,}p_{,,,})\}x_{,,,}+\text{etc.}=(lx_{,,})$$
$$\{N_{,}N_{,,,}-(p_{,}p_{,,,})\}x_{,}+\{N_{,,}N_{,,,}-(p_{,,}p_{,,,})\}x_{,,}+\{Q_{,,,}+N_{,,,}^2-(p_{,,,}p_{,,,})\}x_{,,,}+\text{etc.}=(lx_{,,,})$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

Diese Gleichungen haben auch die allgemeine Form, die alle Gleichungen haben, auf welche die Methode der kleinsten Quadrate hinführt.

Die obigen Gleichungen für die Bestimmung der betr. N lassen die erste dieser Grössen, nemlich N unbestimmt, und man kann daher noch eine Bedingung einführen. Setzt man

$$N_{,}N_{,,}=(p_{,}p_{,,})$$

so werden wie im Allgemeinen, nachdem

$$M=\sqrt{(pp_{,})(pp_{,,})(p_{,}p_{,,})}$$

gesetzt worden ist,

$$N=\frac{M}{(p_{,}p_{,,})},\qquad N_{,,,}=\frac{(pp_{,,,})}{M},$$
$$N_{,}=\frac{M}{(pp_{,,})},\qquad \text{etc.}$$
$$N_{,,}=\frac{M}{(pp_{,})},$$

und das zweite System von Gleichungen nimmt die folgende Form an

$$\begin{array}{l}\{Q_{\prime}+N_{\prime}^2-(p_{\prime}p_{\prime})\}x_{\prime} \qquad\qquad\qquad +\{N_{\prime}N_{\prime\prime\prime}-(p_{\prime}p_{\prime\prime\prime})\}x_{\prime\prime\prime}+\text{etc.}=(lx_{\prime})\\ \qquad\qquad \{Q_{\prime\prime}+N_{\prime\prime}^2-(p_{\prime\prime}p_{\prime\prime})\}x_{\prime\prime}+\{N_{\prime\prime}N_{\prime\prime\prime}-(p_{\prime\prime}p_{\prime\prime\prime})\}x_{\prime\prime\prime}+\text{etc.}=(lx_{\prime\prime})\\ \{N_{\prime}N_{\prime\prime\prime}-(p_{\prime}p_{\prime\prime\prime})\}x_{\prime}+\{N_{\prime\prime}N_{\prime\prime\prime}-(p_{\prime\prime}p_{\prime\prime\prime})\}x_{\prime\prime}+\{Q_{\prime\prime\prime}+N_{\prime\prime\prime}^2-(p_{\prime\prime\prime}p_{\prime\prime\prime})\}x_{\prime\prime\prime}+\text{etc.}=(lx_{\prime\prime\prime})\\ \qquad\qquad\qquad \text{etc} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}\end{array}$$

welche auch mit der allgemeinen Form übereinstimmt. Ich bemerke hiezu noch, dass man durch dasselbe Verfahren auch die Zerlegung so bewirken kann, dass das eine System von Gleichungen die Unbekannten x, $x_{\prime}$, $x_{\prime\prime}$, $x_{\prime\prime\prime}$, etc. und das andere die x', x'', x''', etc. enthält. Man braucht zu dem Ende nur in den ersten allgemeinen Gleichungen die $x_{\prime}$, $x_{\prime\prime}$, $x_{\prime\prime\prime}$, etc. den x', x'', x''', etc. voran zu stellen.

4.

Um die Zerlegung in zwei Systeme auf eine andere Art auszuführen, werde ich der Richtung, die durchgängig beobachtet worden ist, den letzten Platz in der Reihenfolge der ersten Abtheilung von Richtungen anweisen, und diese daher so stellen,

$$x\,,\ x'\,,\ x''\,,\ x'''\,,\ \text{etc.}\,,\ x^{(h-1)}$$

während die andere

$$x^{(h-1)}\,,\ x_{\prime}\,,\ x_{\prime\prime}\,,\ x_{\prime\prime\prime}\,,\ \text{etc.}$$

sein soll, und $x^{(h-1)}$ die durchgehends beobachtete Richtung bedeutet. Man kann jetzt die N ganz auf dieselbe Weise bestimmen, wie bei Anwendung des ersten Verfahrens der Abhandlung gezeigt worden ist, und ich will daher die Coefficienten in den allgemeinen, in der Abhandlung angewandten Zeichen ausdrücken. Da es leicht zu finden ist, dass nun immer

$$\begin{array}{l}(pp_{\prime}) = (pp_{\prime\prime}) = (pp_{\prime\prime\prime}) = \text{etc.} = 0\\ (p'p_{\prime}) = (p'p_{\prime\prime}) = (p'p_{\prime\prime\prime}) = \text{etc.} = 0\\ (p''p_{\prime}) = (p''p_{\prime\prime}) = (p''p_{\prime\prime\prime}) = \text{etc.} = 0\\ \qquad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.}\end{array}$$

werden, so sollen auch

$$N_{\prime} = N_{\prime\prime} = N_{\prime\prime\prime} = \text{etc.} = 0$$

gesetzt werden, welches stets unbeschadet der eben genannten Bestimmungsart der übrigen N geschehen kann, ja eigentlich von selbst daraus folgt. Die allgemeinen Gleichungen, die man hierauf bekommt, werden nun die folgenden sein.

$$
\begin{array}{l}
(1,1)x = (lx) \\
(2,2,1)x + (2,4,1)x''' + \text{etc.} + (2,h,1)x^{(h-1)} = (lx') \\
(3,3,2)x'' + (3,4,2)x''' + \text{etc.} + (3,h,2)x^{(h-1)} = (lx'') \\
(2,4,1)x' + (3,4,2)x'' + (4,4,1)x''' + \text{etc.} + (4,h,1)x^{(h-1)} = (lx''') \\
\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \\
(2,h,1)x' + (3,h,2)x'' + (4,h,1)x''' + \text{etc.} + (h,h,1)x^{(h-1)} \\
\qquad + (h,h+1,1)x_{,} + (h,h+2,1)x_{,,} + (h,h+3,1)x_{,,,} + \text{etc.} = (lx^{(h-1)}) \\
(h,h+1,1)x^{(h-1)} + (h+1,h+1,1)x_{,} + (h+1,h+2,1)x_{,,} + (h+1,h+3,1)x_{,,,} + \text{etc.} = (lx_{,}) \\
(h,h+2,1)x^{(h-1)} + (h+1,h+2,1)x_{,} + (h+2,h+2,1)x_{,,} + (h+2,h+3,1)x_{,,,} + \text{etc.} = (lx_{,,}) \\
(h,h+3,1)x^{(h-1)} + (h+1,h+3,1)x_{,} + (h+2,h+3,1)x_{,,} + (h+3,h+3,1)x_{,,,} + \text{etc.} = (lx_{,,,}) \\
\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{array}
$$

Aber da hier $N_{,}$, $N_{,,}$, $N_{,,,}$, etc. Null sind, so entstehen, zufolge des Art. 71. der Abhandlung, die folgenden Bedingungsgleichungen

$$
\begin{array}{l}
(h,h+1,1) + (h+1,h+1,1) + (h+1,h+2,1) + (h+1,h+3,1) + \text{etc.} = 0 \\
(h,h+2,1) + (h+1,h+2,1) + (h+2,h+2,1) + (h+2,h+3,1) + \text{etc.} = 0 \\
(h,h+3,1) + (h+1,h+3,1) + (h+2,h+3,1) + (h+3,h+3,1) + \text{etc.} = 0 \\
\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{array}
$$

addirt man daher die letzte Abtheilung der vorstehenden Gleichungen, nemlich diejenigen die nur die Unbekannten $x^{(h-1)}$, $x_{,}$, $x_{,,}$, $x_{,,,}$, etc. enthalten, zur nächst vorhergehenden Gleichung, die alle Unbekannten enthält, so geht diese letzt genannte in die folgende über,

$$
\begin{array}{l}
(2,h,1)x' + (3,h,2)x'' + (4,h,1)x''' + \text{etc.} \\
+ \{(h,h,1) + (h,h+1,1) + (h,h+2,1) + (h,h+3,1) + \text{etc.}\}x^{(h-1)} \\
= (lx^{(h-1)}) + (lx_{,}) + (lx_{,,}) + (lx_{,,,}) + \text{etc.}
\end{array}
$$

aus welcher die Unbekannten $x_{,}$, $x_{,,}$, $x_{,,,}$, etc. eliminirt sind. Um aus den obigen Gleichungen, die diese Unbekannten nebst $x^{(h-1)}$ enthalten, diese letzt genannte zu eliminiren, braucht man in dieselben nur

$$
\begin{array}{ll}
(x_{,} - x^{(h-1)}) + x^{(h-1)} & \text{statt } x_{,} \\
(x_{,,} - x^{(h-1)}) + x^{(h-1)} & \text{statt } x_{,,} \\
(x_{,,,} - x^{(h-1)}) + x^{(h-1)} & \text{statt } x_{,,,} \\
\qquad \text{etc.} & \quad \text{etc.}
\end{array}
$$

zu substituiren, worauf vermöge der angeführten Bedingungsgleichungen die Coefficienten von $x^{(h-1)}$ verschwinden. Die obigen Gleichungen sind hiemit, abgesehen von der Gleichung

$$(1,1)x = (lx)$$

welche schon ein System für sich bildet, in die folgenden verwandelt worden, die zwei völlig von einander abgesonderte Systeme bilden.

$$\begin{array}{l}
(2,2,1)x' \qquad\qquad + (2,4,1)x''' + \text{etc.} + (2,h,1)x^{(h-1)} = (lx') \\
\qquad (3,3,2)x'' + (3,4,2)x''' + \text{etc.} + (3,h,2)x^{(h-1)} = (lx'') \\
(2,4,1)x' + (3,4,2)x'' + (4,4,1)x''' + \text{etc.} + (4,h,1)x^{(h-1)} = (lx''') \\
\qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.} \\
(2,h,1)x' + (3,h,2)x'' + (4,h,1)x''' + \text{etc.} + Hx^{(h-1)} = L
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
(h+1,h+1,1)x'_{,} + (h+1,h+2,1)x'_{,,} + (h+1,h+3,1)x'_{,,,} + \text{etc.} = (lx_{,}) \\
(h+1,h+2,1)x'_{,} + (h+2,h+2,1)x'_{,,} + (h+2,h+3,1)x'_{,,,} + \text{etc.} = (lx_{,,}) \\
(h+1,h+3,1)x'_{,} + (h+2,h+3,1)x'_{,,} + (h+3,h+3,1)x'_{,,,} + \text{etc.} = (lx_{,,,}) \\
\qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{array}$$

wo zur Abkürzung

$$\begin{array}{l}
H = (h,h,1) + (h,h+1,1) + (h,h+2,1) + (h,h+3,1) + \text{etc.} \\
L = (lx^{(h-1)}) + (lx_{,}) + (lx_{,,}) + (lx_{,,,}) + \text{etc.} \\
x'_{,} = x_{,} - x^{(h-1)} \\
x'_{,,} = x_{,,} - x^{(h-1)} \\
x'_{,,,} = x_{,,,} - x^{(h-1)} \\
\quad \text{etc.}
\end{array}$$

gesetzt worden sind. Auch diese Gleichungen haben, wie man sieht, die allgemeine Form, und die Bemerkung des vor. Art., dass sich ein zweites analoges Resultat erlangen lässt, kann hier wiederholt werden.

5.

Auch bei der Anwendung des zweiten Verfahrens der Abhandlung lässt sich in demselben Falle die Zerlegung der Gleichungen in zwei von einander unabhängige Systeme ausführen. Nachdem alle N Null gemacht worden sind bekommt man zuerst das folgende System von Gleichungen, die den (61) der Abhandlung entsprechen,

$$\begin{array}{l}
(1,1)x + (1,2)x' + (1,3)x'' + (1,4)x''' + \text{etc.} + (1,h)x^{(h-1)} = (lx) \\
(1,2)x + (2,2)x' + (2,3)x'' + (2,4)x''' + \text{etc.} + (2,h)x^{(h-1)} = (lx') \\
(1,3)x + (2,3)x' + (3,3)x'' + (3,4)x''' + \text{etc.} + (3,h)x^{(h-1)} = (lx'') \\
(1,4)x + (2,4)x' + (3,4)x'' + (4,4)x''' + \text{etc.} + (4,h)x^{(h-1)} = (lx''') \\
\qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{array}$$

$$(1,h)x + (2,h)x' + (3,h)x'' + (4,h)x''' + \text{etc.}$$
$$+ (h,h)x^{(h-1)} + (h,h+1)x_{,} + (h,h+2)x_{,,} + (h,h+3)x_{,,,} + \text{etc.} = (lx^{(h-1)})$$
$$(h,h+1)x^{(h-1)} + (h+1,h+1)x_{,} + (h+1,h+2)x_{,,} + (h+1,h+3)x_{,,,} + \text{etc.} = (lx_{,})$$
$$(h,h+2)x^{(h-1)} + (h+1,h+2)x_{,} + (h+2,h+2)x_{,,} + (h+2,h+3)x_{,,,} + \text{etc.} = (lx_{,,})$$
$$(h,h+3)x^{(h-1)} + (h+1,h+3)x_{,} + (h+2,h+3)x'' + (h+3,h+3)x_{,,,} + \text{etc.} = (lx_{,,,})$$
etc. etc.

und zwischen den Coefficienten dieser Gleichungen bestehen jetzt nach Art. 108 der Abhandlung die folgenden Bedingungsgleichungen,

$$(1,1) + (1,2) + (1,3) + (1,4) + \text{etc.} + (1,h) = 0$$
$$(1,2) + (2,2) + (2,3) + (2,4) + \text{etc.} + (2,h) = 0$$
$$(1,3) + (2,3) + (3,3) + (3,4) + \text{etc.} + (3,h) = 0$$
$$(1,4) + (2,4) + (3,4) + (4,4) + \text{etc.} + (4,h) = 0$$
etc. etc.

$$(1,h) + (2,h) + (3,h) + (4,h) + \text{etc.}$$
$$+ (h,h) + (h,h+1) + (h,h+2) + (h,h+3) + \text{etc.} = 0$$
$$(h,h+1) + (h+1,h+1) + (h+1,h+2) + (h+1,h+3) + \text{etc.} = 0$$
$$(h,h+2) + (h+1,h+2) + (h+2,h+2) + (h+2,h+3) + \text{etc.} = 0$$
$$(h,h+3) + (h+1,h+3) + (h+2,h+3) + (h+3,h+3) + \text{etc.} = 0$$
etc. etc.

$$(lx) + (lx') + (lx'') + (lx''') + \text{etc.} + (lx^{(h-1)})$$
$$+ (lx_{,}) + (lx_{,,}) + (lx_{,,,}) \text{ etc.} = 0$$

durch welche bewirkt wird, dass die Summe der vorstehenden Gleichungen identisch Null ist, und folglich jede derselben in den übrigen enthalten ist.

6.

Die Zerlegung der Gleichungen des vor. Art. in zwei von einander unabhängige Systeme kann nun auf die folgende Weise bewirkt werden. Substituirt man zuerst

$(x'-x) + x$ statt x'
$(x''-x) + x$ — x''
$(x'''-x) + x$ — x'''
etc.
$(x^{(h-1)}-x) + x$ statt $x^{(h-1)}$
$(x_{,}-x) + x$ — $x_{,}$
$(x_{,,}-x) + x$ — $x_{,,}$
$(x_{,,,}-x) + x$ — $x_{,,,}$
etc.

in diese Gleichungen, so gehen sie in die folgenden über,

$$(1,2)(x'-x) + (1,3)(x''-x) + (1,4)(x'''-x) + \text{etc.} + (1,h)(x^{(h-1)}-x) = (lx)$$
$$(2,2)(x'-x) + (2,3)(x''-x) + (2,4)(x'''-x) + \text{etc.} + (2,h)(x^{(h-1)}-x) = (lx')$$
$$(2,3)(x'-x) + (3,3)(x''-x) + (3,4)(x'''-x) + \text{etc.} + (3,h)(x^{(h-1)}-x) = (lx'')$$
$$(2,4)(x'-x) + (3,4)(x''-x) + (4,4)(x'''-x) + \text{etc.} + (4,h)(x^{(h-1)}-x) = (lx''')$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}$$
$$(2,h)(x'-x) + (3,h)(x''-x) + (4,h)(x'''-x) + \text{etc.}$$
$$+(h,h)(x^{(h-1)}-x) + (h,h+1)(x_{,}-x) + (h,h+2)(x_{,,}-x) + (h,h+3)(x_{,,,}-x) + \text{etc.} = (lx^{(h-1)})$$
$$(h,h+1)(x^{(h-1)}-x) + (h+1,h+1)(x_{,}-x) + (h+1,h+2)(x_{,,}-x) + (h+1,h+3)(x_{,,,}-x) + \text{etc.} = (lx_{,})$$
$$(h,h+2)(x^{(h-1)}-x) + (h+1,h+2)(x_{,}-x) + (h+2,h+2)(x_{,,}-x) + (h+2,h+3)(x_{,,,}-x) + \text{etc.} = (lx_{,,})$$
$$(h,h+3)(x^{(h-1)}-x) + (h+1,h+3)(x_{,}-x) + (h+2,h+3)(x_{,,}-x) + (h+3,h+3)(x_{,,,}-x) + \text{etc.} = (lx_{,,,})$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

von welchen immer noch jede in den übrigen enthalten ist, da ihre Summe wieder identisch Null ist. Aber jetzt ist die Anzahl der Gleichungen um Eins grösser wie die Anzahl der Unbekannten, und wir dürfen und müssen daher Eine derselben weglassen. Die übrigen Gleichungen werden hierauf von einander unabhängig, und können vollständig aufgelöst werden. Da die weggelassene Gleichung in den übrigen enthalten ist, so wird ihr durch die Auflösung dieser letzteren von selbst Gnüge geleistet. Es ist in der That gleichgültig, welche Gleichung man weglässt, aber um die allgemeine Form dieser Gleichungen zu bewahren, muss man die erste derselben weglassen.

7.

Um die Zerlegung auszuführen kann man jetzt eben so verfahren wie oben im Art. 4. Man addire die zweite Abtheilung der Gleichungen des vor. Art., hierauf ergiebt sich vermöge der Bedingungsgleichungen des Art. 5 ohne Weiteres eine Gleichung, in welcher die Unbekannten $x_{,}-x$, $x_{,,}-x$, $x_{,,,}-x$, etc. verschwunden sind. Um ferner die Unbekannte $x^{(h-1)}-x$ aus der zweiten Abtheilung zu eliminiren ist weiter nichts nöthig wie in jeder dieser, mit Ausnahme der ersten,

$$(x_{,}-x^{(h-1)}) + (x^{(h-1)}-x) \text{ statt } x_{,}-x$$
$$(x_{,,}-x^{(h-1)}) + (x^{(h-1)}-x) \quad - \quad x_{,,}-x$$
$$(x_{,,,}-x^{(h-1)}) + (x^{(h-1)}-x) \quad - \quad x_{,,,}-x$$
$$\text{etc.}$$

zu schreiben. Die Gleichungen, die durch dieses Verfahren hervorgehen, sind

$$(2,2)(x'-x) + (2,3)(x''-x) + (2,4)(x'''-x) + \text{etc.} + (2,h)(x^{(h-1)}-x) = (lx')$$
$$(2,3)(x'-x) + (3,3)(x''-x) + (3,4)(x'''-x) + \text{etc.} + (3,h)(x^{(h-1)}-x) = (lx'')$$
$$(2,4)(x'-x) + (3,4)(x''-x) + (4,4)(x'''-x) + \text{etc.} + (4,h)(x^{(h-1)}-x) = (lx''')$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

$$(2,h)(x'-x) + (3,h)(x''-x) + (4,h)(x'''-x) + \text{etc.} + H'(x^{(h-1)}x) = L'$$
$$(h+1,h+1)(x_{,}-x^{(h-1)})+(h+1,h+2)(x_{,,}-x^{(h-1)})+(h+1,h+3)(x_{,,,}-x^{(h-1)})+\text{etc.}=(lx_{,})$$
$$(h+1,h+2)(x_{,}-x^{(h-1)})+(h+2,h+2)(x_{,,}-x^{(h-1)})+(h+2,h+3)(x_{,,,}-x^{(h-1)})+\text{etc.}=(lx_{,,})$$
$$(h+1,h+3)(x_{,}-x^{(h-1)})+(h+2,h+3)(x_{,,}-x^{(h-1)})+(h+3,h+3)(x_{,,,}-x^{(h-1)})+\text{etc.}=(lx_{,,,})$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

wo

$$H' = (h,h) + (h,h+1) + (h,h+2) + (h,h+3) + \text{etc.}$$
$$L' = (lx^{(h-1)}) + (lx_{,}) + (lx_{,,}) + (lx_{,,,}) + \text{etc.}$$

sind. Die vorstehenden Gleichungen bilden wieder, wie man sieht, zwei von einander unabhängige Systeme, und das zweite dieser ist mit dem im Art. 4 erhaltenen identisch, da man hier, gleich wie dort geschehen ist, allen Coefficienten als dritten Index die Zahl 1 hinzufügen kann.

8.

Eine andere Art der Zerlegung wird auf die folgende Weise bewirkt. In die Gleichungen des Art. 5 substituire man durchgehends

$$(x-x^{(h-1)}) + x^{(h-1)} \text{ statt } x$$
$$(x'-x^{(h-1)}) + x^{(h-1)} \quad - \quad x'$$
$$\text{etc.}$$
$$(x_{,}-x^{(h-1)}) + x^{(h-1)} \quad - \quad x_{,}$$
$$\text{etc.}$$

worauf diese sich in die folgenden verwandeln

$$(1,1)u + (1,2)u' + (1,3)u'' + (1,4)u''' + \text{etc.} = (lx)$$
$$(1,2)u + (2,2)u' + (2,3)u'' + (2,4)u''' + \text{etc.} = (lx')$$
$$(1,3)u + (2,3)u' + (3,3)u'' + (3,4)u''' + \text{etc.} = (lx'')$$
$$(1,4)u + (2,4)u' + (3,4)u'' + (4,4)u''' + \text{etc.} = (lx''')$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

$$
\begin{array}{l}
(1,h)u + (2,h)u' + (3,h)u'' + (4,h)u''' + \text{etc.} \\
+ (h,h+1)u_{,} + (h,h+2)u_{,,} + (h,h+3)u_{,,,} + \text{etc.} \qquad = (lx^{(h-1)}) \\
(h+1,h+1)u_{,} + (h+1,h+2)u_{,,} + (h+1,h+3)u_{,,,} + \text{etc.} = (lx_{,}) \\
(h+1,h+2)u_{,} + (h+2,h+2)u_{,,} + (h+2,h+3)u_{,,,} + \text{etc.} = (lx_{,,}) \\
(h+1,h+3)u_{,} + (h+2,h+3)u_{,,} + (h+3,h+3)u_{,,,} + \text{etc.} = (lx_{,,,}) \\
\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{array}
$$

in welchen zur Abkürzung durchgehends

$$
\begin{array}{l}
u = x - x^{(h-1)} \\
u' = x' - x'^{(h-1)} \\
\text{etc.}
\end{array}
$$

gesetzt worden ist, und da es hier die h^{te} Gleichung ist, die weggelassen werden muss, um die allgemeine Form der Gleichungen zu bewahren, so sind die aufzulösenden Gleichungen,

$$
\begin{array}{l}
(1,1)u + (1,2)u' + (1,3)u'' + (1,4)u''' + \text{etc.} \qquad = (lx) \\
(1,2)u + (2,2)u' + (2,3)u'' + (2,4)u''' + \text{etc.} \qquad = (lx') \\
(1,3)u + (2,3)u' + (3,3)u'' + (3,4)u''' + \text{etc.} \qquad = (lx'') \\
(1,4)u + (2,4)u' + (3,4)u'' + (4,4)u''' + \text{etc.} \qquad = (lx''') \\
\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \\
(h+1,h+1)u_{,} + (h+1,h+2)u_{,,} + (h+1,h+3)u_{,,,} + \text{etc.} = (lx_{,}) \\
(h+1,h+2)u_{,} + (h+2,h+2)u_{,,} + (h+2,h+3)u_{,,,} + \text{etc.} = (lx_{,,}) \\
(h+1,h+3)u_{,} + (h+2,h+3)u_{,,} + (h+3,h+3)u_{,,,} + \text{etc.} = (lx_{,,,}) \\
\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{array}
$$

die auch in zwei von einander abgesonderte Systeme zerfallen, deren jedes die allgemeine Form hat. Das zweite System ist wieder mit den zwei zunächst vorhergehenden identisch. Es würden sich wohl noch mehr Verfahren angeben lassen um diese Zerlegung zu bewirken, allein ich will es bei den im Vorhergehenden erklärten bewenden lassen.

9.

Als Beispiel zu den vorhergehenden Entwickelungen soll die Station Mallwischken der Preuss. Landestriangulation des Jahres 1858 dienen, auf welcher unter anderen der hier abgehandelte Fall eintritt*). Für die Bezeichnungen werde ich die wählen, die in der Abhandlung für die

*) S. Die Königl. Preuss. Landestriangulation. Hauptdreiecke. Erster Theil, etc. Berlin 1866.

Anwendung als die zweckmässigste erkannt worden sind. Es sollen demgemäss die eingeschnittenen Gegenstände,

Szillen mit (1)
Ob. Eissuln — (2)
Wersmeningken — (3)
Pillkallen — (4)
Kattenau — (5)
Schwentischken — (6)
Kucklinsberg — (7)

und demgemäss die Hülfsgrössen und die Coefficienten der Gleichungen bezeichnet werden. Lässt man nun vorläufig die Centrirungen weg, welches fast immer, und hier jedenfalls zulässig ist, so steht das erste Stationstäfelchen wie folgt,

r	Vorl. Werthe	20	4	4	24
(1)	0° 0′ 0″	0″,00	0″,00	—	—
(2)	31 50 10	−25,40	−15,55	—	—
(3)	77 34 45	+28,40	− 4,70	0″,00	—
(4)	119 30 30	− 2,03	—	− 7,40	—
(5)	161 13 45	+ 2,29	—	− 9,15	0″,00
(6)	191 48 45	—	—	—	+21,85
(7)	254 45 55	—	—	—	+55,93
	Summen	+ 3″,26	−20″,25	−16″,55	+77″,78
	Mittel	+ 0″,652	− 6″,750	− 5″,517	+25″,927

von welchen Daten in jedem Falle ausgegangen werden muss.

10.

Es soll nun zuerst die Ausgleichung auf dieser Station ohne Anwendung der Zerlegung der Gleichungen in zwei, von einander unabhängige, Systeme ausgeführt werden, und es soll hiebei die Reihenfolge der Richtungen so gewählt werden wie im Art. 2 verlangt wurde. Es soll also die durchgehends beobachtete Richtung allen übrigen vorangestellt werden, und das Täfelchen des vor. Art. zeigt, dass dieses die Richtung (5) ist. Das zweite Stationstäfelchen steht also wie folgt.

No.	(5)	(1)	(2)	(3)	(4)	(6)	(7)	p	P	$p^2 : P$
1	+ 1″,638	−0″,652	−26″,052	+27″,748	−2″,682	—	—	20	100	4,0
2	—	+6,750	− 8,800	+ 2,050	—	—	—	4	12	1,3333
3	− 3,633	—	—	+ 5,516	−1″,883	—	—	4	12	1,3333
4	−25,927	—	—	—	—	−4″,077	+30″,004	24	72	8,0
(lx)	−27″,922	+6″,098	−34″,852	+35″,314	−4″,565	−4″,077	+30″,004	Sa.	196	
Q	48	24	24	28	24	24	24	=	196	

Wählen wir nun die Accente und Indices in der natürlichen Reihenfolge, ungeachtet dieses in der Numerirung der Richtungen nicht der Fall ist, so erhalten wir das folgende Täfelchen der (pp).

	p	p'	p''	p'''	p^{IV}	p^{V}	p^{VI}
p	13.3333	4.0	4.0	5.3333	5.3333	8.0	8.0
p'		5.3333	5.3333	5.3333	4.0	0	0
p''			5.3333	5.3333	4.0	0	0
p'''				6.6667	5.3333	0	0
p^{IV}					5.3333	0	0
p^{V}						8.0	8.0
p^{VI}							8.0

Die Berechnung der N und der zu den Controlen erforderlichen Grössen, die nach den Angaben der Abhandlungen auszuführen ist, steht nun im Einzelnen wie folgt, wo ich der Kürze wegen die Bezeichnung ob Logarithmus oder Zahl weggelassen habe, da dieses ohnehin erkennbar ist.

(pp') . . . 0.60206 $\qquad$ (pp''') . . . 0.72700 , (pp^{IV}) . . . 0.72700
(pp'') . . . 0.60206 $\qquad$ N . . . 0.23856 , . . . 0.23856
$(p'p'')$ . . . 0.72700 $\qquad$ (pp^{V}) . . . 0.90309 , (pp^{VI}) . . . 0.90309

1.93112

M . . . 0.96556

N . . . 0.23856 = 1.7320
N' . . . 0.36350 = 2.3094
N'' . . . 0.36350 = 2.3094
N''' . . 0.48844 = 3.0792
N^{IV} . . . 0.48844 = 3.0792
N^{V} . . . 0.66453 = 4.6188
N^{VI} . . . 0.66453 = 4.6188

ΣN . . . 1.33739 = 21.7468

$N\Sigma N$ . . . 1.57595 = 37.666
$N'\Sigma N$ . . . 1.70089 = 50.221
$N''\Sigma N$ . . . 1.70089 = 50.221
$N'''\Sigma N$ . . . 1.82583 = 66.962
$N^{IV}\Sigma N$ . . . 1.82583 = 66.962
$N^{V}\Sigma N$ . . . 2.00192 = 100.443
$N^{VI}\Sigma N$ . . . 2.00192 = 100.443

Die Coefficienten der aufzulösenden Gleichungen bekommen hierauf die folgenden Werthe.

$(1,1) = 37.667$, $(3,3,2) = 24.0$, $(4,4,1) = 30.8149$
$(2,2,1) = 24.0$, $(3,4,2) = +1.7779$, $(4,5,1) = +4.1483$
$(2,4,1) = +1.7779$, $(3,5,2) = +3.1112$, $(4,6,1) = +14.222$
$(2,5,1) = +3.1112$, $(3,6,2) = +10.6667$, $(4,7,1) = +14.222$
$(2,6,1) = +10.6667$, $(3,7,2) = +10.6667$
$(2,7,1) = +10.6667$
$(5,5,1) = 28.1483$, $(6,6,1) = 37.333$, $(7,7,1) = 37.333$
$(5,6,1) = +14.222$, $(6,7,1) = +13.333$ $(ll) = 182.752$
$(5,7,1) = +14.222$

Durch die vorstehenden Zahlenwerthe sind diese Coefficienten controlirt worden. Die fernere Rechnung giebt nun nach und nach

$$\chi' = +(9.86999)$$
$$(ll,1) = 162.054$$
$$\gamma'' = -(8.86970)\ ,\ \delta'' = -(9.11272)\ ,\ \varepsilon'' = -(9.64782)$$
$$\zeta'' = -(9.64782)\ ,\ \chi'' = -(9.40498)$$

$(4,4,2) = 30.6832$
$(4,5,2) = +3.9178$, $(5,5,2) = 27.7450$
$(4,6,2) = +13.4318$, $(5,6,2) = +12.8392$, $(6,6,2) = 32.5925$
$(4,7,2) = +13.4318$, $(5,7,2) = +12.8392$, $(6,7,2) = +8.5925$
$(4,l,2) = +34''.8624$, $(5,l,2) = -5''.3555$, $(6,l,2) = -6''.7873$

$(7,7,2) = 32.5925$
$(7,l,2) = +27''.2937$, $(ll,2) = 160.505$

$\gamma''' = -(8.86970)$, $\delta''' = -(9.11272)$, $\varepsilon''' = -(9.64782)$
$\zeta''' = -(9.64782)$, $\chi''' = +(0.16202)$

$(4,4,3) = 30.5515$
$(4,5,3) = +3.6873$, $(5,5,3) = 27.3417$
$(4,6,3) = +12.6416$, $(5,6,3) = +11.4564$, $(6,6,3) = 27.8517$
$(4,7,3) = +12.6416$, $(5,7,3) = +11.4564$, $(6,7,3) = +3.8517$
$(4,l,3) = +37''.4441$, $(5,l,3) = -0''.8375$, $(6,l,3) = +8''.7027$

$(7,7,3) = 27.8517$
$(7,l,3) = 42''.7837$, $(ll,3) = 109.894$

$\delta^{iv} = -(9.08167)$, $\varepsilon^{iv} = -(9.61677)$, $\zeta^{iv} = -(9.61677)$
$\chi^{iv} = -(0.08835)$

$(5,5,4) = 26.8967$
$(5,6,4) = + 9.9306$, $(6,6,4) = 22.6208$
$(5,7,4) = + 9.9306$, $(6,7,4) = - 1.3792$, $(7,7,4) = 22.6208$
$(5,l,4) = - 5''.3567$, $(6,l,4) = - 6''.7909$, $(7,l,4) = + 27''.2901$

$(ll,4) = 64.003$
$\varepsilon^{v} = -(9.56727)$, $\zeta^{v} = -(9.56727)$, $\chi^{v} = +(9.29920)$

$(6,6,5) = 18.9544$
$(6,7,5) = - 5.0456$, $(7,7,5) = 18.9544$
$(6,l,5) = - 4''.8132$, $(7,l,5) = + 29''.2678$, $(ll,5) = 62.936$
$\zeta^{vi} = +(9.42520)$, $\chi^{vi} = +(9.40473)$
$(7,7,6) = 17.6111$
$(7,l,6) = + 27''.9865$, $(ll,6) = 61.714$
$\chi^{vii} = -(0.20116)$
$(ll,7) = 17.240$

Ferner
$\beta^{iii} = -(8.86970)$, $\beta^{iv} = -(9.08167)$, $\beta^{v} = -(9.56730)$, $\beta^{vi} = -(9.66980)$
$\gamma^{iii} = -(8.86970)$, $\gamma^{iv} = -(9.08167)$, $\gamma^{v} = -(9.56730)$, $\gamma^{vi} = -(9.66980)$
$\delta^{iv} = -(9.08167)$, $\delta^{v} = -(9.56730)$, $\delta^{vi} = -(9.66980)$
$\varepsilon^{v} = -(9.56727)$, $\varepsilon^{vi} = -(9.66980)$
$\zeta^{vi} = +(9.42520)$

und hiemit

$$w(1) = - 0''.462$$
$$w(2) = - 2.168$$
$$w(3) = + 0.600$$
$$w(4) = - 0.848$$
$$w(5) = - 0.741$$
$$w(6) = + 0.169$$
$$w(7) = + 1.589$$

Diese müssen nun vor Allem der oft erwähnten Bedingungsgleichung genügen, die Producte die diese giebt sind

$$N.w(5) = -\ 1''.284$$
$$N'.w(1) = -\ 1.067$$
$$N''.w(2) = -\ 5.007$$
$$N'''.w(3) = +\ 1.849$$
$$N^{IV}.w(4) = -\ 2.612$$
$$N^{V}.w(6) = +\ 0.781$$
$$N^{VI}.w(7) = +\ 7.340$$
$$\text{Sa.} = 0.000$$

wie es sein muss. Es müssen nun nicht nur die vorstehenden Werthe der $w(r)$ den im vor. Art. angenommenen, vorläufigen Werthen der Richtungen hinzugefügt, sondern es müssen auch die Centrirungen berücksichtigt werden. Diese findet man in dem oben angezogenen Werke Seite 36, und fügt man, der leichteren Vergleichung wegen, jeder derselben 0''.462 hinzu, so ergiebt sich die folgende Zusammenstellung.

r	Vorl. Werthe	Centr.	$w(r)$	Ausgegl. Richt.
(1)	0° 0′ 0″	+ 8″.822	−0″.462	0° 0′ 8″.360
(2)	31 50 10	+ 6.867	−2.168	31 50 14.699
(3)	77 34 45	+ 3.840	+0.600	77 34 49.440
(4)	119 13 30	− 3.943	−0.848	119 13 25.209
(5)	161 13 45	−14.276	−0.741	161 13 29.983
(6)	191 48 45	− 7.681	+0.169	191 48 37.488
(7)	254 45 55	− 1.532	+1.589	254 45 55.057

die mit den Resultaten des angezogenen Werks übereinstimmen.

11.

Es soll jetzt unser Beispiel mit Anwendung der im Art. 3 erklärten Zerlegung der Gleichungen in zwei von einander unabhängige Systeme ausgeführt werden. Um möglichste Verschiedenheit in der Behandlung herbeizuführen sollen den Richtungen (6) und (7) die zweite und dritte Stelle in der Reihenfolge gegeben werden. Das zweite Stationstäfelchen steht daher jetzt wie folgt.

No.	(5)	(6)	(7)	(1)	(2)	(3)	(4)	p	P	$p^2 : P$
1	+ 1″.638	—	—	−0″.652	−26″.052	+27″.748	−2″.682	20	100	4.0
2	—	—	—	+6.750	− 8.800	+ 2.050	—	4	12	1.3333
3	− 3.633	—	—	—	—	+ 5.516	−1.883	4	12	1.3333
4	−25.927	−4″.077	+30″.004	—	—	—	—	24	72	8.0
(lx)	−27″.922	−4″.077	+30″.004	+6″.098	−34″.852	+35″.314	−4.565	Sa.	196	
Q	48	24	24	24	24	28	24	=	196	

und die (pp) erhalten hierauf die folgenden Werthe.

	p	p'	p''	$p_{,}$	$p_{,,}$	$p_{,,,}$	p_{IV}
p	13.3333	8.0	8.0	4.0	4.0	5.3333	5.3333
p'		8.0	8.0	0	0	0	0
p''			8.0	0	0	0	0
$p_{,}$				5.3333	5.3333	5.3333	4.0
$p_{,,}$					5.3333	5.3333	4.0
$p_{,,,}$						6.6667	5.3333
p_{IV}							5.3333

Es wird nun zuerst

$$N' = 0\ ,\ \ N'' = 0$$

und für die Bestimmung der übrigen N ergiebt sich die folgende Rechnung

$(pp_{,}) \ldots 0.60206 \qquad (pp_{,,,}) \ldots 0.72700 = (pp_{IV})$

$(pp_{,,}) \ldots 0.60206 \qquad N \ \ldots 0.23856$

$(p_{,}p_{,,}) \ldots 0.72700$

$\phantom{(p_{,}p_{,,}) \ldots} 1.93112$

$M \ldots 0.96556$

$N \ldots 0.23856 = 1.7320$

$N_{,} \ldots 0.36350 = 2.3094$

$N_{,,} \ldots 0.36350 = 2.3094$

$N_{,,,} \ldots 0.48844 = 3.0792$

$N_{IV} \ldots 0.48844 = 3.0792$

$\Sigma N \ldots 1.09723 = 12.5092$

$N\Sigma N \ldots 1.33579 = 21.667$

$N_{,}\Sigma N \ldots 1.46073 = 28.889$

$N_{,,}\Sigma N \ldots 1.46073 = 28.889$

$N_{,,,}\Sigma N \ldots 1.58567 = 38.518$

$N_{IV}\Sigma N \ldots 1.58567 = 38.518$

Die Coefficienten des ersten Systems von Gleichungen folgen hieraus

$(1,1) = 37.667$

$(1,2) = -\ 8.0\ ,\ (2,2) = 16.0$

$(1,3) = -\ 8.0\ ,\ (2,3) = -\ 8.0\ ,\ (3,3) = 16.0$

und die des zweiten Systems

$(4,4,3)=24.0$

$(4,5,3)=\ 0 \qquad ,(5,5,3)=24.0$

$(4,6,3)=+1.7779, (5,6,3)=+1.7779, (6,6,3)=30.8149$

$(4,7,3)=+3.1112, (5,7,3)=+3.1112, (6,7,3)=+4.1483, (7,7,3)=28.1483$

ausserdem wie vorher $(ll) = 182.752$

die durch die vorhergehenden Zahlenwerthe controlirt worden sind.

Es ist sehr dienlich bei der Auflösung dieser Gleichungen beide Systeme als Ein System zu betrachten, in welchem sich das zweite unmittelbar an das erste knüpft, und dem gemäss alle Bezeichnungen zu wählen. Aus diesem Grunde sind im zweiten System für die Bezeichnungen der Coefficienten (4,4,3), (4,5,3), etc. statt (4,4), (4,5), etc. eingeführt worden. Die Auflösung kann nun durchaus nach den allgemeinen Formeln für Ein System ausgeführt werden, und giebt nach und nach die folgenden Zahlenwerthe

$$\alpha' = +(9.32713),\ \beta' = +(9.32713),\ \chi' = +(9.86999)$$

$(2,2,1) = 14.3009$

$(2,3,1) = -\ 9.6991,\ (3,3,1) = 14\ 3009$

$(2,l,1) = -10''.0074,\ (3,4,1) = +24''.0736,\ (ll,1) = 162.053$

$$\beta'' = +(9.83137),\ \chi'' = +(9.84495)$$

$(3,3,2) = 7.7226$

$(3,l,2) = -17''.2864,\ (ll,2) = 155.050$

$$\gamma''' = \delta''' = \text{etc.} = 0,\ \chi''' = -(0.34994)$$

$$\left.\begin{array}{r}(4,4,3),\ (4,5,3),\ \text{etc.}\\ (5,5,3),\ \text{etc.}\end{array}\right\}\ \text{wie oben},\ (ll,3) = 116.355$$

$\delta^{IV} = 0,\ \varepsilon^{IV} = -(8.86970),\ \zeta^{IV} = -(9.11272),\ \chi^{IV} = -(9.40498)$

$(5,5,4) = 24.0$

$(5,6,4) = +1.7779,(6,6,4) = 30.6832$

$(5,7,4) = +3.1112,(6,7,4) = +3.9178,(7,7,4) = 27.7450$

$(5,l,4) = -34''.852,(6,l,4) = +34''.8623,(7,l,4) = 114.806,(ll,4) = 114.806$

$$\varepsilon^{V} = -(8.86970),\ \zeta^{V} = -(9.11272),\ \chi^{V} = +(0.16202)$$

$(6,6,5) = 30.5515$

$(6,7,5) = +\ 3.6873,\ (7,7,5) = 27.3417$

$(6,l,5) = +37''.4441,\ (7,l,5) = -0''.8375,\ (ll,5) = 64.195$

$$\zeta^{VI} = -(9.08168),\ \chi^{VI} = -(0.08835)$$

$(7,7,6) = 26.8967$

$(7,l,6) = -5''.3567,\ (ll,6) = 18.304$

$$\chi^{VII} = +(9.29920)$$

$(ll,7) = 17.237$ (möglichst nahe wie oben.)

Für die Berechnung der übrigen Grössen ziehe ich vor die betreffenden

Formeln ohne Abkürzungen vollständig herzusetzen, da bei gegenwärtigem Verfahren die Grössen, die Null werden, in verschiedenen Fällen verschiedene Stellen einnehmen. Um die Fortsetzung möglichst zu erleichtern, sollen diese Formeln für sieben Unbekannte angesetzt werden. Sie sind

$$\begin{aligned}
\alpha'' &= \beta' + \beta''\alpha' \\
\beta'' &= \beta''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha''' &= \gamma' + \gamma''\alpha' + \gamma'''\alpha'' \\
\beta''' &= \gamma'' + \gamma'''\beta'' \\
\gamma''' &= \gamma'''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha^{IV} &= \delta' + \delta''\alpha' + \delta'''\alpha'' + \delta^{IV}\alpha''' \\
\beta^{IV} &= \delta'' + \delta'''\beta'' + \delta^{IV}\beta''' \\
\gamma^{IV} &= \delta''' + \delta^{IV}\gamma''' \\
\delta^{IV} &= \delta^{IV}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha^{V} &= \varepsilon' + \varepsilon''\alpha' + \varepsilon'''\alpha'' + \varepsilon^{IV}\alpha''' + \varepsilon^{V}\alpha^{IV} \\
\beta^{V} &= \varepsilon'' + \varepsilon'''\beta'' + \varepsilon^{IV}\beta''' + \varepsilon^{V}\beta^{IV} \\
\gamma^{V} &= \varepsilon''' + \varepsilon^{IV}\gamma''' + \varepsilon^{V}\gamma^{IV} \\
\delta^{V} &= \varepsilon^{IV} + \varepsilon^{V}\delta^{IV} \\
\varepsilon^{V} &= \varepsilon^{V}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha^{VI} &= \zeta' + \zeta''\alpha' + \zeta'''\alpha'' + \zeta^{IV}\alpha''' + \zeta^{V}\alpha^{IV} + \zeta^{VI}\alpha^{V} \\
\beta^{VI} &= \zeta'' + \zeta'''\beta'' + \zeta^{IV}\beta''' + \zeta^{V}\beta^{IV} + \zeta^{VI}\beta^{V} \\
\gamma^{VI} &= \zeta''' + \zeta^{IV}\gamma''' + \zeta^{V}\gamma^{IV} + \zeta^{VI}\gamma^{V} \\
\delta^{VI} &= \zeta^{IV} + \zeta^{V}\delta^{IV} + \zeta^{VI}\delta^{V} \\
\varepsilon^{VI} &= \zeta^{V} + \zeta^{VI}\varepsilon^{V} \\
\zeta^{VI} &= \zeta^{VI}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-w(1) &= \chi' + \chi''\alpha' + \chi'''\alpha'' + \chi^{IV}\alpha''' + \chi^{V}\alpha^{IV} + \chi^{VI}\alpha^{V} + \chi^{VII}\alpha^{VI} \\
-w(2) &= \chi'' + \chi'''\beta'' + \chi^{IV}\beta''' + \chi^{V}\beta^{IV} + \chi^{VI}\beta^{V} + \chi^{VII}\beta^{VI} \\
-w(3) &= \chi''' + \chi^{IV}\gamma''' + \chi^{V}\gamma^{IV} + \chi^{VI}\gamma^{V} + \chi^{VII}\gamma^{VI} \\
-w(4) &= \chi^{IV} + \chi^{V}\delta^{IV} + \chi^{VI}\delta^{V} + \chi^{VII}\delta^{VI} \\
-w(5) &= \chi^{V} + \chi^{VI}\varepsilon^{V} + \chi^{VII}\varepsilon^{VI} \\
-w(6) &= \chi^{VI} + \chi^{VII}\zeta^{VI} \\
-w(7) &= \chi^{VII}
\end{aligned}$$

sie kürzen sich in jedem Falle nach der Zerlegung der Gleichungen in zwei Systeme bedeutend ab. In unserem Beispiel sind, wie man gesehen hat, die folgenden Grössen Null,

$$\begin{matrix} \gamma' , & \delta' , & \varepsilon' , & \zeta' \\ \gamma'' , & \delta'' , & \varepsilon'' , & \zeta'' \\ \gamma''' , & \delta''' , & \varepsilon''' , & \zeta''' \\ & \delta^{IV} , & & \end{matrix}$$

und alle Glieder der vorstehenden Formeln in welchen eine dieser Grössen vorkommt, fallen daher auch weg, und ähnlich wird es sich in allen Fällen verhalten. Die folgenden Zahlenwerthe sind daher durch eine sehr kurze Rechnung erhalten worden.

$$\alpha' = +(9.32713)\,,\quad \alpha'' = +(9.55199)$$
$$\beta'' = +(9.83137)$$
$$\delta^{V} = -(8.86970)\,,\quad \delta^{VI} = -(9.08168)$$
$$\varepsilon^{V} = -(8.86970)\,,\quad \varepsilon^{VI} = -(9.08168)$$
$$\zeta^{VI} = -(9.08168)$$

Bei der Berechnung der Werthe der $w(r)$, die hieraus folgen, ist die Reihenfolge der Richtungen, die oben angenommen wurde, zu beachten. In den vorstehenden Ausdrücken der $w(r)$ sind daher

$$w(5)\,,\ w(6)\,,\ w(7)\,,\ w(1)\,,\ w(2)\,,\ w(3)\,,\ w(4)$$

bez. statt $w(1)\,,\ w(2)\,,\ w(3)\,,\ w(4)\,,\ w(5)\,,\ w(6)\,,\ w(7)$

anzunehmen. Man erhält

$$\begin{aligned} w(1) &= +\ 0''.187 \\ w(2) &= -\ 1.519 \\ w(3) &= +\ 1.250 \\ w(4) &= -\ 0.199 \\ w(5) &= -\ 0.092 \\ w(6) &= +\ 0.818 \\ w(7) &= +\ 2.238 \end{aligned}$$

die vor Allem der oft erwähnten Bedingungsgleichung genügen müssen. Diese giebt

$$\begin{aligned} N\ .\ w(5) &= -\ 0''.159 \\ N'\ .\ w(6) &= \quad 0 \\ N''\ .\ w(7) &= \quad 0 \\ N_{,}\ .\ w(1) &= +\ 0.433 \\ N_{,,}\ .\ w(2) &= -\ 3.508 \\ N_{,,,}\ .\ w(3) &= +\ 3.847 \\ N_{IV}\ .\ w(4) &= -\ 0.613 \\ \text{Sa.} &= \quad 0.000 \end{aligned}$$

wie es sein muss. Die Werthe der $w(6)$ und $w(7)$ entziehen sich dieser

Prüfung nicht ganz, denn sie tragen mit dazu bei um die übrigen zu berechnen. Die Unterschiede der $w(r)$ müssen ferner mit denen, die das Verfahren des vor. Art. gegeben hat, übereinstimmen, und die Vergleichung zeigt, dass dieses in der That der Fall ist.

12.

Bei der Anwendung des im Art. 4 entwickelten Verfahrens werde ich die Reihenfolge der Richtungen so wählen wie das folgende Täfelchen zeigt.

No.	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	p	P	$p^2:P$
1	−0″652	−26″052	+27″748	−2″682	+ 1″638	—	—	20	100	4.0
2	+6.750	− 8.800	+ 2.050	—	—	—	—	4	12	1.3333
3	—	—	+ 5.516	−1.883	− 3.633	—	—	4	12	1.3333
4	—	—	—	—	−25.927	−4″077	+30″004	24	72	8.0
(lx)	+6″098	−34″852	+35″314	−4″565	−27″922	−4″077	+30.004	Sa.	196	
Q	24	24	28	24	48	24	24	=	196	

Das Täfelchen der (pp) steht in Folge dessen so,

	p	p'	p''	p'''	p^{IV}	$p_{,}$	$''d$
p	5.3333	5.3333	5.3333	4.0	4.0	0	0
p'		5.3333	5.3333	4.0	4.0	0	0
p''			6.6667	5.3333	5.3333	0	0
p'''				5.3333	5.3333	0	0
p^{IV}					13.3333	8.0	8.0
$p_{,}$						8.0	8.0
$p_{,,}$							8.0

und hieraus bekommt man, in Folge der Bestimmungen des Art. 4, zuerst

$$N = 2.3095\ ,\ N' = 2.3095\ ,\ N'' = 2.3095$$
$$N''' = 1.7320\ ,\ N^{IV} = 1.7320\ ,\ N_{,} = 0\ ,\ N_{,,} = 0$$

und wenn man vorläufig auf die Zerlegung des Systems keine Rücksicht nimmt,

$(1,1) = 24.0$
$(1,l) = +6''.098$

$(2,2,1) = 24.0$
$(2,3,1) = 0 \quad , \quad (3,3,2) = 26.6667$
$(2,4,1) = 0 \quad , \quad (3,4,2) = -1.3333 \, , \quad (4,4,1) = 21.6667$
$(2,5,1) = 0 \quad , \quad (3,5,2) = -1.3333 \, , \quad (4,5,1) = -2.3333$
$(2,6,1) = 0 \quad , \quad (3,6,2) = 0 \quad , \quad (4,6,1) = 0$
$(2,7,1) = 0 \quad , \quad (3,7,2) = 0 \quad , \quad (4,7,1) = 0$
$(2,l,1) = -34''.852 \, , \quad (3,l,2) = +35''.314 \, , \quad (4,l,1) = -4''.565$

$(5,5,1) = 37.6667$
$(5,6,1) = -8.0 \quad , \quad (6,6,1) = 16.0$
$(5,7,1) = -8.0 \quad , \quad (6,7,1) = -8.0 , \quad (7,7,1) = 16.0$
$(5,l,1) = -27''.922 , \quad (6,l,1) = -4''.077 , \quad (7,l,1) = +30''.004 , \quad (ll) = 182.752$

oder (ll) wie oben. Hier ist es blos Zufall, dass $(2,4,1)$ und $(2,5,1)$ Null werden, welches in anderen speciellen Fällen nicht statt finden wird. Zerlegt man nun dieses System von Gleichungen nach dem Verfahren des Art. 4, so bleiben die Werthe der Coefficienten der vier ersten Gleichungen unverändert wie oben, aber für die fünfte Gleichung tritt

$$H = (5,5,1) + (5,6,1) + (5,7,1) = 21.6667 \text{ statt } (5,5,1)$$

und

$$= (5,l,1) + (6,l,1) + (7,l,1) = -1''.995 \text{ statt } (5,l,1)$$

ein, womit die Coefficienten des ersten Systems von Gleichungen vollständig gegeben sind. Für die des zweiten Systems bekommt man, wenn man in Betreff der Bezeichnungen die bez. Bemerkung des vor. Art. benutzt,

$(6,6,5) = 16.0$
$(6,7,5) = -8.0 \quad , \quad (7,7,5) = 16.0$
$(6,l,5) = -4''.077 \, , \quad (7,l,5) = +30''.004$

während der Werth von (ll) durch die Zerlegung nicht berührt wird. Die Auflösung giebt nun nach und nach

$\chi' = -(9.40498)$
$(ll,1) = 181.203$
$\gamma'' = 0 \, , \; \delta'' = 0 \, , \; \chi'' = +(0.16202)$
$(4,4,2) = (4,4,1)$
$(4,5,2) = (4,5,1) \, , \quad (5,5,2) = (5,5,1)$
$(4,l,2) = (4,l,1) \, , \quad (5,l,2) = (5,l,1) \, , \quad (ll,2) = 130.592$

$\gamma''' = +(8.69897)$, $\delta''' = +(8.69897)$, $\chi''' = -(0.12198)$
$(4,4,3) = 21.6$
$(4,5,3) = -2.4$, $(5,5,3) = 21.6$
$(4,l,3) = -2''.7993$, $(5,l,3) = -0''.2293$, $(ll,3) = 83.826$
$\delta^{IV} = +(9.04576)$, $\chi^{IV} = +(9.11260)$
$(5,5,4) = 21.3333$
$(5,l,4) = -0''.5403$, $(ll,4) = 83.463$
$\varepsilon^{V} = \zeta^{V} = 0$, $\chi^{V} = +(8.40357)$

$(ll,5) = 83.449$

$\zeta^{VI} = +(9.69897)$, $\chi^{VI} = +(9.40632)$
$(7,7,6) = 12.0$
$(7,l,6) = +27''.9655$, $(ll,6) = 82.410$

$\chi^{VII} = -(0.36744)$

$(ll,7) = 17.238$ (wie oben)

Hieraus ferner nach den Ausdrücken der Abhandlung

$$\beta^{V} = 0,\ \gamma^{IV} = +(8.74476)$$

und

$$w(1) = +0''.254$$
$$w(2) = -1,452$$
$$w(3) = +1,316$$
$$w(4) = -0.133$$
$$w(5) = -0,025$$
$$w(6) - w(5) = +0.910$$
$$w(7) - w(5) = +2.330$$

die auch den oft erwähnten Bedingungsgleichungen gnügen. Die beiden letzten Werthe entziehen sich aber dieser Controle, weil $N_{\prime}$ und $N_{\prime\prime}$ Null sind. Man bekommt, wenn man $w(5)$ durch Addition seines Werthes $-0''.025$ eliminirt

$$w(6) = +0''.885$$
$$w(7) = +2.305$$

und die Unterschiede aller dieser Werthe stimmen mit den bezüglichen Resultaten der beiden nächstvorhergehenden Artikel überein.

13.

Wenden wir jetzt das Verfahren des Art. 6 auf unser Beispiel an, so sind alle N Null zu machen, und in dieser Annahme zuerst die Coefficienten der Gleichungen mit Weglassung der der ersten Gleichung zu

berechnen, und dabei keine Rücksicht auf die Zerlegung zu nehmen. Benutzt man dazu das Täfelchen der (pp) des vor. Art., so sind diese Coefficienten

$(2,2,1) = \quad 18.6667$
$(2,3,1) = -5.3333, \quad (3,3,1) = \quad 21.3333$
$(2,4,1) = -4.0 \quad, \quad (3,4,1) = -5.3333, \quad (4,4,1) = \quad 18.6667$
$(2,5,1) = -4.0 \quad, \quad (3,5,1) = -5.3333, \quad (4,5,1) = -5.3333$
$(2,6,1) = \quad 0 \quad, \quad (3,6,1) = \quad 0 \quad, \quad (4,6,1) = \quad 0$
$(2,7,1) = \quad 0 \quad, \quad (3,7,1) = \quad 0 \quad, \quad (4,7,1) = \quad 0$
$(2,l,1) = -34''.852, \quad (3,l,1) = +35''.314, \quad (4,l,1) = -4''.565$

$(5,5,1) = \quad 34.6667$
$(5,6,1) = -8.0 \quad, (6,6,1) = \quad 16.0$
$(5,7,1) = -8.0 \quad, (6,7,1) = -8.0 \quad, (7,7,1) = \quad 16.0$
$(5,l,1) = -27''.922, (6,l,1) = -4''.077, (7,l,1) = +30''.004, (ll,1) = 182.752$

Die Coefficienten der Gleichung mit dem Index 5 werden nun eben so erhalten wie im vor. Art. und es sind folglich die Coefficienten der ersten vier Gleichungen mit den vorstehenden bis auf die Ausnahme identisch, dass

$$II \text{ oder } (5,5,1) = 18.667$$
$$L \text{ oder } (5,l,1) = -1''.995$$

werden, und damit das erste System abschliesst. Die Coefficienten des zweiten Systems sind hier dieselben wie im vor. Art. nemlich

$(6,6,5) = \quad 16.0$
$(6,7,5) = -8.0 \quad, \quad (7,7,5) = \quad 16.0$
$(6,l,5) = -4''.077, \quad (7,l,5) = +30''.004$

Die Auflösung giebt hienach

$$\beta'' = +(9.45594), \quad \gamma'' = +(9.33100)$$
$$\delta'' = +(9.33100), \quad \chi'' = +(0.27117)$$

$(3,3,2) = \quad 19.8094$
$(3,4,2) = -6.4762, \quad (4,4,2) = \quad 17.8095$
$(3,5,2) = -6.4762, \quad (4,5,2) = -6.1905, \quad (5,5,2) = \quad 17.8095$
$(3,l,2) = +25''.3560, \quad (4,l,2) = -12''.0335, \quad (5,l,2) = -9.4635, \quad (ll,2) = 117.679$

$$\gamma''' = +(9.51445), \quad \delta''' = +(9.51445), \quad \chi''' = -(0.10721)$$

$(4,4,3) = \quad 15.6923$
$(4,5,3) = -8.3077, \quad (5,5,3) = \quad 15.6923$
$(4,l,3) = -3''.7439, \quad (5,l,3) = -1''.1739, \quad (ll,3) = 85.223$

$$\delta'' = +(9.72380)\,,\ \chi'' = +(0.37765)$$

$$(5,5,4) = 11.2941$$

$$(5,l,4) = -3''.1560\,,\ (ll,4) = 84.330$$

$$\chi' = +(9.44630)$$

$$(ll,5) = 83.448$$

$$\zeta' = +(9.69897)\,,\ \chi'' = +(9.40622)$$

$$(7,7,6) = 12.0$$

$$(7,l,6) = +27''.9655\,,\ (ll,6) = 82.409$$

$$\chi''' = -(0.36744)$$

$$(ll,7) = 17.237 \text{ (wie oben)}$$

Ferner nach den Ausdrücken der Abhandlung

$$\delta''' = +(9.48813)\,,\ \beta'' = +(9.67265)\,,\ \gamma'' = +(9.69897)$$

und hiemit

$$w(2) - w(1) = -1''.706$$
$$w(3) - w(1) = +1.062$$
$$w(4) - w(1) = -0.387$$
$$w(5) - w(1) = -0.279$$
$$w(6) - w(5) = +0.910$$
$$w(7) - w(5) = +2.330$$

Die im Vorhergehenden zur Prüfung dieser Endwerthe angewandte Bedingungsgleichung ist hier nicht anwendbar, da sie identisch erfüllt wird. Die Vergleichung mit den im Vorhergehenden erhaltenen Werthen zeigt die Uebereinstimmung.

14.

Da das Verfahren des vor. Art. mit demjenigen übereinstimmt, welches in dem mehrmals genannten Werke über die Preuss. Landestriangulation angewandt worden ist, und dort nach Bessel die an sich überflüssige unbestimmte Elimination der Gleichungen ausgeführt worden ist, so halte ich es für nicht überflüssig zu zeigen, dass die Coefficienten dieser Elimination dort auch richtig berechnet worden sind. Bezeichnet man diese Coefficienten mit [2,2], [2,3], etc., so sind sie im gegenwärtigen Falle durch die folgenden Ausdrücke gegeben,

$$[2,2] = \frac{1}{(2,2,1)} + \frac{\beta''^2}{(3,3,2)} + \frac{\beta'''^2}{(4,4,3)} + \frac{\beta^{IV 2}}{(5,5,4)}$$

$$[2,3] = \frac{\beta''}{(3,3,2)} + \frac{\beta'''\gamma'''}{(4,4,3)} + \frac{\beta^{IV}\gamma^{IV}}{(5,5,4)}$$

$$[2,4] = \frac{\beta'''}{(4,4,3)} + \frac{\beta^{IV}\delta^{IV}}{(5,5,4)}$$

$$[2,5] = \frac{\beta^{IV}}{(5,5,4)}$$

$$[2,6] = [2,7] = 0$$

$$[3,3] = \frac{1}{(3,3,2)} + \frac{\gamma'''^2}{(4,4,3)} + \frac{\gamma^{IV 2}}{(5,5,4)}$$

$$[3,4] = \frac{\gamma'''}{(4,4,3)} + \frac{\gamma^{IV}\delta^{IV}}{(5,5,4)}$$

$$[3,5] = \frac{\gamma^{IV}}{(5,5,4)}$$

$$[3,6] = [3,7] = 0$$

$$[4,4] = \frac{1}{(4,4,3)} + \frac{\delta^{IV 2}}{(5,5,4)}$$

$$[4,5] = \frac{\delta^{IV}}{(5,5,4)}$$

$$[4,6] = [4,7] = 0$$

$$[5,5] = \frac{1}{(5,5,4)}$$

$$[5,6] = [5,7] = 0$$

$$[6,6] = \frac{1}{(6,6,5)} + \frac{\zeta^{VI 2}}{(7,7,6)}$$

$$[6,7] = \frac{\zeta^{VI}}{(7,7,6)}$$

$$[7,7] = \frac{1}{(7,7,6)}$$

Die Substitution der numerischen Werthe des vor. Art. in diese Ausdrücke gab

$[2,2] = 0.08333$

$[2,3] = 0.04167$, $[3,3] = 0.07943$

$[2,4] = 0.04167$, $[3,4] = 0.04427$, $[4,4] = 0.08854$

$[2,5] = 0.04167$, $[3,5] = 0.04427$, $[4,5] = 0.04688$

$[5,5] = 0.08854$, $[6,6] = 0.08333$

$[6,7] = 0.04167$, $[7,7] = 0.08333$

die auch mit den Angaben des angezogenen Werks übereinstimmen.

15.

Wenden wir endlich auch das Verfahren des Art. 7 auf unser Beispiel an, so ist wieder das Täfelchen der (pp) des Art. 12 zu benutzen, und es sind hiebei wieder alle N Null zu machen, aber die fünfte Glei-

chung wegzulassen. Die Coefficienten des ersten Systems der hiemit schon in zwei Systeme zerlegten Gleichungen sind nun die folgenden,

$(1,1) = \quad 18.6667$
$(1,2) = -5.3333\ ,\ (2,2) = \quad 18.6667$
$(1,3) = -5.3333\ ,\ (2,3) = -\ 5.3333\ ,\ (3,3) = \quad 21.3333$
$(1,4) = -4.0\ ,\ (2,4) = -\ 4.0\ ,\ (3,4) = -\ 5.3333$
$(1,l) = +6''.098\ ,\ (2,l) = -34''.852\ ,\ (3,l) = +35''.314$
$(4,4) = \quad 18.6667$
$(4,l) = -4''.565\ ,\ (ll) = 182.752$

und die Coefficienten des zweiten Systems sind dieselben, wie im Art. 13, weshalb ich sie nicht wiederholen werde. Die Auflösung giebt jetzt

$$\alpha' = +(9.45594)\ ,\ \beta' = +(9.45594)$$
$$\gamma' = +(9.33100)\ ,\ \chi' = -(9.51413)$$

$(2,2,1) = \quad 17.1428$
$(2,3,1) = -\ 6.8572,\ (3,3,1) = \quad 19.8094$
$(2,4,1) = -\ 5.1429,\ (3,4,1) = -\ 6.4762,\ (4,4,1) = \quad 17.8095$
$(2,l,1) = -33''.1097,\ (3,l,1) = +37''.0563,\ (4,l,1) = -3''.2583,\ (ll,1) = 180.76$

$$\beta'' = +(9.60206)\ ,\ \gamma'' = +(9.47713)\ ,\ \chi'' = +(0.28588)$$

$(3,3,2) = \quad 17.0667$
$(3,4,2) = -\ 8.5334\ ,\ (4,4,2) = \quad 16.2666$
$(3,l,2) = +23''.8124\ ,\ (4,l,2) = -13''.1916\ ,\ (ll,2) = 116.810$

$$\gamma''' = +(9.69897)\ ,\ \chi''' = -(0.14464)$$

$(4,4,3) = \quad 12.0000$
$(4,l,3) = -1''.2855\ ,\ (ll,3) = 83.586$

$$\chi^{IV} = +(9.02989)$$

$(ll,4) = (ll,5) = 83.448$

Da dieser Werth von $(ll,5)$ mit dem im Art. 13 gefundenen übereinstimmt, so muss der hier sich für $(ll,7)$ ergebende auch mit jenem übereinstimmen.

Die Ausdrücke der Abhandlung geben ferner

$$\alpha'' = +(9.60206)\ ,\ \alpha''' = +(9.69897)\ ,\ \beta''' = +(9.69897)$$

und hiemit

$$w(1) - w(5) = +0''.279$$
$$w(2) - w(5) = -1.427$$
$$w(3) - w(5) = +1.342$$
$$w(4) - w(5) = -0.107$$

während $w(6) - w(5)$ und $w(7) - w(5)$ eben so bleiben wie im vorvor. Art. Die Anwendung der Bedingungsgleichung findet hier wieder nicht statt, weil sie wieder identisch wird. Durch die Subtraction des ersten der vorstehenden Ausdrücke von allen übrigen bekommt man

$$\begin{aligned} w(2) - w(1) &= -1''.706 \\ w(3) - w(1) &= +1.063 \\ w(4) - w(1) &= -0.386 \\ w(5) - w(1) &= -0.279 \end{aligned}$$

die mit den im Vorhergehenden gefundenen Werthen übereinstimmen.

16.

Im Vorhergehenden ist zur Gnüge gezeigt worden, dass die Zerlegung der Stationsgleichungen in zwei Systeme, wo dieses an sich möglich ist, in den Resultaten der Ausgleichungen auf den Stationen durchaus keine Verschiedenheiten in den ausgeglichenen Werthen der Winkel hervorbringt. Aber nicht blos in diesem ersten Theil der Auflösung werden die Resultate identisch, sondern dasselbe findet auch im zweiten Theile derselben statt, so dass man überhaupt identische Endresultate erhält, man mag die Zerlegung angewandt haben oder nicht. Jeder, der sich die Mühe giebt, die Theorie dieser Aufgabe etwas mehr wie oberflächlich zu betrachten, wird sich leicht überzeugen können, dass dieses in der That statt finden muss. Ich könnte daher diesen Aufsatz hier schliessen, um aber diese Sache möglichst klar zu machen, will ich dasselbe Beispiel mit allen fünf verschiedenen Verfahrungsarten, die im Vorhergehenden enthalten sind, so weit fortsetzen, wie die Betrachtung einer einzigen Station erlaubt; ich werde mich hiebei indess nur der Logarithmen von vier Decimalen bedienen, da man in der Regel damit ausreicht.

Geht man die in dem oft genannten Werke angegebenen Bedingungsgleichungen des Dreiecksnetzes durch, zu welchem die hier behandelte Station gehört, so findet man dass diese letztere nur in denjenigen derselben vorkommt, die mit den Zahlen *IX*, *X*, *XII*, *XIV*, *XV*, *XVI*, *XVII*, *XVIII*, *XIX*, *XX*, *XXII* bezeichnet sind. Zieht man diese aus, und ergänzt die erste Richtung, deren Verbesserung dem Bessel-schen Verfahren zufolge weggelassen worden ist, so erhält man das folgende Täfelchen der Differentialquotienten, bei welchen es überflüssig

war eine Stationsnummer anzuführen, da es sich hier nur um Eine Station handelt.

r	$q(r,IX)$	$\log q(r,X)$	$\log q(r,XII)$	$q(r,XIV)$	$\log q(r,XV)$	$q(r,XVI)$
1	-1	0.2071n	—	—	—	—
2	$+1$	0.4239	9.6930n	-1	—	—
3	—	0.0185n	0.0185	—	0.2547n	—
4	—	—	9.7405n	—	0.2931	—
5	—	—	—	$+1$	9.2205n	-1
6	—	—	—	—	—	$+1$
7	—	—	—	—	—	—

r	$\log q(r,XVII)$	$q(r,XVIII)$	$\log q(r,XIX)$	$q(r,XX)$	$\log q(r,XXII)$
1	—	—	—	—	—
2	—	—	—	—	—
3	—	—	—	—	—
4	0.2931n	—	—	—	—
5	0.5630	$+1$	0.2284n	—	—
6	0.2284n	-1	0.2284	-1	9.7080
7	—	—	—	$+1$	9.7080n

17.

Wendet man nun zuerst das allgemeine Verfahren ohne Zerlegung der Gleichungen an, nach welchem im Art. 10 die Ausgleichung auf der Station ausgeführt wurde, so sind die in Betracht kommenden Hülfsgrössen die folgenden,

$$\beta''' = -(8.8697),\ \beta^{IV} = -(9.0817),\ \beta^{V} = -(9.5673),\ \beta^{VI} = -(9.6698)$$
$$\gamma''' = -(8.8697),\ \gamma^{IV} = -(9.0817),\ \gamma^{V} = -(9.5673),\ \gamma^{VI} = -(9.6698)$$
$$\delta^{IV} = -(9.0817),\ \delta^{V} = -(9.5673),\ \delta^{VI} = -(9.6698)$$
$$\varepsilon^{V} = -(9.5673),\ \varepsilon^{VI} = -(9.6698)$$
$$\zeta^{VI} = +(9.4252)$$

$(1,1) = (1.5760)$, $(5,5,4) = (1.4297)$
$(2,2,1) = (1.3802)$, $(6,6,5) = (1.2777)$
$(3,3,2) = (1.3802)$, $(7,7,6) = (1.2460)$
$(4,4,3) = (1.4850)$

und es ist hiebei zu beachten, dass hier die Reihenfolge der Richtungen (5), (1), (2), (3), (4), (6), (7) ist. Man kann immerhin demungeachtet das Täfelchen der q des vor. Art. so wie es aufgestellt worden ist, anwenden, wenn man nur die vorbenannte Reihenfolge beachtet, allein um Irrthümern möglichst vorzubeugen, verfährt man sicherer, wenn man dieses Täfelchen nach der geänderten Reihenfolge umschreibt. Es steht daher für die jetzige Anwendung wie folgt.

r	$q(r,IX)$	$\log q(r,X)$	$\log q(r,XII)$	$q(r,XIV)$	$\log q(r,XV)$	$q(r,XVI)$	
5	—	—	—	+ 1	9.2205n	— 1	1
1	— 1	0.2071n	—	—	—	—	2
2	+ 1	0.4239	9.6930n	— 1	—	—	3
3	—	0.0185n	0.0185	—	0.2547n	—	4
4	—	—	9.7405n	—	0.2931	—	5
6	—	—	—	—	—	+ 1	6
7	—	—	—	—	—	—	7

r	$\log q(r,XVII)$	$q(r,XVIII)$	$\log q(r,XIX)$	$q(r,XX)$	$\log q(r,XXII)$	
5	0.5630	+ 1	0.2284n	—	—	1
1	—	—	—	—	—	2
2	—	—	—	—	—	3
3	—	—	—	—	—	4
4	0.2931n	—	—	—	—	5
6	0.2284n	— 1	0.2284	— 1	9.7080	6
7	—	—	—	+ 1	9.7080n	7

Die Ausdrücke der Abhandlung, für welche die rechter Hand angesetzten Indices zu benutzen sind, geben nun die folgenden Werthe der Hülfsgrössen,

r	$\log \eta(r,IX)$	$\log \eta(r,X)$	$\log \eta(r,XII)$	$\log \eta(r,XIV)$	$\log \eta(r,XV)$	$\log \eta(r,XVI)$	
5	—	—	—	0.	9.2205n	0. n	1
1	0. n	0.2071n	—	—	—	—	2
2	0.	0.4239	9.6930n	0. n	—	—	3
3	—	0.0495n	0.0344	8.8697	0.2547n	—	4
4	—	—	9.7900n	9.0817	0.3387	—	5
6	—	—	—	9.5673	8.7889n	0.	6
7	—	—	—	9.6698	8.8910n	9.4252	7

r	$\log \eta(r,XVII)$	$\log \eta(r,XVIII)$	$\log \eta(r,XIX)$	$\log \eta(r,XX)$	$\log \eta(r,XXII)$	
5	0.5630	0.	0.2284n	—	—	1
1	—	—	—	—	—	2
2	—	—	—	—	—	3
3	—	—	—	—	—	4
4	0.2931n	—	—	—	—	5
6	9.9854n	0. n	0.2284	0. n	9.7080	6
7	9.6700	9.4252n	9.6536	9.8656	9.5735n	7

r	$\log Q(r,IX)$	$\log Q(r,X)$	$\log Q(r,XII)$	$\log Q(r,XIV)$	$\log Q(r,XV)$	$\log Q(r,XVI)$	
5	—	—	—	8.4240	7.6445n	8.4240n	1
1	8.6198n	8.8269n	—	—	—	—	2
2	8.6198	9.0437	8.3128n	8.6198n	—	—	3
3	—	8.5645n	8.5484	7.3847	8.7697n	—	4
4	—	—	8.3603n	7.6520	8.9090	—	5
6	—	—	—	8.2896	7.5112n	8.7223	6
7	—	—	—	8.4238	7.6450n	8.1792	7

r	log Q(r,XVII)	log Q(r,XVIII)	log Q(r,XIX)	log Q(r,XX)	log Q(r,XXII)	
5	8.9870	8.4240	8.6524n	—	—	1
1	—	—	—	—	—	2
2	—	—	—	—	—	3
3	—	—	—	—	—	4
4	8.8634n	—	—	—	—	5
6	8.7077n	8.7223n	8.9507	8.7223n	8.4303	6
7	8.4240	8.1792n	8.4076	8.6196	8.3275n	7

r	log f(r,IX)	log f(r,X)	log f(r,XII)	log f(r,XIV)	log f(r,XV)	log f(r,XVI)	
5	—	—	—	8.4240	7.6445n	8.4240n	1
1	8.6198n	8.8090n	6.1703	8.3079n	7.3357n	8.4239n	2
2	8.6198	9.0544	8.3096n	8.7923n	7.3357n	8.4239n	3
3	—	8.5645n	8.5811	8.2483n	8.8153n	8.4239n	4
4	—	—	8.3603n	8.1793n	8.9261	8.4239n	5
6	—	—	—	8.4239	7.6454n	8.7542	6
7	—	—	—	8.4238	7.6450n	8.1792	7

r	log f(r,XVII)	log f(r,XVIII)	log f(r,XIX)	log f(r,XX)	log f(r,XXII)	
5	8.9870	8.4240	8.6524n	—	—	1
1	8.1830	8.4239	8.6523n	—	—	2
2	8.1830	8.4239	8.6523n	—	—	3
3	8.1830	8.4239	8.6523n	—	—	4
4	8.8234n	8.4239	8.6523n	—	—	5
6	8.6429n	8.7542n	8.9826	8.6198n	8.3276	6
7	8.4240	8.1792n	8.4076	8.6198	8.3275n	7

Man kann die Richtigkeit dieser Werthe der f Functionen durch das Corollarium zu dem im Suppl. 3 bewiesenen Satze prüfen. Wir erhalten hier z. B.

$$N.f(5,XIV) = +0.0460$$

$$N'.f(1,X) = -0.1488, \quad N'.f(1,XII) = +0.0003 \quad N'.f(1,XIV) = -0.0469$$

$$N''.f(2,X) = +0.2618, \quad N''.f(2,XII) = -0.0471 \quad N''.f(2,XIV) = -0.1432$$

$$N'''.f(3,X) = -0.1130, \quad N'''.f(3,XII) = +0.1173 \quad N'''.f(3,XIV) = -0.0545$$

$$\text{Sa.} = 0.0000, \quad N^{iv}.f(4,XII) = -0.0706 \quad N^{iv}.f(4,XIV) = -0.0465$$

$$\text{Sa.} = -0.0001 \quad N^{v}.f(6,XIV) = +0.1226$$

$$N^{vi}.f(7,XIV) = +0.1226$$

$$\text{Sa.} = +0.0001$$

u. s. w.

18.

Aus den vorstehenden Zahlenwerthen ergiebt sich der Beitrag, den die in Rede stehende Station zu den Coefficienten der Endgleichungen liefert. Ich habe diesen in der folgenden Tafel zusammengestellt, und dabei zugleich die einzelnen Theile, aus welchen er besteht, hinzugefügt.

r	(IX,IX)	(IX,X)	(IX,XII)	(IX,XIV)	(IX,XV)	(IX,XVI)
1	0.04167	+ 0.0644	−0.00015	+0.02032	+0.00217	+0.02654
2	0.04167	+ 0.1133	−0.02040	−0.06199	−0.00217	−0.02654
	0.08334	+ 0.1777	−0.02055	−0.04167	0.	0.

r	(IX,XVII)	(IX,XVIII)	(IX,XIX)	(IX,XX)	(IX,XXII)	
1	−0.01524	−0.02654	+0.04491	0.	0.	
2	+0.01524	+0.02654	−0.04491	0.	0.	
	0.	0.	0.			

r	(X,X)	(X,XII)	(X,XIV)	(X,XV)	(X,XVI)	(X,XVII)
1	0.1038	−0.00024	+0.0327	+0.00349	+0.04276	−0.02455
2	0.3008	−0.05415	−0.1645	−0.00575	−0.07043	+0.04045
3	0.0383	−0.03977	+0.0185	+0.06820	+0.02769	−0.01590
	0.4429	−0.09416	−0.1133	+0.06594	+0.00002	0.00000

r	(X,XVIII)	(X,XIX)	(X,XX)	(X,XXII)		
1	−0.04276	+0.0724	0.	0.		
2	+0.07043	−0.1192	0.	0.		
3	−0.02769	+0.0469	0.	0.		
	−0.00002	+0.0001				

r	(XII,XII)	(XII,XIV)	(XII,XV)	(XII,XVI)	(XII,XVII)	(XII,XVIII)
2	0.01006	+0.03057	+0.00107	+0.01309	−0.00752	−0.01309
3	0.03978	−0.01848	−0.06820	−0.02769	+0.01590	+0.02769
4	0.01261	+0.00832	−0.04641	+0.01460	+0.03663	−0.01460
	0.06245	+0.02041	−0.11354	0.00000	+0.04501	0.00000

r	(XII,XIX)	(XII,XX)	(XII,XXII)			
2	+0.02215	0.	0.			
3	−0.04686	0.	0.			
4	+0.02471	0.	0.			
	0.00000					

r	(XIV,XIV)	(XIV,XV)	(XIV,XVI)	(XIV,XVII)	(XIV,XVIII)	(XIV,XIX)
5	0.02655	−0.00441	−0.02655	+0.09705	+0.02655	−0.04492
2	0.06199	+0.00217	+0.02655	−0.01524	−0.02655	+0.04492
	0.08854	−0.00224	0.	+0.08181	0.	0.

r	(XIV,XX)	(XIV,XXII)				
5	0.	0.				
2	0.	0.				

r	(XV,XV)	(XV,XVI)	(XV,XVII)	(XV,XVIII)	(XV,XIX)	(XV,XX)
5	0.0007	+0.00441	−0.0161	−0.00441	+0.00746	0.
3	0.1175	+0.04771	−0.0274	−0.04771	+0.08072	0.
4	0.1656	−0.05212	−0.1308	+0.05212	−0.08818	0.
	0.2838	0.00000	−0.1743	0.00000	0.00000	

r	(XV,XXII)
5	0.
3	0.
4	0.

r	(XVI,XVI)	(XVI,XVII)	(XVI,XVIII)	(XVI,XIX)	(XVI,XX)	(XVI,XXII)
5	0.02655	−0.09705	−0.02655	+0.04492	0.	0.
6	0.05679	−0.04394	−0.05679	+0.09608	−0.04167	+0.02126
	0.08334	−0.14099	−0.08334	+0.14100	−0.04167	+0.02126

r	(XVII,XVII)	(XVII,XVIII)	(XVII,XIX)	(XVII,XX)	(XVII,XXII)
5	0.3548	+0.09705	−0.1642	0.	0.
4	0.1311	−0.05212	+0.0882	0.	0.
6	0.0743	+0.09608	−0.1626	+0.07050	−0.03598
	0.5602	+0.14101	−0.2386	+0.07050	−0.03598

r	(XVIII,XVIII)	(XVIII,XIX)	(XVIII,XX)	(XVIII,XXII)
5	0.02655	−0.04492	0.	0.
6	0.05679	−0.09608	+0.04167	−0.02126
	0.08334	−0.14100	+0.04167	−0.02126

r	(XIX,XIX)	(XIX,XX)	(XIX,XXII)
5	0.0760	0.	0.
6	0.1626	−0.07050	+0.03598
	0.2386	−0.07050	+0.03598

r	(XX,XX)	(XX,XXII)
6	0.04167	−0.02126
7	0.04167	−0.02126
	0.08334	−0.04252

r	(XXII,XXII)
6	0.01086
7	0.01086
	0.02172

Weiter kann man in der Betrachtung einer einzelnen Station nicht gehen, aber das Vorstehende reicht aus, um ihre volle Einwirkung auf die ganze Berechnung des betreffenden Dreiecksnetzes zu erkennen, und

mit den Resultaten der übrigen hier erklärten Verfahrungsarten vergleichen zu können.

19.

Indem wir nun zur Fortsetzung der Rechnungen übergehen, die sich an das im Art. 11 angewandte Verfahren der Zerlegung der Stationsgleichungen anknüpfen, haben wir zuerst zu erwägen, dass dort die Reihenfolge der Richtungen eine andere ist, wie im Vorhergehenden. Dieser Umstand muss wieder bei der Benutzung des Täfelchens für die Differentialquotienten der Bedingungsgleichungen berücksichtigt werden, und stellt man dieses demgemäss um, so erhält man das folgende.

r	$q(r,IX)$	$\log q(r,X)$	$\log q(r,XII)$	$q(r,XIV)$	$\log q(r,XV)$	$q(r,XVI)$	
5	—	—	—	+1	9.2205n	—1	1
6	—	—	—	—	—	+1	2
7	—	—	—	—	—	—	3
1	—1	0.2071n	—	—	—	—	4
2	+1	0.4239	9.6930n	—1	—	—	5
3	—	0.0185n	0.0185	—	0.2547n	—	6
4	—	—	9.7405n	—	0.2931	—	7

r	$\log q(r,XVII)$	$q(r,XVIII)$	$\log q(r,XIX)$	$q(r,XX)$	$\log q(r,XXII)$	
5	0.5630	+1	0.2284n	—	—	1
6	0.2284n	—1	0.2284	—1	9.7080	2
7	—	—	—	+1	9.7080n	3
1	—	—	—	—	—	4
2	—	—	—	—	—	5
3	—	—	—	—	—	6
4	0.2931n	—	—	—	—	7

Die Werthe der jetzt in Betracht kommenden Hülfsgrössen sind zufolge des Art. 11.

$$\alpha' = +(9.3271),\ \alpha'' = +(9.5520),\ \alpha''' = 0,\ \alpha^{IV} = 0,\ \alpha^{V} = 0,\ \alpha^{VI} = 0$$

$$\beta'' = +(9.8314),\ \beta''' = 0,\ \beta^{IV} = 0,\ \beta^{V} = 0,\ \beta^{VI} = 0$$

$$\gamma''' = 0,\ \gamma^{IV} = 0,\ \gamma^{V} = 0,\ \gamma^{VI} = 0$$

$$\delta^{IV} = 0,\ \delta^{V} = -(8.8697),\ \delta^{VI} = -(9.0817)$$

$$\varepsilon^{V} = -(8.8697),\ \varepsilon^{VI} = -(9.0817)$$

$$\zeta^{VI} = -(9.0817)$$

$$(1,1) = (1.5760)\ ,\ (5,5,4) = (1.3802)$$

$$(2,2,1) = (1.1554)\ ,\ (6,6,5) = (1.4850)$$

$$(3,3,2) = (0.8878)\ ,\ (7,7,6) = (1.4297)$$

$$(4,4,3) = (1.3802)$$

Da beim gegenwärtigen Verfahren in verschiedenen Fällen verschiedene Hülfsgrössen Null werden können, so will ich die Formeln, nach welchen die Rechnungen auszuführen sind, ohne jede Abkürzung für sieben Richtungen aufstellen, gleichwie dieses im Art. 11 für die dort in Betracht kommenden Grössen geschehen ist.

$$\eta(1,I)= q(1,I)$$
$$\eta(2,I)= \alpha'.q(1,I)+ q(2,I)$$
$$\eta(3,I)= \alpha''.q(1,I)+\beta''.q(2,I)+ q(3,I)$$
$$\eta(4,I)=\alpha'''.q(1,I)+\beta'''.q(2,I)+\gamma'''.q(3,I)+ q(4,I)$$
$$\eta(5,I)=\alpha^{IV}.q(1,I)+\beta^{IV}.q(2,I)+\gamma^{IV}.q(3,I)+\delta^{IV}.q(4,I)+ q(5,I)$$
$$\eta(6,I)= \alpha^{V}.q(1,I)+\beta^{V}.q(2,I)+\gamma^{V}.q(3,I)+\delta^{V}.q(4,I)+\varepsilon^{V}.q(5,I)+ q(6,I)$$
$$\eta(7,I)=\alpha^{VI}.q(1,I)+\beta^{VI}.q(2,I)+\gamma^{VI}.q(3,I)+\delta^{VI}.q(4,I)+\varepsilon^{VI}.q(5,I)+\zeta^{VI}.q(6,I)+q(7,I)$$

$$Q(1,I) = \frac{\eta(1,I)}{(1,1)},\ Q(2,I) = \frac{\eta(2,I)}{(2,2,1)},\ Q(3,I) = \frac{\eta(3,I)}{(3,3,2)},\ \text{etc.}$$

$$f(1,I)= Q(1,I)+\alpha'.Q(2,I)+\alpha''.Q(3,I)+\alpha'''.Q(4,I)+\alpha^{IV}.Q(5,I)+\alpha^{V}.Q(6,I)+\alpha^{VI}.Q(7,I)$$
$$f(2,I)= Q(2,I)+\beta''.Q(3,I)+\beta'''.Q(4,I)+\beta^{IV}.Q(5,I)+\beta^{V}.Q(6,I)+\beta^{VI}.Q(7,I)$$
$$f(3,I)= Q(3,I)+\gamma'''.Q(4,I)+\gamma^{IV}.Q(5,I)+\gamma^{V}.Q(6,I)+\gamma^{VI}.Q(7,I)$$
$$f(4,I)= Q(4,I)+\delta^{IV}.Q(5,I)+\delta^{V}.Q(6,I)+\delta^{VI}.Q(7,I)$$
$$f(5,I)= Q(5,I)+\varepsilon^{V}.Q(6,I)+\varepsilon^{VI}.Q(7,I)$$
$$f(6,I)= Q(6,I)+\zeta^{VI}.Q(7,I)$$
$$f(7,I)= Q(7,I)$$

Man bekommt hiemit für das Beispiel sehr leicht

r	$\log\eta(r,IX)$	$\log\eta(r,X)$	$\log\eta(r,XII)$	$\log\eta(r,XIV)$	$\log\eta(r,XV)$	$\log\eta(r,XVI)$	
5	—	—	—	0.	9.2205*n*	0. *n*	1
6	—	—	—	9.3271	8.5476*n*	9.8963	2
7	—	—	—	9.5520	8.7725*n*	9.5078	3
1	0. *n*	0.2071*n*	—	—	—	—	4
2	0.	0.4239	9.6930*n*	0. *n*	—	—	5
3	—	0.0496*n*	0.0338	8.8697	0.2547*n*	—	6
4	—	6.602*n*	9.7900*n*	9.0817	0.3387	—	7

r	$\log\eta(r,XVII)$	$\log\eta(r,XVIII)$	$\log\eta(r,XIX)$	$\log\eta(r,XX)$	$\log\eta(r,XXII)$	
5	0.5630	0.	0.2284*n*	—	—	1
6	9.9619*n*	9.8963*n*	0.1249	0. *n*	9.7080	2
7	9.1920	9.5078*n*	9.7360	9.5073	9.2156*n*	3
1	—	—	—	—	—	4
2	—	—	—	—	—	5
3	—	—	—	—	—	6
4	0.2931*n*	—	—	—	—	7

r	log Q(r,IX)	log Q(r,X)	log Q(r,XII)	log Q(r,XIV)	log Q(r,XV)	log Q(r,XVI)	
5	—	—	—	8.4240	7.6445n	8.4240n	1
6	—	—	—	8.1717	7.3922n	8.7409	2
7	—	—	—	8.6642	7.8847n	8.6200	3
1	8.6198n	8.8269n	—	—	—	—	4
2	8.6198	9.0437	8.3128n	8.6198n	—	—	5
3	—	8.5646n	8.5488	7.3847	8.7697n	—	6
4	—	5.172 n	8.3603n	7.6520	8.9090	—	7

r	log Q(r,XVII)	log Q(r,XVIII)	log Q(r,XIX)	log Q(r,XX)	log Q(r,XXII)	
5	8.9870	8.4240	8.6524n	—	—	1
6	8.8065n	8.7409n	8.9695	8.8446n	8.5526	2
7	8.3042	8.6200n	8.8482	8.6195	8.3278n	3
1	—	—	—	—	—	4
2	—	—	—	—	—	5
3	—	—	—	—	—	6
4	8.8634n	—	—	—	—	7

r	log f(r,IX)	log f(r,X)	log f(r,XII)	log f(r,XIV)	log f(r,XV)	log f(r,XVI)	
5	—	—	—	8.6641	7.8847n	—	1
6	—	—	—	8.6641	7.8847n	8.9208	2
7	—	—	—	8.6642	7.8847n	8.6200	3
1	8.6198n	8.8090n	6.161	6.8580n	7.7347n	—	4
2	8.6198	9.0542	8.3096n	8.6273n	7.7347n	—	5
3	—	8.5646n	8.5815	7.2751	8.8366n	—	6
4	—	5.172 n	8.3603n	7.6520	8.9090	—	7

r	log f(r,XVII)	log f(r,XVIII)	log f(r,XIX)	log f(r,XX)	log f(r,XXII)	
5	8.9573	—	—	—	—	1
6	8.7023n	8.9208n	9.1493	8.6198n	8.3276	2
7	8.3042	8.6200n	8.8482	8.6195	8.4278n	3
1	7.9451	—	—	—	—	4
2	7.9451	—	—	—	—	5
3	7.9451	—	—	—	—	6
4	8.8634n	—	—	—	—	7

Auch diese f Functionen kann man auf dieselbe Weise controliren wie oben, und es erstreckt sich die Wirkung davon auch auf die zu $r(6)$ und $r(7)$ gehörigen Functionen, obgleich N' und N'' Null sind. Die ersten Controlrechnungen stehen wie folgt

$$N.f(5,XIV) = +0.07994$$

$$N_{\prime}.f(1,X) = -0.1487,\quad N_{\prime}.f(1,XII) = +0.0003,\quad N_{\prime}.f(1,XIV) = -0.00167$$

$$N_{\prime\prime}.f(2,X) = +0.2617,\quad N_{\prime\prime}.f(2,XII) = -0.0471,\quad N_{\prime\prime}.f(2,XIV) = -0.09790$$

$$N_{\prime\prime\prime}.f(3,X) = -0.1130,\quad N_{\prime\prime\prime}.f(3,XII) = +0.1174,\quad N_{\prime\prime\prime}.f(3,XIV) = +0.00580$$

$$N_{iv}.f(4,X) = 0.0000,\quad N_{iv}.f(4;XII) = -0.0706,\quad N_{iv}.f(4,XIV) = +0.01382$$

Sa. = 0.0000 Sa. = 0.0000 Sa. = —0.00001

20.

Der Beitrag, den die in Rede stehende Station jetzt zu den Coefficienten der Endgleichungen liefert, ist der folgende.

r	(IX,IX)	(IX,X)	(IX,XII)	(IX,XIV)	(IX,XV)	(IX,XVI)
1	0.04167	+0.0644	−0.00015	+0.00072	+0.00543	0.
2	0.04167	+0.1133	−0.02040	−0.04239	−0.00543	0.
	0.08334	+0.1777	−0.02055	−0.04167	0.	

r	(IX,XVII)	(IX,XVIII)	(IX,XIX)	(IX,XX)	(IX,XXII)	
1	−0.00881	0.	0.	0.	0.	
2	+0.00881	0.	0.	0.	0.	
	0.					

r	(X,X)	(X,XII)	(X,XIV)	(X,XV)	(X,XVI)	(X,XVII)
1	0.1038	−0.00023	+0.0012	+0.00874	0.	−0.01420
2	0.3007	−0.05414	−0.1125	−0.01441	0.	+0.02339
3	0.0383	−0.03981	−0.0020	+0.07162	0.	−0.00920
	0.4428	−0.09418	−0.1133	+0.06595		−0.00001

r	(X,XVIII)	(X,XIX)	(X,XX)	(X,XXII)		
1	0.	0.	0.	0.		
2	0.	0.	0.	0.		
3	0.	0.	0.	0.		

r	(XII,XII)	(XII,XIV)	(XII,XV)	(XII,XVI)	(XII,XVII)	(XII,XVIII)
2	0.01006	+0.02091	+0.00268	0.	−0.00435	0.
3	0.03980	+0.00197	−0.07163	0.	+0.00920	0.
4	0.01261	−0.00247	−0.04462	0.	+0.04017	0.
	0.06247	+0.02041	−0.11357		+0.04502	

r	(XII,XIX)	(XII,XX)	(XII,XXII)			
2	0.	0.	0.			
3	0.	0.	0.			
4	0.	0.	0.			

r	(XIV,XIV)	(XIV,XV)	(XIV,XVI)	(XIV,XVII)	(XIV,XVIII)	(XIV,XIX)
5	0.04614	−0.00767	0.	+0.09064	0.	0.
2	0.04239	+0.00543	0.	−0.00881	0.	0.
	0.08853	−0.00224		+0.08183		

r	(XIV,XX)	(XIV,XXII)				
5	0.	0.				
2	0.	0.				

r	(XV,XV)	(XV,XVI)	(XV,XVII)	(XV,XVIII)	(XV,XIX)	(XV,XX)
5	0.0013	0.	−0.0151	0.	0.	0.
3	0.1234	0.	−0.0158	0.	0.	0.
4	0.1593	0.	−0.1434	0.	0.	0.
	0.2840		−0.1743			
r	**(XV,XXII)**					
5	0.					
3	0.					
4	0.					
r	**(XVI,XVI)**	**(XVI,XVII)**	**(XVI,XVIII)**	**(XVI,XIX)**	**(XVI,XX)**	**(XVI,XXII)**
5	0.	−0.09064	0.	0.	0.	0.
6	0.08333	−0.05038	−0.08333	+0.1410	−0.04167	+0.02126
	0.08333	−0.14102	−0 08333	+0.1410	−0.04167	+0.02126
r	**(XVII XVII)**	**(XVII,XVIII)**	**(XVII,XIX)**	**(XVII,XX)**	**(XVII,XXII)**	
5	0.3314	0.	0.	0.	0.	
6	0.0853	+0.1410	−0.2386	+0.07050	−0.03598	
4	0.1434	0.	0.	0.	0.	
	0.5601	+0.1410	−0.2386	+0.07050	−0.03598	
r	**(XVIII,XVIII)**	**(XVIII,XIX)**	**(XVIII,XX)**	**(XVIII,XXII)**		
6	0.08333	−0.1410	+0.04167	−0.02126		
r	**(XIX,XIX)**	**(XIX,XX)**	**(XIX,XXII)**			
6	0.2386	−0.07050	+0.03598			
r	**(XX,XX)**	**(XX,XXII)**				
6	0.04167	−0.02126				
7	0.04165	−0.02125				
	0.08332	−0.04251				
r	**(XXII,XXII)**					
6	0.01086					
7	0.01086					
	0.02172					

Vergleicht man die vorstehenden Werthe der Coefficienten mit denen des Art. 18, die ohne die Zerlegung der Stationsgleichungen erhalten worden sind, so wird man eine so vollständige Uebereinstimmung finden, wie die angewandten Logarithmen erlauben, obgleich die einzelnen Glieder, aus welchen jeder Coefficient besteht, oftmals sehr von einander verschieden sind. Die Anwendung der Zerlegung der Stations-

gleichungen führt also auf dieselben Endgleichungen, die man bekommt, wenn man diese Zerlegung nicht anwendet. Die Werthe der Unbekannten dieser Gleichungen, die in der Abhandlung mit (*I*), (*II*), (*III*), etc. bezeichnet wurden, sind also in beiden Fällen dieselben.

21.

Um die Vergleichung der beiden Verfahrungsarten vollständig auszuführen, ist noch nachzuweisen, dass auch die Verbesserungen $z(r)$ der Richtungen mit einander übereinstimmen, oder wenigstens nur um eine constante Grösse von einander verschieden sind. Zufolge des allgemeinen Ausdrucks

$$z(r) = f(r,I)(I) + f(r,II)(II) + f(r,III)(III) + \text{etc.}$$

bekommt man aus dem Art. 17

$$z(1) = -0.0417(IX) - 0.0644(X) + 0.0001(XII) - 0.0203(XIV) - 0.0022(XV) - 0.0265(XVI) + 0.0152(XVII) + 0.0265(XVIII) - 0.0449(XIX)$$

u. s. w. Um diese Gleichungen übersichtlich aufzustellen, will ich sie in dieselbe tabularische Form bringen die oben angewandt wurde. Es wird daher

	(*IX*)	(*X*)	(*XII*)	(*XIV*)	(*XV*)	(*XVI*)
$z(1) =$	−0.0417	−0.0644	+0.0001	−0.0203	−0.0022	−0.0265
$z(2) =$	+0.0417	+0.1133	−0.0204	−0.0620	−0.0022	−0.0265
$z(3) =$		−0.0367	+0.0381	−0.0177	−0.0654	−0.0265
$z(4) =$			−0.0229	−0.0151	+0.0844	−0.0265
$z(5) =$				+0.0265	−0.0044	−0.0265
$z(6) =$				+0.0265	−0.0044	+0.0568
$z(7) =$				+0.0265	−0.0044	+0.0151
ferner	(*XVII*)	(*XVIII*)	(*XIX*)	(*XX*)	(*XXII*)	
$z(1)$	+0.0152	+0.0265	−0.0449			
$z(2)$	+0.0152	+0.0265	−0.0449			
$z(3)$	+0.0152	+0.0265	−0.0449			
$z(4)$	−0.0666	+0.0265	−0.0449			
$z(5)$	+0.0970	+0.0265	−0.0449			
$z(6)$	−0.0439	−0.0568	+0.0961	−0.0417	+0.0213	
$z(7)$	+0.0265	−0.0151	+0.0256	+0.0417	−0.0213	

wogegen der Art. 19 die folgende Zusammenstellung giebt.

	(*IX*)	(*X*)	(*XII*)	(*XIV*)	(*XV*)	(*XVI*)
$z(1) =$	−0.0417	−0.0644	+0.0001	−0.0007	−0.0054	
$z(2) =$	+0.0417	+0.1133	−0.0204	−0.0424	−0.0054	
$z(3) =$		−0.0367	+0.0381	+0.0019	−0.0686	
$z(4) =$			−0.0229	+0.0045	+0.0811	
$z(5) =$				+0.0461	−0.0077	
$z(6) =$				+0.0461	−0.0077	+0.0833
$z(7) =$				+0.0461	−0.0077	+0.0417
ferner	(*XVII*)	(*XVIII*)	(*XIX*)	(*XX*)	(*XXII*)	
$z(1)$	+0.0088					
$z(2)$	+0.0088					
$z(3)$	+0.0088					
$z(4)$	−0.0730					
$z(5)$	+0.0906					
$z(6)$	−0.0504	−0.0833	+0.1410	−0.0417	+0.0213	
$z(7)$	+0.0201	−0.0417	+0.0705	+0.0417	−0.0213	

Man erkennt leicht, dass dieses zweite System von Ausdrücken der $z(r)$ mit dem ersten identisch wird, wenn man jeder Gleichung desselben die constante Grösse

$$- 0.0196\ (XIV) + 0.0032\ (XV) - 0.0265\ (XVI)$$
$$+ 0.0064\ (XVII) + 0.0265\ (XVIII) - 0.0449\ (XIX)$$

hinzufügt. Beide bis jetzt vollständig erörterte Verfahrungsarten führen daher auf identische Endresultate für die Ausgleichung eines Dreiecksnetzes.

22.

Gehen wir noch, um möglichst vollständig zu sein, die übrigen im Vorhergehenden erklärten Zerlegungsarten durch. Um das Verfahren des Art. 12 weiter auszuführen, haben wir zu berücksichtigen, dass die beiden letzten Unbekannten nicht die Richtungen (6) und (7) selbst, sondern die Unterschiede dieser mit der Richtung (5) sind, und dieselben Unbekannten in die Differentialquotienten der Bedingungsgleichungen einzuführen. Es ist zu dem Ende nichts weiter zu thun, als die Identitäten

$$\{(6) - (5)\} + (5) = (6)\,,\ \{(7) - (5)\} + (5) = (7)$$

aufzustellen, und diese statt (6) und (7) zu substituiren. Die Tafel des Art. 16 steht daher jetzt so,

r	$q(r,IX)$	$\log q(r,X)$	$\log q(r,XII)$	$q(r,XIV)$	$\log q(r,XV)$	$q(r,XVI)$
1	—1	0.2071n	—	—	—	—
2	+1	0.4239	9.6930n	—1	—	—
3	—	0.0185n	0.0185	—	0.2547n	—
4	—	—	9.7405n	—	0.2931	—
5	—	—	—	+1	9.2205n	—
(6) — (5)	—	—	—		—	+1
(7) — (5)	—	—	—		—	—
r	**$\log q(r,XVII)$**	**$q(r,XVIII)$**	**$\log q(r,XIX)$**	**$q(r,XX)$**	**$\log q(r,XXII)$**	
1	—	—	—	—	—	
2	—	—	—	—	—	
3	—	—	—	—	—	
4	0.2931n	—	—	—	—	
5	0.2931	—	—	—	—	
(6) — (5)	0.2284n	—1	0.2284	—1	9.7080	
(7) — (5)	—	—	—	+1	9.7080n	

Die jetzt anzuwendenden, aus dem Art. 12 zu entnehmenden Hülfsgrössen sind

$$\beta''' = 0\,,\quad \beta^{IV} = 0\,,\quad \beta^{V} = 0\,,\quad \delta^{VI} = 0$$

$$\gamma''' = +\,(8.6990)\,,\quad \gamma^{IV} = +\,(8.7448)\,,\quad \gamma^{V} = 0\,,\quad \gamma^{VI} = 0$$

$$\delta^{IV} = +\,(9.0458)\,,\quad \delta^{V} = 0\,,\quad \delta^{VI} = 0$$

$$\varepsilon^{V} = 0\,,\quad \varepsilon^{VI} = 0$$

$$\zeta.' = +\,(9.6990)$$

$$(1,1) = (1.3802)\,,\quad (5,5,4) = (1.3290)$$

$$(2,2,1) = (1.3802)\,,\quad (6,6,5) = (1.2041)$$

$$(3,3,2) = (1.4260)\,,\quad (7,7,6) = (1.0792)$$

$$(4,4,3) = (1.3345)\,,$$

und hiemit erhält man die folgenden Werthe.

r	$\log \eta(r,IX)$	$\log \eta(r,X)$	$\log \eta(r,XII)$	$\log \eta(r,XIV)$	$\log \eta(r,XV)$	$\log \eta(r,XVI)$
1	0. n	0.2071n	—	—	—	—
2	0.	0.4293	9.6930n	0. n	—	—
3	—	0.0185n	0.0185	—	0.2547n	—
4	—	8.7175n	9.6971n	—	0.2728	—
5	—	8.7633n	7.4983n	0.	8.6794n	—
(6) — (5)	—	—	—	—	—	0.
(7) — (5)	—	—	—	—	—	9.6990
r	**$\log \eta(r,XVII)$**	**$\log \eta(r,XVIII)$**	**$\log \eta(r,XIX)$**	**$\log \eta(r,XX)$**	**$\log \eta(r,XXII)$**	
1	—	—	—	—	—	
2	—	—	—	—	—	
3	—	—	—	—	—	
4	0.2931n	—	—	—	—	
5	0.2420	—	—	—	—	
(6) — (5)	0.2284n	0. n	0.2284	0. n	9.7080	
(7) — (5)	9.9274n	9.6990n	9.9274	9.6990	9.4070n	

r	log Q(r,IX)	log Q(r,X)	log Q(r,XII)	log Q(r,XIV)	log Q(r,XV)	log Q(r,XVI)
1	8.6198n	8.8269n	—	—	—	—
2	8.6198	9.0437	8.3128n	8.6198n	—	—
3	—	9.5925n	8.5925	—	8.8287n	—
4	—	7.3830n	8.3626n	—	8.9383	—
5	—	7.4343n	6.169n	8.6710	7.3504n	—
(6) — (5)	—	—	—	—	—	8.7959
(7) — (5)	—	—	—	—	—	8.6198

r	log Q(r,XVII)	log Q(r,XVIII)	log Q(r,XIX)	log Q(r,XX)	log Q(r,XXII)	
1	—	—	—	—	—	
2	—	—	—	—	—	
3	—	—	—	—	—	
4	8.9586n	—	—	—	—	
5	8.9130	—	—	—	—	
(6) — (5)	9.0243n	8.7959n	9.0243	8.7959n	8.5039	
(7) — (5)	8.8482n	8.6198n	8.8482	8.6198	8.3278n	

r	log f(r,IX)	log f(r,X)	log f(r,XII)	log f(r,XIV)	log f(r,XV)	log f(r,XVI)
1	8.6198n	8.8269n	—	—	—	—
2	8.6198	9.0437	8.3128n	8.6198n	—	—
3	—	8.5955n	8.5795	7.4158	8.8006n	—
4	—	7.4343n	8.3630n	7.7168	8.9371	—
5	—	7.4343n	6.169 n	8.6710	7.3504n	—
(6) — (5)	—	—	—	—	—	8.9208
(7) — (5)	—	—	—	—	—	8.6198

r	log f(r,XVII)	log f(r,XVIII)	log f(r,XIX)	log f(r,XX)	log f(r,XXII)	
1	—	—	—	—	—	
2	—	—	—	—	—	
3	—	—	—	—	—	
4	8.9129n	—	—	—	—	
5	8.9130	—	—	—	—	
(6) — (5)	9.1492n	8.9208n	9.1492	8.6198n	8.3278	
(7) — (5)	8.8482n	8.6198n	8.8482	8.6198	8.3278n	

Die f Functionen lassen sich wieder eben so controliren wie die vorhergehenden, hier entziehen sich jedoch dieser Controle diejenigen, die zu (6)—(5) und (7)—(5) gehören, weil N^v und N^{vi} Null sind, und eine völlige Unabhängigkeit von den vorhergehenden Grössen statt findet.

23.

Der Beitrag, den beim gegenwärtigen Verfahren die in Rede stehende Station zu den Coefficienten der Endgleichungen liefert, ist der folgende.

r	(IX,IX)	(IX,X)	(IX,XII)	(IX,XIV)	(IX,XV)	(IX,XVI)
1	0.04167	+0.0671	0.	0.	0.	0.
2	0.04167	+0.1106	−0.02055	−0.04167	0.	0.
	0.08334	+0.1777	−0.02055	−0.04167		

r	(IX,XVII)	(IX,XVIII)	(IX,XIX)	(IX,XX)	(IX,XXII)	
1	0.	0.	0.	0.	0.	
2	0.	0.	0.	0.	0.	

r	(X,X)	(X,XII)	(X,XIV)	(X,XV)	(X,XVI)	(X,XVII)
1	0.1082	0.	0.	0.	0.	0.
2	0.2935	−0.05454	−0.1106	0.	0.	0.
3	0.0411	−0.03964	−0.0027	+0.06593	0.	0.
	0.4428	−0.09418	−0.1133	+0.06593		

r	(X,XVIII)	(X,XIX)	(X,XX)	(X,XXII)		
1	0.	0.	0.	0.		
2	0.	0.	0.	0.		
4	0.	0.	0.	0.		

r	(XII,XII)	(XII,XIV)	(XII,XV)	(XII,XVI)	(XII,XVII)	(XII,XVIII)
2	0.01014	+0.02055	0.	0.	0.	0.
3	0.03964	+0.00272	−0.06593	0.	0.	0.
4	0.01269	−0.00287	−0.04760	0.	+0.04503	0.
	0.06247	+0.02040	−0.11353		+0.04503	

r	(XII,XIX)	(XII,XX)	(XII,XXII)			
2	0.	0.	0.			
3	0.	0.	0.			
4	0.	0.	0.			

r	(XIV,XIV)	(XIV,XV)	(XIV,XVI)	(XIV,XVII)	(XIV,XVIII)	(XIV,XIX)
2	0.04167	0.	0.	0.	0.	0.
5	0.04687	−0.00224	0.	+0.08184	0.	0.
	0.08854	−0.00224		+0.08184		

r	(XIV,XX)	(XIV,XXII)				
2	0.	0.				
5	0.	0.				

r	(XV,XV)	(XV,XVI)	(XV,XVII)	(XV,XVIII)	(XV,XIX)	(XV,XX)
3	0.1136	0.	0.	0.	0.	0.
4	0.1699	0.	−0.1607	0.	0.	0.
5	0.0004	0.	−0.0136	0.	0.	0.
	0.2839		−0.1743			

r	(XV,XXII)					
3	0.					
4	0.					
5	0.					
r	(XVI,XVI)	(XVI,XVII)	(XVI,XVIII)	(XVI,XIX)	(XVI,XX)	(XVI,XXII)
(6) — (5)	—0.08333	—0.1410	—0.08333	+0.1410	—0.04167	+0.02127
r	(XVII,XVII)	(XVII,XVIII)	(XVII,XIX)	(XVII,XX)	(XVII,XXII)	
4	0.1607	0.	0.	0.	0.	
5	0.1607	0.	0.	0.	0.	
(6) — (5)	0.2386	+0.1410	—0.2385	+0.07050	—0.03599	
	0.5600	+0.1410	—0.2385	+0.07050	—0.03599	
r	(XVIII,XVIII)	(XVIII,XIX)	(XVIII,XX)	(XVIII,XXII)		
(6) — (5)	0.08333	—0.1410	+0.04167	—0.02127		
r	(XIX,XIX)	(XIX,XX)	(XIX,XXII)			
(6) — (5)	0.2386	—0.07050	+0.03599			
r	(XX,XX)	(XX,XXII)				
(6) — (5)	0.04167	—0.02127				
(7) — (5)	0.04167	—0.02127				
	0.08334	—0.04254				
r	(XXII,XXII)					
(6) — (5)	0.01086					
(7) — (5)	0.01086					
	0.02172					

Die Vergleichung dieser Werthe mit den vorhergehenden durch andere Verfahrungsarten erhaltenen zeigt wieder die erwartete Uebereinstimmung.

24.

Zur Vergleichung der sich jetzt herausstellenden Ausdrücke der $z(r)$ mache ich zuerst die folgende Zusammenstellung aus dem Art. 22, in welcher ich durch Addition des Ausdrucks für $z(5)$ zu den beiden folgenden die Ausdrücke für $z(6)$ und $z(7)$ erhalten habe.

	(IX)	(X)	(XII)	(XIV)	(XV)	(XVI)
$z(1) =$	-0.0417	-0.0671				
$z(2) =$	$+0.0417$	$+0.1106$	-0.0205	-0.0417		
$z(3) =$		-0.0394	$+0.0380$	$+0.0026$	-0.0632	
$z(4) =$		-0.0027	-0.0231	$+0.0052$	$+0.0865$	
$z(5) =$		-0.0027	-0.0001	$+0.0469$	-0.0022	
$z(6) =$		-0.0027	-0.0001	$+0.0469$	-0.0022	$+0.0833$
$z(7) =$		-0.0027	-0.0001	$+0.0469$	-0.0022	$+0.0417$
ferner	(XVII)	(XVIII)	(XIX)	(XX)	(XXII)	
$z(1)$						
$z(2)$						
$z(3)$						
$z(4)$	-0.0818					
$z(5)$	$+0.0818$					
$z(6)$	-0.0592	-0.0833	$+0.1410$	-0.0417	$+0.0213$	
$z(7)$	$+0.0113$	-0.0417	$+0.0705$	$+0.0417$	-0.0213	

Die Vergleichung dieser mit der ersten Gruppe von ähnlichen Gleichungen des Art. 21 giebt zu erkennen, dass beide Gruppen identisch werden, wenn man in der vorstehenden jeder Gleichung die Constante

$+ 0.0027\ (X) + 0.0001\ (XII) - 0.0203\ (XIV) - 0.0022\ (XV)$
$- 0.0265 (XVI) + 0.0152\ (XVII) + 0.0265 (XVIII) - 0.0449 (XIX)$

hinzufügt. Die hier behandelte Zerlegung führt daher auf dieselben Werthe der Ausgleichung der Winkel des Dreiecksnetzes, wie die vorhergehenden.

25.

Gehen wir jetzt zum Verfahren des Art. 13 über, und führen auch für dieses den zweiten Theil der Auflösung aus, so müssen wir vor Allem in dem Täfelchen der Differentialquotienten der Bedingungsgleichungen statt der fünf ersten Richtungen selbst ihre Unterschiede mit der ersten derselben einführen, während die Unterschiede (6)—(5) und (7)—(5) unverändert beibehalten werden müssen. Man erkennt aber leicht, dass die Einführung von (2)—(1), (3)—(1), etc. statt (2), (3), etc. die in der Tafel des Art. 22 angegebenen Werthe der $q(r,IX)$, $q(r,X)$, etc. gar nicht ändert, und es kann also unter der Bedingung, dass man die neben der 1 angegebenen Werthe weglässt, diese Tafel im gegenwärtigen Falle wieder angewandt werden.

Die jetzt anzuwendenden Hülfsgrössen sind zufolge des Art. 13 die folgenden,

$$\beta''=+(9.4559),\beta'''=+(9.4881),\beta^{IV}=+(9.6727),\beta^{V}=0,\beta^{VI}=0$$
$$\gamma'''=+(9.5145),\gamma^{IV}=+(9.6990),\gamma^{V}=0,\gamma^{VI}=0$$
$$\delta^{IV}=+(9.7238),\delta^{V}=0,\delta^{VI}=0$$
$$\varepsilon^{V}=0,\varepsilon^{VI}=0$$
$$\zeta^{VI}=+(9.6990)$$

$$(2,2,1)=(1.2711)\ ,\ (5,5,4)=(1.0528)$$
$$(3,3,2)=(1.2969)\ ,\ (6,6,5)=(1.2041)$$
$$(4,4,3)=(1.1957)\ ,\ (7,7,6)=(1.0792)$$

und hiemit ergeben sich die folgenden Werthe,

r	$\log\eta(r,IX)$	$\log\eta(r,X)$	$\log\eta(r,XII)$	$\log\eta(r,XIV)$	$\log\eta(r,XV)$	$\log\eta(r,XVI)$
(2) — (1)	0.	0.4239	9.6930n	0. n	—	—
(3) — (1)	9.4559	9.4558n	9.9557	9.4559n	0.2547n	—
(4) — (1)	9.4881	9.6771	9.5571n	9.4881n	0.1386	—
(5) — (1)	9.6727	9.8617	7.230 n	9.7237	8.4031n	—
(6) — (5)	—	—	—	—	—	0.
(7) — (5)	—	—	—	—	—	9.6990

r	$\log\eta(r,XVII)$	$\log\eta(r,XVIII)$	$\log\eta(r,XIX)$	$\log\eta(r,XX)$	$\log\eta(r,XXII)$
(2) — (1)	—	—	—	—	—
(3) — (1)	—	—	—	—	—
(4) — (1)	0.2931n	—	—	—	—
(5) — (1)	9.9658	—	—	—	—
(6) — (5)	0.2284n	0. n	0.2284	0. n	9.7080
(7) — (5)	9.9274n	9.6990n	9.9274	9.6990	9.4070n

r	$\log Q(r,IX)$	$\log Q(r,X)$	$\log Q(r,XII)$	$\log Q(r,XIV)$	$\log Q(r,XV)$	$\log Q(r,XVI)$
(2) — (1)	8.7289	9.1528	8.4219n	8.7289n	—	—
(3) — (1)	8.1590	8.1589n	8.6588	8.1590n	8.9578n	—
(4) — (1)	8.2924	8.4814	8.3614n	8.2924n	8.9429	—
(5) — (1)	8.4699	8.8089	6.177 n	9.6709	7.3503n	—
(6) — (5)	—	—	—	—	—	8.7959
(7) — (5)	—	—	—	—	—	8.6498

r	$\log Q(r,XVII)$	$\log Q(r,XVIII)$	$\log Q(r,XIX)$	$\log Q(r,XX)$	$\log Q(r,XXII)$
(2) — (1)	—	—	—	—	—
(3) — (1)	—	—	—	—	—
(4) — (1)	9.0974n	—	—	—	—
(5) — (1)	8.9130	—	—	—	—
(6) — (5)	9.0234n	8.7959n	9.0243	8.7959n	8.5039
(7) — (5)	8.8482n	8.6198n	8.8482	8.6198	8.3278n

r	log f(r,IX)	log f(r,X)	log f(r,XII)	log f(r,XIV)	log f(r,XV)	log f(r,XVI)
(2)—(1)	8.9208	9.2497	8.3126n	8.6196n	—	—
(3)—(1)	8.6198	8.4425	8.5798	7.4158	8.8006n	—
(4)—(1)	8.6198	8.8088	8.3627n	7.7168	8.9370	—
(5)—(1)	8.6199	8.8089	6.177 n	8.6709	7.3503n	—
(6)—(5)	—	—	—	—	—	8.9208
(7)—(5)	—	—	—	—	—	8.6198

r	log f(r,XVII)	log f(r,XVIII)	log f(r,XIX)	log f(r,XX)	log f(r,XXII)	
(2)—(1)	—	—	—	—	—	
(3)—(1)	—	—	—	—	—	
(4)—(1)	8.9130n	—	—	—	—	
(5)—(1)	8.9130	—	—	—	—	
(6)—(5)	9.1492n	8.9208n	9.1492	8.6198n	8.3278	
(7)—(5)	8.8482n	8.6198n	8.8482	8.6198	8.3278n	

Die Bedingungsgleichung, durch welche im Vorhergehenden die Werthe der f Functionen geprüft werden konnten, ist hier nicht anwendbar, da jetzt alle N Null sind.

26.

Der Beitrag, den die Station jetzt zu den Endgleichungen liefert, steht wie folgt, zur Abkürzung jedoch habe ich die Coefficienten, die unmittelbar Null werden, weggelassen.

r	(IX,IX)	(IX,X)	(IX,XII)	(IX,XIV)
(2)—(1)	0.08333	+0.1777	—0.02054	—0.04165

r	(X,X)	(X,XII)	(X,XIV)	(X,XV)
(2)—(1)	0.4717	—0.05451	—0.1106	0.
(3)—(1)	—0.0289	—0.03965	—0.0027	+0.06593
	0.4428	—0.09416	—0.1133	+0.06593

r	(XII,XII)	(XII,XIV)	(XII,XV)	(XII,XVII)
(2)—(1)	0.01013	+0.02054	0.	0.
(3)—(1)	0.03965	+0.00272	—0.06593	0.
(4)—(1)	0.01268	—0.00287	—0.04759	+0.04503
	0.06246	+0.02039	—0.11352	+0.04503

r	(XIV,XIV)	(XIV,XV)	(XIV,XVII)
(2)—(1)	0.04165	0.	0.
(3)—(1)	0.04687	—0.00224	+0.08184
	0.08852	—0.00224	+0.08184

r	(XV,XV)	$(XV,XVII)$
(3)—(1)	0.1136	0.
(4)—(1)	0.1699	—0.1607
(5)—(1)	0.0004	—0.0136
	0.2839	—0.1743

r	(XVI,XVI)	$(XVI,XVII)$	$(XVI,XVIII)$	(XVI,XIX)	(XVI,XX)	$(XVI,XXII)$
(6)—(5)	0.08333	—0.1410	—0.08333	+0.1410	—0.04167	+0.02127

r	$(XVII,XVII)$	$(XVII,XVIII)$	$(XVII,XIX)$	$(XVII,XX)$	$(XVII,XXII)$
(4)—(1)	0.1607	0.	0.	0.	0.
(5)—(1)	0.1607	0.	0.	0.	0.
(6)—(5)	0.2386	+0.1410	—0.2385	+0.07050	—0.03599
	0.5600	+0.1410	—0.2385	+0.07050	—0.03599

r	$(XVIII,XVIII)$	$(XVIII,XIX)$	$(XVIII,XX)$	$(XVIII,XXII)$
(6)—(5)	0.08333	—0.1410	+0.04167	—0.02127

r	(XIX,XIX)	(XIX,XX)	$(XIX,XXII)$
(6)—(5)	0.2385	—0.07050	+0.03599

r	(XX,XX)	$(XX,XXII)$
(6)—(5)	0.04167	—0.02127
(7)—(5)	0.04167	—0.02127
	0.08334	—0.04254

r	$(XXII,XXII)$
(6)—(5)	0.01086
(7)—(5)	0.01086
	0.02172

Auch diese Coefficienten stimmen mit den im Vorhergehenden auf verschiedene Arten überein, und die Unbekannten der Endgleichungen bekommen also wieder dieselben Werthe wie vorher.

27.

Stellt man wieder die Gleichungen für die $z(r)$ auf dieselbe Art zusammen wie vorher, so ergiebt sich,

	(*IX*)	(*X*)	(*XII*)	(*XIV*)	(*XV*)	(*XVI*)
$z(2)-z(1)=$	+0.0833	+0.1777	−0.0205	−0.0417		
$z(3)-z(1)=$	+0.0417	+0.0277	+0.0380	+0.0026	−0.0632	
$z(4)-z(1)=$	+0.0417	+0.0644	−0.0231	+0.0052	+0.0865	
$z(5)-z(1)=$	+0.0417	+0.0644	−0.0002	+0.0469	−0.0022	
$z(6)-z(1)=$	+0.0417	+0.0644	−0.0002	+0.0469	−0.0022	+0.0833
$z(7)-z(1)=$	+0.0417	+0.0644	−0.0002	+0.0469	−0.0022	+0.0417
ferner	(*XVII*)	(*XVIII*)	(*XIX*)	(*XX*)	(*XXII*)	
$z(2)-z(1)$						
$z(3)-z(1)$						
$z(4)-z(1)$	−0.0818					
$z(5)-z(1)$	+0.0818					
$z(6)-z(1)$	−0.0592	−0.0833	+0.1410	−0.0417	+0.0213	
$z(7)-z(1)$	+0.0113	−0.0417	+0.0705	+0.0417	−0.0213	

Die Vergleichung dieser Werthe mit denen der Artt. 21 und 24 bewirkt man dadurch, dass man in diesen die Gleichung für $z(1)$ von allen übrigen abzieht; man findet vollständige Uebereinstimmung.

28.

Wenden wir uns endlich auch zu dem Verfahren, welches im Art. 15 vorbereitet wurde, so müssen wir alle Differentialquotienten der Bedingungsgleichungen auf die Unterschiede (1)—(5), (2)—(5), etc. der Richtungen beziehen, und man findet leicht, dass dieses dadurch bewirkt wird, dass man im Täfelchen des Art. 16 die neben der 5 stehenden Zahlen sich weg denkt. Mit dieser Auslassung ist daher dieses Täfelchen jetzt anzuwenden.

Die Hülfsgrössen, die aus dem Art. 15 zu entnehmen sind, sind die folgenden.

$$\alpha' = +(9.4559),\ \alpha'' = +(9.6021),\ \alpha''' = +(9.6990),\ \alpha^{IV} = 0,\ \alpha^{V} = 0,\ \alpha^{VI} = 0$$
$$\beta'' = +(9.6021),\ \beta''' = +(9.6990),\ \beta^{IV} = 0,\ \beta^{V} = 0,\ \beta^{VI} = 0$$
$$\gamma''' = +(9.6990),\ \gamma^{IV} = 0,\ \gamma^{V} = 0,\ \gamma^{VI} = 0$$
$$\delta^{IV} = 0,\ \delta^{V} = 0,\ \delta^{VI} = 0$$
$$\varepsilon^{V} = 0,\ \varepsilon^{VI} = 0$$
$$\zeta^{VI} = +(9.6990)$$

$$(1,1) = (1.2711)\ ,\ (4,4,3) = (1.0792)$$
$$(2,2,1) = (1.2341)\ ,\ (6,6,5) = (1.2041)$$
$$(3,3,2) = (1.2322)\ ,\ (7,7,6) = (1.0792)$$

vermittelst welcher die folgenden Werthe erlangt werden,

r	$\log \eta(r, IX)$	$\log \eta(r, X)$	$\log \eta(r, XII)$	$\log \eta(r, XIV)$	$\log \eta(r, XV)$	$\log \eta(r, XVI)$
(1) — (5)	0. n	0.2071n	—	—	—	—
(2) — (5)	9.8539	0.3412	9.6930n	0. n	—	—
(3) — (5)	—	9.7967n	9.9275	9.6021n	0.2547n	—
(4) — (5)	—	—	9.4391n	9.6990n	0.0274	—
(6) — (5)	—	—	—	—	—	0.
(7) — (5)	—	—	—	—	—	9.6990

r	$\log \eta(r, XVII)$	$\log \eta(r, XVIII)$	$\log \eta(r, XIX)$	$\log \eta(r, XX)$	$\log \eta(r, XXII)$
(1) — (5)	—	—	—	—	—
(2) — (5)	—	—	—	—	—
(3) — (5)	—	—	—	—	—
(4) — (5)	0.2931n	—	—	—	—
(6) — (5)	0.2284n	0. n	0.2284	0. n	9.7080
(7) — (5)	9.9274n	9.6990n	9.9274	9.6990	9.4070n

r	$\log Q(r, IX)$	$\log Q(r, X)$	$\log Q(r, XII)$	$\log Q(r, XIV)$	$\log Q(r, XV)$	$\log Q(r, XVI)$
(1) — (5)	8.7289n	8.9360n	—	—	—	—
(2) — (5)	8.6198	9.1071	8.4589n	8.7659n	—	—
(3) — (5)	—	8.5645n	8.6953	8.3699n	9.0225n	—
(4) — (5)	—	—	8.3599n	8.6198n	8.9482	—
(6) — (5)	—	—	—	—	—	8,7959
(7) — (5)	—	—	—	—	—	8.6198

r	$\log Q(r, XVII)$	$\log Q(r, XVIII)$	$\log Q(r, XIX)$	$\log Q(r, XX)$	$\log Q(r, XXII)$
(1) — (5)	—	—	—	—	—
(2) — (5)	—	—	—	—	—
(3) — (5)	—	—	—	—	—
(4) — (5)	9.2139n	—	—	—	—
(6) — (5)	9.0243n	8.7959n	9.0243	8.7959n	8.5039
(7) — (5)	8.8482n	8.6198n	8.8482	8.6198	8.3278n

r	$\log f(r, IX)$	$\log f(r, X)$	$\log f(r, XII)$	$\log f(r, XIV)$	$\log f(r, XV)$	$\log f(r, XVI)$
(1) — (5)	8.6197n	8.8090n	6.176	8.6709n	7.3522	—
(2) — (5)	8.6197	9.0542	8.3094n	8.9471n	7.3522	—
(3) — (5)	—	8.5645n	8.5814	8.6461n	8.7848n	—
(4) — (5)	—	—	8.3599n	8.6198n	8.9482	—
(6) — (5)	—	—	—	—	—	8.9208
(7) — (5)	—	—	—	—	—	8.6198

r	log f(r, XVII)	log f(r, XVIII)	log f(r, XIX)	log f(r, XX)	log f(r, XXII)
(1) — (5)	8.9129n	—	—	—	—
(2) — (5)	8.9129n	—	—	—	—
(3) — (5)	8.9129n	—	—	—	—
(4) — (5)	9.2139n	—	—	—	—
(6) — (5)	9.1492n	8.9208n	9.1492	8.6198n	8.3276
(7) — (5)	8.8482n	8.6197n	8.8481	8.6197	8.3276n

Auch hier ist die oben angewandte Bedingungsgleichung zur Controle unwirksam.

29.

Der Beitrag zu den Coefficienten der Endgleichungen steht jetzt so.

r	(IX, IX)	(IX, X)	(IX, XII)	(IX, XIV)	(IX, XV)	(IX, XVII)
(1) — (5)	0.04166	+0.0644	−0.00015	+0.04687	−0.00225	+0.08182
(2) — (5)	0.04166	+0.1133	−0.02039	−0.08854	+0.00225	−0.08182
	0.08332	+0.1777	−0.02054	−0.04167	0.	0.

r	(X, X)	(X, XII)	(X, XIV)	(X, XV)	(X, XVII)
(1) — (5)	0.1038	−0.00024	+0.0755	−0.00363	+0.1318
(2) — (5)	0.3007	−0.05411	−0.2350	+0.00597	−0.2172
(3) — (5)	0.0383	−0.03980	+0.0462	+0.06357	+0.0854
	0.4428	−0.09415	−0.1133	+0.06591	0.

r	(XII, XII)	(XII, XIV)	(XII, XV)	(XII, XVII)
(2) — (5)	0.01006	+0.04366	−0.00111	+0.04035
(3) — (5)	0.03980	−0.04620	−0.06357	−0.08538
(4) — (5)	0.01260	+0.02293	−0.04883	+0.09004
	0.06246	+0.02039	−0.11351	+0.04501

r	(XIV, XIV)	(XIV, XV)	(XIV, XVII)
(2) — (5)	0.08854	−0.00225	+0.08182

r	(XV, XV)	(XV, XVII)
(3) — (5)	0.1095	+0.1471
(4) — (5)	0.1743	−0.3214
	0.2838	−0.1743

r	(XVI, XVI)	(XVI, XVII)	(XVI, XVIII)	(XVI, XIX)	(XVI, XX)	(XVI, XXII)
(6) — (5)	0.08333	−0.1410	−0.08333	+0.1410	−0.04167	+0.02126

r	(XVII,XVII)	(XVII,XVIII)	(XVII,XIX)	(XVII,XX)	(XVII,XXII)	
(4) — (5)	0.3214	0.	0.	0.	0.	
(6) — (5)	0.2386	+0.1410	−0.2386	+0.07050	−0.03597	
	0.5600	+0.1410	−0.2386	+0.07050	−0.03597	

r	(XVIII,XVIII)	(XVIII,XIX)	(XVIII,XX)	(XVIII,XXII)		
(6) — (5)	0.08333	−0.1410	+0.04167	−0.02126		

r	(XIX,XIX)	(XIX,XX)	(XIX,XXII)			
(6) — (5)	0.2386	−0.07050	+0.03597			

r	(XX,XX)	(XX,XXII)				
(6) — (5)	0.04167	−0.02126				
(7) — (5)	0.04167	−0.02126				
	0.08333	−0.04252				

r	(XXII,XXII)					
(6) — (5)	0.01086					
(7) — (5)	0.01086					
	0.02172					

Hier haben wir wieder dieselben Werthe erhalten wie vorher, und es werden daher auch jetzt die Unbekannten der Endgleichungen dieselben Werthe erhalten wie vorher.

30.

Die Zusammenstellung der Gleichungen für die $z(r)$ ist jetzt

	(IX)	(X)	(XII)	(XIV)	(XV)	(XVI)
$z(1) - z(5) =$	−0.0417	−0.0644	+0.0001	−0.0469	+0.0022	
$z(2) - z(5) =$	+0.0417	+0.1133	−0.0204	−0.0885	+0.0022	
$z(3) - z(5) =$		−0.0367	+0.0381	−0.0443	−0.0609	
$z(4) - z(5) =$			−0.0229	−0.0417	+0.0888	
$z(6) - z(5) =$						+0.0833
$z(7) - z(5) =$						+0.0417

ferner	(XVII)	(XVIII)	(XIX)	(XX)	(XXII)	
$z(1) - z(5)$	−0.0818					
$z(2) - z(5)$	−0.0818					
$z(3) - z(5)$	−0.0818					
$z(4) - z(5)$	−0.1636					
$z(6) - z(5)$	−0.1410	−0.0833	+0.1410	−0.0417	+0.0213	
$z(7) - z(5)$	−0.0705	−0.0417	+0.0705	+0.0417	−0.0213	

deren Vergleichung mit den vorhergehenden ähnlichen Zusammenstellungen auch vollständige Uebereinstimmung zeigt.

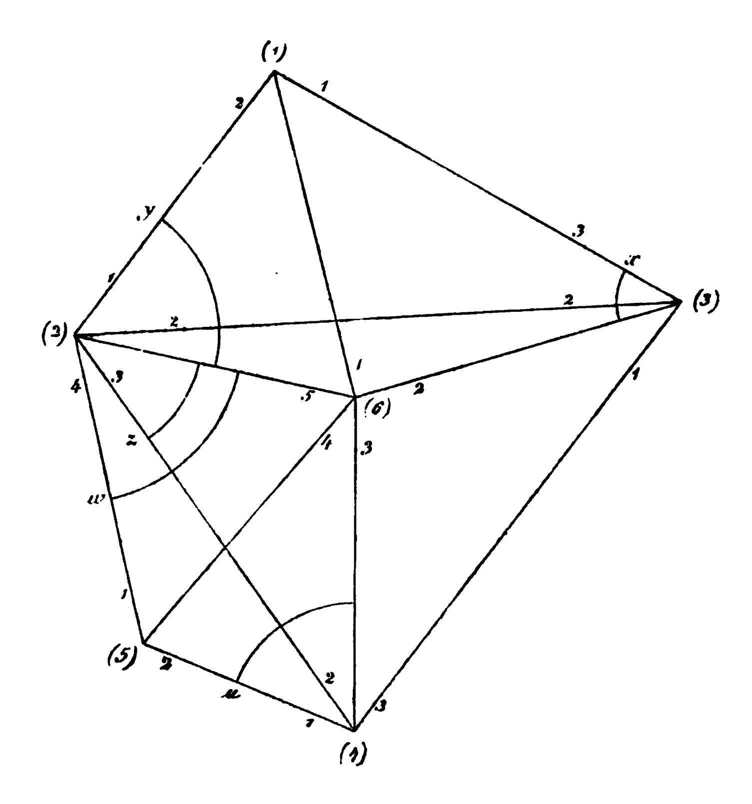
31.

Im Vorstehenden ist zur Gnüge gezeigt worden, dass die Zerlegung der Stationsgleichungen in zwei von einander unabhängige Systeme, wo dieses möglich ist, ganz ohne Einfluss auf die Endresultate ist, und die ausgeglichenen Werthe der Beobachtungen dieselben werden, wie in dem Falle, wo diese Zerlegung nicht angewandt worden ist. Es fragt sich hierauf, ob die Anwendung dieser Zerlegung in praktischer Beziehung räthlich ist, und diese Frage muss entschieden bejaht werden. Denn durch die Durchsicht des im Vorhergehenden ausgeführten Beispiels findet man, dass die Rechnung mit Anwendung der Zerlegung viel kürzer ist, wie ohne dieselbe, und dieses muss in jedem Falle eintreffen, da durch die Zerlegung immer eine Anzahl der sonst erforderlichen Hülfsgrössen Null werden. Die beiden ersten Arten der Zerlegung sind vortheilhafter wie die beiden letzten, schon wegen der Bedingungsgleichungen die bei jenen statt finden.

Suppl. 6. Ableitung der Bedingungsgleichungen in besonderen Fällen, mit Beibehaltung der im Vorhergehenden stets angewandten Form derselben.

1.

Das jetzt zu betrachtende Dreiecksnetz soll das durch die folgende Figur dargestellte sein.



Wir haben hier sechs Dreieckspunkte oder Stationen, die durch die Zeichen (1), (2), (3), (4), (5), (6) angegeben sind, und es soll angenommen werden, dass auf der

Station (1)	die Richtungen	1, 2,	bez. nach	(3), (2)
- (2)	- -	1, 2, 3, 4	- -	(1), (3), (4), (5)
- (3)	- -	1, 2, 3,	- -	(4), (2), (1)
- (4)	- -	1, 2, 3,	- -	(5), (2), (3)
- (5)	- -	1, 2,	- -	(2), (4)
- (6)	- -	1, 2, 3, 4, 5,	- -	(1), (3), (4), (5), (2)

eingeschnitten worden sind, wie in der Figur angedeutet ist. Es können immerhin von den Stationen (1), (2), (3), (4), (5) noch mehr Richtungen eingeschnitten worden sein, die aber für den jetzigen Zweck nicht beachtet zu werden brauchen. Feste Annahme ist aber hier, dass keine Richtung nach der Station (6) eingeschnitten worden sei, hingegen von der Station (6) die Richtungen nach allen anderen Stationen eingeschnitten worden seien. Es fragt sich jetzt nach den Bedingungsgleichungen, die unter diesen Umständen das Vorhandensein der Station (6) liefert.

2.

Es ist sehr leicht zu finden, dass die Station (6) in diesem besonderen Falle nur zwei Bedingungsgleichungen liefern kann, und dass diese Seitengleichungen sein müssen. Um diese zu erhalten führe ich zuerst die Hülfswinkel (6) (3) (1) $= x$ und (6) (2) (1) $= y$ ein, die auch in der Figur angedeutet sind, worauf die Dreiecke (1)(3)(6), (1)(2)(3), (1)(2)(6) die folgenden Gleichungen geben

$$\frac{(1)(6)}{(1)(3)} = \frac{\sin x}{\sin [(3)_6 - (1)_6]}$$

$$\frac{(1)(3)}{(1)(2)} = \frac{\sin [(2)_2 - (1)_2]}{\sin [(3)_3 - (2)_3]}$$

$$\frac{(1)(2)}{(1)(6)} = \frac{\sin [(1)_6 - (5)_6]}{\sin y}$$

aus welchen die Bedingungsgleichung

$$1 = \frac{\sin x \sin [(2)_2 - (1)_2] \sin [(1)_6 - (5)_6]}{\sin y \sin [(3)_3 - (2)_3] \sin [(2)_6 - (1)_6]}$$

entspringt, die aber die beiden nicht beobachteten Winkel x und y enthält.

3.

Eine zweite Bedingungsgleichung ergiebt sich aus den Dreiecken (3)(4)(6), (2)(3)(4), (2)(4)(6), und zwar erhält man zuerst die Gleichungen

$$\frac{(4)(6)}{(3)(4)} = \frac{\sin [(3)_3 - (1)_3 - x]}{\sin [(3)_6 - (2)_6]}$$

$$\frac{(3)(4)}{(2)(4)} = \frac{\sin [(3)_2 - (2)_2]}{\sin [(2)_3 - (1)_3]}$$

$$\frac{(2)(4)}{(4)(6)} = \frac{\sin [(5)_6 - (3)_6]}{\sin z}$$

wo der Hülfswinkel $z =$ (4)(2)(6) ist, und hieraus

$$1 = \frac{\sin [(3)_2 - (2)_2] \sin [(3)_3 - (1)_3 - x] \sin [(5)_6 - (3)_6]}{\sin z \sin [(2)_3 - (1)_3] \sin [(3)_6 - (2)_6]}$$

in welcher die nicht beobachteten Winkel x und z vorkommen.

4.

Eine dritte Bedingungsgleichung gewähren die Dreiecke (4)(5)(6), (2)(4)(5), (2)(5)(6), nemlich zuerst, nachdem die Winkel (5)(4)(6) $= u$, und (6)(2)(5) $= w$ gesetzt worden sind, die Gleichungen

$$\frac{(5)(6)}{(4)(5)} = \frac{\sin u}{\sin [(4)_6 - (3)_6]}$$

$$\frac{(4)(5)}{(2)(5)} = \frac{\sin [(4)_2 - (3)_2]}{\sin [(2)_4 - (1)_4]}$$

$$\frac{(2)(5)}{(5)(6)} = \frac{\sin [(5)_6 - (4)_6]}{\sin w}$$

und hieraus

$$1 = \frac{\sin u \sin[(4)_2 - (3)_2] \sin[(5)_6 - (4)_6]}{\sin w \sin[(2)_4 - (1)_4] \sin[(4)_6 - (3)_6]}$$

aus welcher wieder die nicht beobachteten Winkel u und w zu eliminiren sind.

5.

Für die Elimination der eingeführten nicht beobachteten Winkel bekommen wir aus der Figur die folgenden Gleichungen. Das Viereck (1)(2)(6)(3) giebt

$$360^0 = y + x + (2)_1 - (1)_1 + (2)_6 - (5)_6$$

Das Viereck (2)(5)(4)(6) giebt

$$360^0 = u + w + (2)_5 - (1)_5 + (5)_6 - (3)_6$$

und der Dreieckspunkt (2) giebt

$$z + y = (3)_2 - (1)_2$$
$$w + y = (4)_2 - (1)_2$$

und hieraus bekommt man

$$y = (1)_1 - (2)_1 + (5)_6 - (2)_6 - x$$
$$z = (2)_1 - (1)_1 + (3)_2 - (1)_2 + (2)_6 - (5)_6 + x$$
$$w = (2)_1 - (1)_1 + (4)_2 - (1)_2 + (2)_6 - (5)_6 + x$$
$$u = (1)_1 - (2)_1 + (1)_2 - (4)_2 + (1)_5 - (2)_5 + (3)_6 - (2)_6 - x$$

oder wenn man noch das Dreieck (3)(4)(6) zuzieht,

$$u = 180^0 + (3)_3 - (1)_3 + (3)_4 - (1)_4 + (3)_6 - (2)_6 - x$$

welcher Ausdruck etwas einfacher ist, wie der vorstehende. Die Substitution dieser Ausdrücke in die vorher gefundenen Bedingungsgleichungen bringt diese auf die folgende Form,

$$1 = \frac{\sin x \sin[(2)_2 - (1)_2] \sin[(1)_6 - (5)_6]}{\sin[(1)_1 - (2)_1 + (5)_6 - (2)_6 - x] \sin[(3)_3 - (2)_3] \sin[(2)_6 - (1)_6]}$$

$$1 = \frac{\sin[(3)_2 - (2)_2] \sin[(3)_3 - (1)_3 - x] \sin[(5)_6 - (3)_6]}{\sin[(2)_1 - (1)_1 + (3)_2 - (1)_2 + (2)_6 - (5)_6 + x] \sin[(2)_3 - (1)_3] \sin[(3)_6 - (2)_6]}$$

$$1 = \frac{\sin[(1)_3 - (3)_3 + (1)_4 - (3)_4 + (2)_6 - (3)_6 + x] \sin[(4)_2 - (3)_2] \sin[(5)_6 - (4)_6]}{\sin[(2)_1 - (1)_1 + (4)_2 - (1)_2 + (2)_6 - (5)_6 + x] \sin[(2)_4 - (1)_4] \sin[(4)_6 - (3)_6]}$$

in welchen nur noch der nicht beobachtete Winkel x vorkommt, nach dessen Elimination sie zwei von einander unabhängige Bedingungsgleichungen bilden. Die Elimination von x ist zwar möglich aber umständlich, auch würde sie die Form der Gleichungen gänzlich verändern. Diese Elimination ist aber auch überflüssig, denn man kann die Gleichungen in ihrer vorstehenden Form bequem anwenden.

6.

Die Auflösung der ersten Gleichung nach x giebt

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin[(3)_3-(2)_3]\sin[(2)_6-(1)_6]\sin[(1)_1-(2)_1+(5)_6-(2)_6]}{\left\{\begin{array}{l}\sin[(2)_2-(1)_2]\sin[(1)_6-(5)_6]\\ +\sin[(3)_3-(2)_3]\sin[(2)_6-(1)_6]\cos[(1)_1-(2)_1+(5)_6-(2)_6]\end{array}\right\}}$$

woraus man durch Hülfe der beobachteten Werthe der betr. Richtungen den Werth von x erhält. Die Substitution dieses nebst den Werthen der betr. Richtungen in die zweite und dritte Gleichung giebt die Werthe der beiden dazu gehörigen $F(\ )$. Differentiirt man ferner alle drei Gleichungen auf dieselbe Art wie in der Abhandlung gezeigt worden ist, und dividirt die erste Differentialgleichung durch den Coefficienten von δx, so bekommt man diese Variation ausgedrückt durch die Variationen der beobachteten Richtungen, die in der ersten Gleichung vorkommen. Durch Hülfe dieser Gleichung kann man aus den beiden anderen Differentialgleichungen δx eliminiren, wodurch sich die beiden von einander unabhängigen Bedingungsgleichungen der Aufgabe, ausgedrückt durch die Variationen der beobachteten Richtungen ergeben.

7.

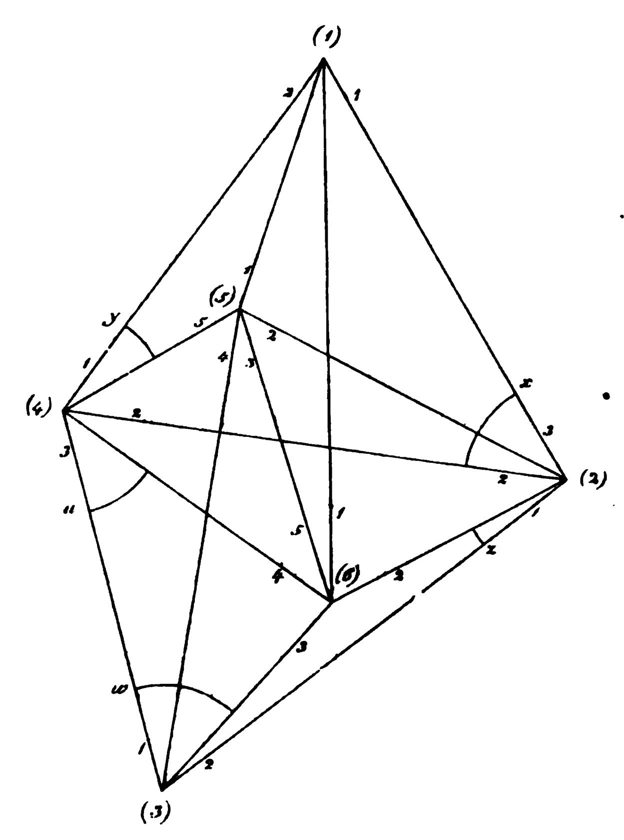
In dem im Vorhergehenden betrachteten Falle entstanden zwei von einander unabhängige Bedingungsgleichungen durch die beschriebene Einführung des Punkts (6), und überhaupt werden, wie leicht einzusehen ist, $m-3$ solcher Gleichungen vorhanden sein, wenn von diesem Punkte aus die Richtungen nach m Dreieckspunkten eingeschnitten worden sind. Alle diese Gleichungen werden eben so, wie im Vorhergehenden gezeigt worden ist, erhalten.

Nehmen wir jetzt an, dass der Punkt (6) in einem bereits fertigen, ausgeglichenen Dreiecksnetze eingeschaltet worden ist, so kommen wir auf die Ausdehnung der Pothenot'schen Aufgabe auf den Fall, in welchem man von Punkt (6) aus eine grössere Anzahl von Richtungen eingeschnitten hat, als zur Auflösung dieser Aufgabe hinreichend und nothwendig sind. Die Bedingungsgleichungen sind in diesem Falle dieselben wie oben, nur kann man jetzt nicht die Variationen der von den anderen Punkten aus beobachteten Richtungen berücksichtigen, sondern muss sich begnügen nur die vom zu bestimmenden Punkt aus beobachteten so auszugleichen, dass die Summe ihrer Fehlerquadrate ein Minimum

wird. Wie dieses bewirkt wird ergiebt sich aus dem Inhalt der Abhandlung von selbst, und braucht daher wohl hier nicht näher erörtert zu werden.

8.

Wenden wir uns jetzt zu der Aufgabe, zu welcher die folgende Figur gehört.



Hier wird angenommen, dass zwar von den Punkten (5) und (6) aus alle übrigen Punkte der Figur eingeschnitten worden sind, aber von diesen die (5) und (6) nicht. Es sollen daher auf der

Station			die Richtungen		bez. nach
Station	(1)		die Richtungen	1, 2,	bez. nach (2), (4),
-	(2)	-	-	1, 2, 3,	- - (3), (4), (1)
-	(3)	-	-	1, 2,	- - (4), (2),
-	(4)	-	-	1, 2, 3,	- - (1), (2), (3),
-	(5)	-	-	1, 2, 3, 4, 5,	- - (1), (2), (6), (3), (4),
-	(6)	-	-	1, 2, 3, 4, 5,	- - (1), (2), (3), (4), (5),

als eingeschnitten gedacht werden, gleichwie in der Figur angedeutet ist.

9.

Da die Punkte (5) und (6) unter andern durch die Messung der Winkel

$$(2)(5)(6) = (3)_5 - (2)_5\,,\ (6)(5)(4) = (5)_5 - (3)_5$$
$$(5)(6)(2) = (2)_6 - (5)_6\,,\ (5)(6)(4) = (5)_6 - (4)_6$$

vollständig bestimmt sind, so folgt dass, abgesehen von sonstigen Bedingungsgleichungen, die die Figur darbieten kann, die vorhandenen Beobachtungen von den beiden genannten Punkten aus vier von einander unabhängige Bedingungsgleichungen liefern müssen. Diese lassen sich auf ähnliche Art wie in der vorhergehenden Aufgabe aufstellen.

10.

Die Dreiecke (1)(2)(5), (1)(2)(4), (1)(4)(5) der Figur geben zuerst

$$\frac{(1)(5)}{(1)(2)} = \frac{\sin x}{\sin[(2)_5 - (1)_5]}$$
$$\frac{(1)(2)}{(1)(4)} = \frac{\sin[(2)_4 - (1)_4]}{\sin[(3)_2 - (2)_2]}$$
$$\frac{(1)(4)}{(1)(5)} = \frac{\sin[(1)_5 - (5)_5]}{\sin y}$$

und hieraus ergiebt sich

$$1 = \frac{\sin x \sin[(2)_4 - (1)_4] \sin[(1)_5 - (5)_5]}{\sin y \sin[(3)_2 - (2)_2] \sin[(2)_5 - (1)_5]}$$

wo $x = (1)(2)(5)$, $y = (1)(4)(5)$ zwei nicht beobachtete Winkel sind.

11.

Die Dreiecke (2)(3)(5), (2)(3)(4), (3)(4)(5) geben die folgenden Gleichungen

$$\frac{(3)(5)}{(2)(3)} = \frac{\sin[(3)_2 - (1)_2 - x]}{\sin[(4)_5 - (2)_5]}$$
$$\frac{(2)(3)}{(3)(4)} = \frac{\sin[(3)_4 - (2)_4]}{\sin[(2)_2 - (1)_2]}$$
$$\frac{(3)(4)}{(3)(5)} = \frac{\sin[(5)_5 - (4)_5]}{\sin[(3)_4 - (1)_4 - y]}$$

und hieraus erhält man

$$1 = \frac{\sin[(3)_2 - (1)_2 - x] \sin[(3)_4 - (2)_4] \sin[(5)_5 - (4)_5]}{\sin[(3)_4 - (1)_4 - y] \sin[(2)_2 - (1)_2] \sin[(4)_5 - (2)_5]}$$

wo x und y dieselbe Bedeutung haben wie im vor. Art.

12.

Die Dreiecke (1)(2)(6), (1)(2)(4), (1)(4)(6) geben die folgenden Gleichungen

$$\frac{(1)(6)}{(1)(2)} = \frac{\sin[(3)_2 - (1)_2 - z]}{\sin[(2)_6 - (5)_6]}$$

$$\frac{(1)(2)}{(1)(4)} = \frac{\sin[(2)_4 - (1)_4]}{\sin[(3)_2 - (2)_2]}$$

$$\frac{(1)(4)}{(1)(6)} = \frac{\sin[(1)_6 - (4)_6]}{\sin[(3)_4 - (1)_4 - u]}$$

und hieraus

$$1 = \frac{\sin[(3)_2 - (1)_2 - z]\,\sin[(2)_4 - (1)_4]\,\sin(1)_6 - (4)_6]}{\sin[(3)_4 - (1)_4 - u]\,\sin[(3)_2 - (2)_2]\,\sin(2)_6 - (5)_6]}$$

wo wieder $z = (3)(2)(6)$, $u = (3)(4)(6)$ zwei nicht beobachtete Winkel sind.

13.

Die Dreiecke (3)(4)(6), (2)(3)(4), (2)(4)(6) geben

$$\frac{(4)(6)}{(3)(4)} = \frac{\sin w}{\sin[(4)_6 - (3)_6]}$$

$$\frac{(3)(4)}{(2)(4)} = \frac{\sin[(3)_2 - (1)_2]}{\sin[(2)_3 - (1)_3]}$$

$$\frac{(2)(4)}{(4)(6)} = \frac{\sin[(2)_6 - (4)_6]}{\sin[(3)_2 - (1)_2 - z]}$$

und hieraus

$$1 = \frac{\sin w\,\sin[(3)_2 - (1)_2]\,\sin[(2)_6 - (4)_6]}{\sin[(3)_2 - (1)_2 - z]\,\sin[(2)_3 - (1)_3]\,\sin[(4)_6 - (3)_6]}$$

wo z derselbe Winkel ist wie im vor. Art. und $w = (4)(3)(6)$ ein hinzugekommener nicht beobachteter Winkel ist.

14.

Die Dreiecke endlich (2)(5)(6), (2)(4)(5), (4)(5)(6) geben

$$\frac{(5)(6)}{(2)(5)} = \frac{\sin[(3)_2 - (1)_2 - x - z]}{\sin[(2)_6 - (5)_6)}$$

$$\frac{(2)(5)}{(4)(5)} = \frac{\sin[(2)_4 - (1)_4 - y]}{\sin[(3)_2 - (2)_2 - x]}$$

$$\frac{(4)(5)}{(5)(6)} = \frac{\sin[(5)_6 - (4)_6]}{\sin[(3)_4 - (1)_4 - y - u]}$$

woraus

$$1 = \frac{\sin[(3)_2 - (1)_2 - x - z]\,\sin[(2)_4 - (1)_4 - y]\,\sin[(5)_6 - (4)_6]}{\sin[(3)_4 - (1)_4 - y - u]\,\sin[(3)_2 - (2)_2 - x]\,\sin[(2)_6 - (5)_6]}$$

hervorgeht, und die Winkel x, y, z, u dieselben sind wie im Vorhergehenden. Hiemit sind die Bedingungsgleichungen erschöpft.

15.

Um die eingeführten, nicht beobachteten Winkel als Functionen von x darzustellen, dienen die folgenden Betrachtungen. Das Viereck (1)(2)(5)(4) giebt

$$360^0 = x + y + (2)_1 - (1)_1 + (2)_5 - (5)_5$$

Das Viereck (2)(3)(4)(6) giebt

$$360^0 = u + z + (2)_3 - (1)_3 + (4)_6 - (2)_6$$

Das Dreieck (2)(5)(6) giebt

$$180^0 = (3)_2 - (1)_2 - x - z + (3)_5 - (2)_5 + (2)_6 - (5)_6$$

und das Dreieck (3)(4)(6) giebt

$$180^0 = u + w + (4)_6 - (3)_6$$

Durch die Elimination erhält man hieraus

$$y = (1)_1 - (2)_1 + (5)_5 - (2)_5 - x$$
$$z = 180^0 + (3)_2 - (1)_2 + (3)_5 - (2)_5 + (2)_6 - (5)_6 - x$$
$$u = 180^0 - (3)_2 + (1)_2 - (2)_3 + (1)_3 - (3)_5 + (2)_5 - (4)_6 + (5)_6 + x$$
$$w = (3)_2 - (1)_2 + (2)_3 - (1)_3 + (3)_5 - (2)_5 + (3)_6 - (5)_6 - x$$

16.

Löst man nun die Bedingungsgleichung des Art. 10, nachdem darin der Ausdruck für y substituirt worden ist, in Bezug auf x auf, und substituirt auch die oben erhaltenen Ausdrücke der y, z, u, w in die Bedingungsgleichungen der Artt. 11, 12, 13, 14, so erhält man

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin[(3)_2-(2)_2]\,\sin[(2)_5-(1)_5]\,\sin[(1)_1-(2)_1+(5)_5-(2)_5]}{\left\{\begin{array}{l}\sin[(2)_4-(1)_4]\,\sin[(1)_5-(5)_5]\,+\\ \sin[(3)_2-(2)_2]\,\sin[(2)_5-(1)_5]\,\cos[(1)_1-(2)_1+(5)_5-(2)_5]\end{array}\right\}}$$

$$1 = \frac{\sin[(3)_2-(1)_2-x]\,\sin[(3)_4-(2)_4]\,\sin[(5)_5-(4)_5]}{\sin[(2)_1-(1)_1+(3)_4-(1)_4+(2)_5-(5)_5+x]\,\sin[(2)_2-(1)_2)\,\sin[(4)_5-(2)_5]}$$

$$1 = \frac{\sin[(3)_5-(2)_5+(2)_6-(5)_6-x]\,\sin[(2)_4-(1)_4]\,\sin[(1)_6-(4)_6]}{\sin[(2)_1-(1)_1+(2)_5-(3)_5+(5)_6-(4)_6+x]\,\sin[(3)_2-(2)_2]\,\sin[(2)_6-(5]_6]}$$

$$1 = \frac{\sin[(3)_2-(1)_2+(2)_3-(1)_3+(3)_5-(2)_5+(3)_6-(5)_6-x]\,\sin[(2)_2-(1)_2]\,\sin[(2)_6-(4)_6]}{\sin[(3)_2-(2)_2+(3)_5-(2)_5+(2)_6-(5)_6-x]\,\sin[(2)_3-(1)_3]\,\sin[(4)_6-(3)_6]}$$

$$1 = \frac{\sin[(3)_5-(2)_5+(2)_6-(5)_6]\,\sin[(1)_1-(2)_1+(2)_4-(1)_4+(5)_5-(2)_5+x]\,\sin[(5)_6-(4)_6]}{\sin[(5)_5-(3)_5+(5)_6-(4)_6]\,\sin[(3)_2-(2)_2-x]\,\sin[(2)_6-(5)_6]}$$

die vier von einander unabhängigen Bedingungsgleichungen gleich kommen, und in der Anwendung eben so behandelt werden müssen, wie die ähnlichen der vorhergehenden Aufgabe.

17.

Wenn auf diese Art in einem bereits ausgeglichenen Dreiecksnetze zwei Punkte eingeschnitten werden, so fallen in den Differentialen der Bedingungsgleichungen wieder die Variationen der von den Punkten 1, 2, 3, 4 aus beobachteten Richtungen weg, und man kommt auf den Fall, in welchem bei der Anwendung der Aufgabe, die ich in den Astr. Nachr. B. XVIII gegeben habe, man sich mehr Data verschafft hat, wie hinreichend und nothwendig sind. Da die weitere Behandlung theils aus dem Inhalt der Abhandlung folgt, theils auf andere Art von mir a. a. O. ausgeführt worden ist, so braucht sie wohl auch hier nicht erörtert zu werden.

Suppl. 7. Berichtigung eines in der Abhandlung vorkommenden kleinen Misgriffs.

Im Art. 149 wird gesagt, dass für $m = \infty$ der mittlere, und der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung Null werden. Dieser Satz ist dahin abzuändern, dass bei stets wachsendem m die Werthe der Quotienten $\frac{W}{m-n}$ und $\frac{W}{m}$ nach einer und derselben Grenze hinstreben. Diese Berichtigung hat übrigens keinen Einfluss auf die in der Abhandlung folgenden Schlüsse.

Suppl. 8. Berechnung der $f(r,I)_s$, etc. und der (I,M), etc. ohne Zuziehung der $\eta(r,I)_s$, etc.

1.

In der Abhandlung habe ich gezeigt, dass man die Coefficienten der Endgleichungen auf vier von einander verschiedene Arten berechnen kann. Zwei dieser Arten beruhen auf der Zuziehung der $\eta(r,I)_s$, etc., und die zwei anderen sind von diesen Grössen unabhängig. Zur Berechnung der $f(r,I)_s$, etc. und der (I,M), etc., welche letzteren bei der Berechnung der Gewichte vorkommen, habe ich schliesslich nur Ein Verfahren, bei welchem die $\eta(r,I)_s$, etc. gebraucht werden angegeben, während die Abhandlung hiefür schon ein zweites Verfahren enthält, welches von diesen Grössen unabhängig ist. Dieses soll hier ausgehoben werden.

2.

Zur Berechnung der Coefficienten der Endgleichungen ohne Zuziehung der $\eta(r,I)_s$ braucht man die unbestimmte Elimination der Stationsgleichungen, wie man gesehen hat, nicht ausgeführt zu haben, will man aber auch die $f(r,I)_s$, etc. und die (I,M), etc. ohne Anwendung jener Grössen berechnen, so muss vorher jene unbestimmte Elimination ausgeführt worden sein. Ich mache daher den Anfang damit die Ausdrücke der Coefficienten dieser anzusetzen, die ich aus dem Art. 37 der Abhandlung entnehme. Bezeichnet man diese Coefficienten, um Verwechselungen vorzubeugen, mit $\{1,1\}$, $\{1,2\}$, etc. $\{2,2\}$, etc. etc. und lässt die Glieder weg, die zufolge des »ersten Verfahrens« immer Null werden, so gehen die angezogenen Ausdrücke in die folgenden über.

$$\{1,1\} = \frac{1}{(1,1)}$$
$$\{1,2\} = 0$$
$$\{1,3\} = 0$$
etc.

$$\{2,2\} = \frac{1}{(2,2,1)} + \frac{\beta'''}{(4,4,3)}\beta''' + \frac{\beta^{IV}}{(5,5,4)}\beta^{IV} + \frac{\beta^{V}}{(6,6,5)}\beta^{V} + \dots$$

$$\{2,3\} = \frac{\beta'''}{(4,4,3)}\gamma''' + \frac{\beta^{IV}}{(5,5,4)}\gamma^{IV} + \frac{\beta^{V}}{(6,6,5)}\gamma^{V} + \dots$$

$$\{2,4\} = \frac{\beta'''}{(4,4,3)} + \frac{\beta^{IV}}{(5,5,4)}\delta^{IV} + \frac{\beta^{V}}{(6,6,5)}\delta^{V} + \dots$$

$$\{2,5\} = \frac{\beta^{IV}}{(5,5,4)} + \frac{\beta^{V}}{(6,6,5)}\varepsilon^{V} + \dots$$

$$\{2,6\} = \frac{\beta^{V}}{(6,6,5)} + \dots$$

etc. etc.

$$\{3,3\} = \frac{1}{(3,3,2)} + \frac{\gamma'''}{(4,4,3)}\gamma''' + \frac{\gamma^{IV}}{(5,5,4)}\gamma^{IV} + \frac{\gamma^{V}}{(6,6,5)}\gamma^{V} + \dots$$

$$\{3,4\} = \frac{\gamma'''}{(4,4,3)} + \frac{\gamma^{IV}}{(5,5,4)}\delta^{IV} + \frac{\gamma^{V}}{(6,6,5)}\delta^{V} + \dots$$

$$\{3,5\} = \frac{\gamma^{IV}}{(5,5,4)} + \frac{\gamma^{V}}{(6,6,5)}\varepsilon^{V} + \dots$$

$$\{3,6\} = \frac{\gamma^{V}}{(6,6,5)} + \dots$$

etc. etc.

$$\{4,4\} = \frac{1}{(4,4,3)} + \frac{\delta^{IV}}{(5,5,4)}\delta^{IV} + \frac{\delta^{V}}{(6,6,5)}\delta^{V} + \dots$$

$$\{4,5\} = \frac{\delta^{IV}}{(5,5,4)} + \frac{\delta^{V}}{(6,6,5)}\varepsilon^{V} + \dots$$

$$\{4,6\} = \frac{\delta^{V}}{(6,6,5)} + \dots$$

etc. etc.

$$\{5,5\} = \frac{1}{(5,5,4)} + \frac{\varepsilon^{V}}{(6,6,5)}\varepsilon^{V} + \dots$$

$$\{5,6\} = \frac{\varepsilon^{V}}{(6,6,5)} + \dots$$

etc. etc.

$$\{6,6\} = \frac{1}{(6,6,5)} + \dots$$

etc.

etc.

die man beliebig fortsetzen kann.

3.

Wenden wir uns jetzt zum Art. 35 der Abhandlung, und führen in die dort für $(\alpha\eta)$, $(\beta\eta)$, etc. gegebenen Ausdrücke die später angewandte Bezeichnung ein, so werden sogleich

$$f(1,I)_s = \{1,1\}.q(1,I)_s$$
$$f(2,I)_s = \{2,2\}.\,q(2,I)_s + \{2,3\}.\,q(3,I)_s + \{2,4\}.\,q(4,I)_s + \{2,5\}.\,q(5,I)_s + \ldots$$
$$f(3,I)_s = \{2.3\}.\,q(2.I)_s + \{3,3\}.\,q(3,I)_s + \{3,4\}.\,q(4,I)_s + \{3,5\}.\,q(5,I)_s + \ldots$$
$$f(4,I)_s = \{2,4\}.\,q(2.I)_s + \{3,4\}.\,q(3,I)_s + \{4,4\}\,q(4,I)_s + \{4,5\}.\,q(5,I)_s + \ldots$$
$$f(5,I)_s = \{2,5\}.\,q(2.I)_s + \{3,5\}.\,q(3.I)_s + \{4.5\}.\,q(4,I)_s + \{5,5\}.\,q(5,I)_s + \ldots$$
etc. etc.

die durch allmählige Vertauschung der I mit II, III, etc. auf alle Bedingungsgleichungen ausgedehnt werden müssen.

4.

Die zur Berechnung der Gewichte erforderlichen (I,M), (II,M), etc. findet man in demselben angezogenen Art. der Abhandlung wie folgt.

$$(I,M) = \Sigma\{\, f(1,I)_s.\,k(1)_s + f(2,I)_s.\,k(2)_s + f(3,I)_s.\,k(3)_s + \ldots\}$$
$$(II,M) = \Sigma\{\, f(1.II)_s.\,k(1)_s + f(2,II)_s.\,k(2)_s + f(3,II)_s.\,k(3)_s + \ldots\}$$
$$(III,M) = \Sigma\{f(1,III)_s.\,k(1)_s + f(2,III)_s.\,k(2)_s + f(3,III)_s.\,k(3)_s + \ldots\}$$
etc. etc.

wo das Summenzeichen sich auf s bezieht. Bei der Anwendung dieses Verfahrens wird zwar die Berechnung der $\eta(r,I)_s$, etc. überflüssig, aber dafür tritt die unbestimmte Auflösung der Stationsgleichungen ein.

Suppl. 9. Die mit α, β, γ, etc. nebst angehängten Strichen bezeichneten Grössen betreffend.

1.

Von den in der Ueberschrift genannten Grössen kommen in der Abhandlung zwei Systeme vor. Das erste dieser, welches sich bei der Auflösung der Stationsgleichungen unmittelbar ergiebt, ist das folgende:

$$\begin{array}{llll} \alpha', & \beta', & \gamma', & \delta', \text{ etc.} \\ & \beta'', & \gamma'', & \delta'', \text{ etc.} \\ & & \gamma''', & \delta''', \text{ etc.} \\ & & & \delta^{IV}, \text{ etc.} \\ & & & \text{etc.} \end{array}$$

und das zweite, welches aus jenem berechnet wird ist

$$\begin{array}{rrrrl}
\alpha', & \alpha'', & \alpha''', & \alpha^{IV}, & \text{etc.} \\
 & \beta'', & \beta''', & \beta^{IV}, & \text{etc.} \\
 & & \gamma''', & \gamma^{IV}, & \text{etc.} \\
 & & . & \delta^{IV}, & \text{etc.} \\
 & & & & \text{etc.}
\end{array}$$

Dieses letztere wird vorzüglich zur Berechnung der $w(1)$, $w(2)$, etc. aus den reducirten Stationsgleichungen, so wie bei der Berechnung der $\eta(r,I)_s$, etc. und der $f(r,I)_s$, etc. gebraucht. Auch ist gezeigt worden, wie die Coefficienten der unbestimmten Elimination von diesem System abhängen. Hier werde ich zeigen, dass alle betreffenden Ausdrücke so umgeformt werden können, dass sie von dem ersten System der obigen Grössen abhängen.

2.

In den Ausgleichungen auf den Stationen habe man die Rechnung bis zu den reducirten Gleichungen fortgesetzt, nemlich bis zu dem System von Gleichungen, in welchem jede Gleichung Eine Unbekannte weniger wie die nächstvorhergehende enthält. Es werden hiebei, wenn das erste Verfahren der Abhandlung angewandt wird, alle α nebst $\beta'' = 0$ sein, und man bekommt hierauf statt der in der Abhandlung angegebenen, von β''', β^{IV}, etc. γ''', γ^{IV}, etc. δ^{IV} etc. abhängigen Ausdrücke die folgenden,

$$\begin{array}{l}
w(1) = -\chi' \\
w(2) = \quad -\chi'' \quad + \gamma'' w(4) + \delta'' w(5) + \varepsilon'' w(6) + \ldots \\
w(3) = \quad -\chi''' + \gamma''' w(4) + \delta''' w(5) + \varepsilon''' w(6) + \ldots \\
w(4) = \quad -\chi^{IV} + \delta^{IV} w(5) + \varepsilon^{IV} w(6) + \ldots \\
w(5) = \quad -\chi^{V} + \varepsilon^{V} w(6) + \ldots \\
w(6) = \quad -\chi^{VI} + \ldots \\
\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{array}$$

die eben so leicht wie alle übrigen Ausdrücke auf eine beliebige Anzahl von Unbekannten ausgedehnt werden können. Bei der Anwendung dieser Ausdrücke muss man bei der letzten derselben anfangen, und darauf die vorletzte u. s. w. berechnen. Diese Ausdrücke sind nichts weiter wie die auf die Stationsgleichungen angewandten, und anders aufgestellten Ausdrücke des Art. 49 oder bez. 142 (S. 214) der Abhandlung.

3.

Durch Hülfe der zwischen den hier in Betracht stehenden beiden Systemen stattfindenden Relationen findet man durch die Elimination leicht, statt der in der Abhandlung angegebenen Ausdrücke, die folgenden,

$$\eta(1,I)_s = q(1,I)_s$$
$$\eta(2,I)_s = q(2,I)_s$$
$$\eta(3,I)_s = q(3,I)_s$$
$$\eta(4,I)_s = \gamma''_s.\eta(2,I)_s + \gamma'''_s.\eta(3,I)_s + q(4,I)_s$$
$$\eta(5,I)_s = \delta''_s.\eta(2,I)_s + \delta'''_s.\eta(3,I)_s + \delta^{IV}_s.\eta(4,I)_s + q(5,I)_s$$
$$\eta(6,I)_s = \varepsilon''_s.\eta(2,I)_s + \varepsilon'''_s.\eta(3,I)_s + \varepsilon^{IV}_s.\eta(4,I)_s + \varepsilon^{V}_s.\eta(5,I)_s + q(6,I)_s$$

etc. etc.

bei deren Anwendung von der ersten angefangen wird. Ferner giebt eine leichte Elimination

$$f(1,I)_s = Q(1,I)_s$$
$$f(2,I)_s = Q(2,I)_s + \gamma''_s.f(4,I)_s + \delta''_s.f(5,I)_s + \varepsilon''_s.f(6,I)_s + \ldots$$
$$f(3,I)_s = Q(3,I)_s + \gamma'''_s.f(4,I)_s + \delta'''_s.f(5,I)_s + \varepsilon'''_s.f(6,I)_s + \ldots$$
$$f(4,I)_s = Q(4,I)_s + \delta^{IV}_s.f(5,I)_s + \varepsilon^{IV}_s.f(6,I)_s + \ldots$$
$$f(5,I)_s = Q(5,I)_s + \varepsilon^{V}_s.f(6,I)_s + \ldots$$
$$f(6,I)_s = Q(6,I)_s + \ldots$$

etc. etc.

die denen für die $w(1)$, $w(2)$, etc. völlig ähnlich sind, und wie diese in umgekehrter Ordnung zur Anwendung kommen.

4.

Die bei der Berechnung der Gewichte erforderlichen mit $(M,1)_s$, etc. bezeichneten Grössen werden eben so wie $\eta(1,I)_s$, etc. berechnet. Nemlich

$$(M,1)_s = k(1)_s$$
$$(M,2)_s = k(2)_s$$
$$(M,3)_s = k(3)_s$$
$$(M,4)_s = \gamma''_s.(M,2)_s + \gamma'''_s.(M,3)_s + k(4)_s$$
$$(M,5)_s = \delta''_s.(M,2)_s + \delta'''_s.(M,3)_s + \delta^{IV}_s.(M,4)_s + k(5)_s$$
$$(M,6)_s = \varepsilon''_s.(M,2)_s + \varepsilon'''_s.(M,3)_s + \varepsilon^{IV}_s.(M,4)_s + \varepsilon^{V}_s.(M,5)_s + k(6)_s$$

etc. etc.

5.

Endlich bekommt man für die Coefficienten der unbestimmten Elimination die folgenden Ausdrücke, die ich mehrerer Deutlichkeit wegen, und um sonst erforderliche, complicirte Bezeichnungen zu vermeiden, ausdrücklich für sechs Unbekannte hinschreiben werde. Die Ausdehnung derselben auf jede beliebige Anzahl von Unbekannten bietet nicht die geringste Schwierigkeit dar.

$$\begin{aligned}
\{2,6\} &= \gamma''\{4,6\} + \delta''\{5,6\} + \varepsilon''\{6,6\} \\
\{3,6\} &= \gamma'''\{4,6\} + \delta'''\{5,6\} + \varepsilon'''\{6,6\} \\
\{4,6\} &= \delta^{IV}\{5,6\} + \varepsilon^{IV}\{6,6\} \\
\{5,6\} &= \varepsilon^{V}\{6,6\} \\
\{6,6\} &= \frac{1}{(6,6,5)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{2,5\} &= \gamma''\{4,5\} + \delta''\{5,5\} + \varepsilon''\{5,6\} \\
\{3,5\} &= \gamma'''\{4,5\} + \delta'''\{5,5\} + \varepsilon'''\{5,6\} \\
\{4,5\} &= \delta^{IV}\{5,5\} + \varepsilon^{IV}\{5,6\} \\
\{5,5\} &= \frac{1}{(5,5,4)} + \varepsilon^{V}\{5,6\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{2,4\} &= \gamma''\{4,4\} + \delta''\{4,5\} + \varepsilon''\{4,6\} \\
\{3,4\} &= \gamma'''\{4,4\} + \delta'''\{4,5\} + \varepsilon'''\{4,6\} \\
\{4,4\} &= \frac{1}{(4,4,3)} + \delta^{IV}\{4,5\} + \varepsilon^{IV}\{4,6\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{2,3\} &= \gamma''\{3,4\} + \delta''\{3,5\} + \varepsilon''\{3,6\} \\
\{3,3\} &= \frac{1}{(3,3,2)} + \gamma'''\{3,4\} + \delta'''\{3,5\} + \varepsilon'''\{3,6\}
\end{aligned}$$

$$\{2,2\} = \frac{1}{(2,2,1)} + \gamma''\{2,4\} + \delta''\{2,5\} + \varepsilon''\{2,6\}$$

$$\{1,1\} = \frac{1}{(1,1)}$$

Diese haben wieder mit einigen der vorhergehenden Ausdrücken grosse Analogie, und bei der Anwendung derselben muss man wieder in jeder Abtheilung bei der letzten Gleichung anfangen.

Von den vorstehenden Ausdrücken brauche ich keinen Beweis hinzuzufügen, da sie nicht weiter als das in ausdrückliche Formeln gebrachte Verfahren der unbestimmten Elimination sind, welches ich in Schum. Astr. Nachr. B VIII. No. 192 gegeben und bewiesen habe.

Suppl. 10. Das Beobachtungsverfahren betreffend, welches Gauss in der Hannöverschen Gradmessung angewandt hat.

1.

Es ist genugsam bekannt, dass Gauss bei der Gradmessung, die er in den 20ger Jahren in Hannover ausführte, in Bezug auf die Beobachtungen selbst ein eigenthümliches Verfahren angewandt hat. Die Beschaffenheit dieses Verfahrens hat er jedoch nie vollständig der Oeffentlichkeit übergeben, denn Alles, was er darüber veröffentlicht hat, besteht in einem dem Art. 22 seiner Abhandlung »Supplementum theoriae combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae,« einverleibten Passus, aus welchem sein Beobachtungsverfahren durchaus nicht mit Bestimmtheit erkannt werden kann.

Da Alles, welches von diesem Gelehrten ausgegangen ist, die grösste Beachtung verdient, so ist man sehr darauf gespannt, zu erfahren, ob nicht in seinen hinterlassenen Papieren sich Auskunft darüber vorfinden sollte.

2.

Ein wissenschaftlicher Freund, welcher sich in der Lage befindet, hierüber am Ehesten Auskunft ertheilen zu können, machte mir kürzlich eine mündliche Mittheilung darüber, die ich hier, seinen Worten möglichst getreu folgend, aufnehme: Gauss hat Winkel beobachtet, und zwar nach dem Wiederholungsverfahren. Er hat jedes Mal den zu messenden Winkel nicht nur selbst, sondern auch dessen Supplement zum Umkreise gemessen. Er hat nicht nur die Winkel zwischen je zwei einander zunächst liegenden Dreiecksseiten, sondern vielmehr alle Winkel zwischen je zweien der auf der Station zusammen treffenden Dreiecksseiten gemessen.

3.

Ich stelle dieser Benachrichtigung zuerst den oben erwähnten Passus des »Supplementum etc.« gegenüber, welcher seinem ganzen Wortlaute

nach der folgende ist. Nachdem Gauss von den Bedingungsgleichungen, die ein Dreiecksnetz darbietet, geredet hat, führt er fort: »*Silentio tamen* »*praeterire non possumus monitum, quod theoria nostra, si applicatio pura* »*atque rigorosa in votis est, supponit, quantitates per* v, v', v'', *etc. designa-* »*tas revera vel immediate observatas esse, vel ex observationibus ita derivatas,* »*ut inter se independentes maneant, vel saltem tales censeri possint. In praxi* »*vulgari observantur anguli triangulorum ipsi, qui proin pro* v, v', v'', *etc.* »*accipi possunt; sed memores esse debemus, si forte systema insuper con-* »*tineat triangula talia, quorum anguli non sint immediate observati, sed* »*prodeant tamquam summae vel differentiae angulorum revera observatorum,* »*illos non inter observatorum numerum referendos, sed in forma composi-* »*tionis suae in calculis retinendos esse. Aliter vero res se habebit in modo* »*observandi ei simili, quem sequutus est clar. Struve* (Astr. Nachr. II p. 431) »*ubi directiones singulorum laterum ab eodem vertice proficiscentium obtinen-* »*tur per comparationem cum una eademque directione arbitraria. Tunc* »*scilicet hi ipsi anguli pro* v, v', v'', *etc. accipiendi sunt, quo pacto omnes* »*anguli triangulorum in forma differentiarum se offerent, aequationesque* »*conditionales primi generis, quibus per rei naturam sponte satisfit, tamquam* »*superfluae cessabunt. Modus observationis, quem ipse sequutus sum in dimen-* »*sione triangulorum annis praecedentibus perfecta, differt quidem tum a prio-* »*ri tum a posteriori modo, attamen respectu effectus posteriori aequiparari* »*potest, ita ut in singulis stationibus directiones laterum inde proficiscentium* »*ab initio quasi arbitrario numeratas pro quantitatibus* v, v', v'', *etc. accipere* »*oporteat. Duo jam exempla elaborabimus, alterum ad modum priorem,* »*alterum ad posteriorem pertinens.*«

4.

Betrachten wir hierauf die obige im Art 2 enthaltene Mittheilung, so begegnet uns zuerst der Ausdruck, dass Gauss nicht nur die Winkel selbst, sondern auch ihre Supplemente zum Umkreis gemessen hat. Diesen letzteren Ausdruck meine ich dahin erklären zu dürfen, dass Gauss bei seinen Messungen eine gewisse Anzahl der einzelnen Messungen der Winkel so angestellt habe, dass er die Alhidade des Theodoliten von der Linken zur Rechten, und eine eben so grosse Anzahl von Einzelnmessungen so, dass er die Alhidade von der Rechten zur Linken bewegt habe. Denn dieses kommt in der That der Messung des Sup-

plements der Winkel gleich, und ist nur eine veränderte Ausdrucksweise dafür. Dieses Verfahren wurde schon, ehe Gauss seine Gradmessung anfing, von verschiedenen Astronomen bei ihren geodätischen Messungen angewandt, es wird schon lange als ein unerlässliches Erforderniss angesehen, und wohl stets angewandt.

Gehen wir nun aber die Mittheilung ihrem ganzen Inhalte nach durch, so scheint es, als liesse sie sich mit dem oben angeführten Passus von Gauss nicht in Einklang bringen. da er darin sagt, dass sein Verfahren von dem von ihm zuerst angeführten, — dem Verfahren der Winkelmessungen — verschieden ist, und man dadurch leicht auf den Schluss geführt wird, dass er überhaupt nicht Winkel gemessen habe. Dieses war der erste Eindruck, den die genannte Mittheilung auf mich machte, aber nach einigem Nachdenken darüber kam ich darauf, dass diese Mittheilung mit dem angeführten Passus von Gauss sich in vollständigen Einklang bringen lässt. Dieser Passus, der sonst einige Dunkelheit darbietet, wird zugleich vollständig aufgeklärt.

Zwar kommt ein Nebenumstand mit in Betracht, der etwas störend auftritt; diesen werde ich weiter unten angeben, und zuerst die Zusammenstimmung der zwei scheinbar sich widerstreitenden Stellen entwickeln.

5.

Es liegt an der Hand, dass man jede Winkelmessung als einen Gyrus betrachten kann, in welchem zwei Richtungen beobachtet worden sind, und ich habe in der oft angezogenen Abhandlung gezeigt, dass man diese Eigenschaft dazu benutzen kann, um die Gattung von Bedingungsgleichungen, die Gauss die der ersten Gattung, ich aber locale genannt habe, aus der Reihe der übrigen, die sich auf das Dreiecksnetz selbst beziehen, auszuscheiden, und in den Ausgleichungen auf den Stationen vollständig zu berücksichtigen.

6.

Seien nun auf einer Station n Gegenstände zu beobachten, und habe man alle Winkel zwischen je zweien dieser unabhängig von einander beobachtet, dann sind überhaupt $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Winkel beobachtet worden, zwischen welchen $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ locale Bedingungsgleichungen statt finden.

Folgt man nun der in der Gaussischen Abhandlung ausdrücklich gegebenen, und in Bezug auf die darin vorkommenden Krayenhof'schen Dreiecke angewandten Regel, so muss man diese Bedingungsgleichungen denen, welche das Dreiecksnetz giebt, anreihen, und kann darauf das Gaussische, in derselben Abhandlung entwickelte Ausgleichungsverfahren anwenden.

Zerlegt man hingegen, wie in meiner oft angezogenen Abhandlung erklärt, und im Art. 107 durch ein Beispiel erläutert ist, diese Winkelbeobachtungen in Richtungsbeobachtungen, so erhält man $\frac{n(n-1)}{2}$ Gyri von je zwei Richtungen, die von einem beliebigen Anfangspunkt gezählt werden können. Man findet leicht dass in diesem System von Gyris jede Richtung $n-1$ mal vorkommt. Es muss nun, ehe man die verschiedenen Stationen mit einander verbinden kann, die Ausgleichung auf der Station vorgenommen werden, und diese werde ich nach dem ersten von mir gegebenen Verfahren ausführen.

7.

Die Gewichte der Beobachtungen an sich, oder die der nackten Beobachtungen sollen einander gleich gesetzt, und demzufolge in Bezug auf die Richtungen

$$p = p' = p_, = p_,' = \text{etc.} = 1$$

gesetzt werden. Zufolge des Art. 67 meiner Abhandlung werden hierauf

$$P = P_, = \text{etc.} = 2$$
$$Q = Q' = \text{etc.} = n-1$$
$$\frac{p^2}{P} = \frac{p^2}{P_,} = \text{etc.} = \frac{1}{2}$$

und nach dem Art. 69

$$(pp) = (p'p') = \text{etc.} = \frac{n-1}{2}$$
$$(pp') = (p'p'') = \text{etc.} = \frac{1}{2}$$

welche letzte Gleichung sich überhaupt auf alle (pp) bezieht, in welchen die beiden p verschiedenartige Striche haben. Zu mehrerer Deutlichkeit werde ich das Täfelchen der (pp) aufstellen, welches in dem in Rede stehenden Falle immer die folgende Form haben wird,

	p	p'	p''	p'''	etc.
p	$\frac{n-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	etc.
p'		$\frac{n-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	etc.
p''			$\frac{n-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	etc.
p'''				$\frac{n-1}{2}$	etc.
etc.					etc.

Wenden wir uns nun zum Inhalt des Art. 76 derselben Abhandlung, und bestimmen die dort mit N, N', etc. bezeichneten Grössen grade so wie dort angegeben ist, dann finden wir

$$N = N' = N'' = \text{etc.} = \text{etc.} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

und die Coefficienten der Endgleichungen auf der Station werden

$$(aa) = (bb,1) = (cc,2) = \text{etc.} = \frac{n}{2}$$

neben welchen alle Coefficienten, in deren Bezeichnung zwei verschiedene Buchstaben vorkommen $= 0$ sind. Die Verbesserungen der vorläufig angenommenen Werthe der Richtungen werden daher

$$w(1) = \frac{2(lx)}{n}$$

$$w(2) = \frac{2(lx')}{n}$$

$$w(3) = \frac{2(lx'')}{n}$$

etc.

Alle in der Abhandlung mit α, β, γ, etc. nebst angehängten Strichen bezeichneten Grössen werden Null, und das allgemeine dort entwickelte Ausgleichungsverfahren verwandelt sich in das specielle Gaussische. Der hier entwickelte Fall fügt daher den beiden in den Artt. 77 und 78 entwickelten ähnlichen Fällen einen dritten hinzu.

8.

Jetzt lässt sich der hier im Art. 3 angeführte Passus von Gauss vollständig erklären Gauss sagt, er habe nicht das von ihm zuerst angeführte Verfahren der *praxis vulgaris* befolgt, welches, wie man weiss, damals darin bestand, dass man die Winkel zwischen je zwei einander zunächst liegenden Dreiecksseiten maass, und höchstens hie und da die Messung von Summen dieser Winkel, und die Ergänzungen im ganzen Umkreis (oder Horizont) hinzufügte. In der That hat er, zufolge des

Vorhergehenden, sich nicht damit begnügt, in einzelnen Fällen die eben genannten Summen und Ergänzungen zu messen, und er konnte daher sagen, dass sein Verfahren von der *praxis vulgaris* verschieden sei. Gauss sagt ferner, er habe auch nicht das zweite vorher von ihm angeführte Verfahren, nemlich das von Struve angegebene Verfahren der Richtungsmessungen, angewandt. Er hat, dem Vorhergehenden zufolge, in der That nicht Richtungen gemessen. Die dritte Angabe von Gauss, dass sein Verfahren *respectu effectus* dem Verfahren von Struve gleich gestellt werden könne, hat sich durch die Entwickelungen des vor. Art. auch bestätigt. Nur muss hier freilich hinzugefügt werden, dass in Bezug auf diesen Punkt stillschweigend vorausgesetzt ist, dass man bei Anwendung des Struve'schen Verfahrens in jedem Gyrus alle Richtungen eingeschnitten habe, denn sollte dieses nicht der Fall sein, so wäre die Wirkung eine andere.

9.

Ich sehe mich zufällig in den Stand gesetzt, den hier gegebenen Entwickelungen ein factisches Beispiel hinzu fügen zu können. In Schum. Astr. Nachr. Band IX, No. 205 u. 206 habe ich die folgende Aufgabe gelöst: »Wenn man zwischen einer beliebigen Anzahl von Punkten »ringsum im Horizonte (oder allgemeiner in einer und derselben Ebene) »die Winkel zwischen je zweien derselben gemessen hat, die Beobach»tungen so auszugleichen, dass die Summe der Quadrate der Verbesse»rungen ein Minimum wird.«

Diese Aufgabe ist in der That dieselbe, die ich hier im Art. 7 gelöst habe, nur ist jene Auflösung von dieser durchaus verschieden. Ich habe a. a. O. ein factisches Beispiel hinzugefügt, welches darin besteht, dass ich am 31. März 1827 die Fadenabstände im Meridiankreise der hiesigen Sternwarte den Forderungen der oben angeführten Aufgabe gemäss gemessen habe. Dass die Veranlassung zur Lösung dieser Aufgabe von Gauss herrührt, habe ich am Schlusse meines Aufsatzes ausgesprochen, und es geht aus den Aufklärungen, die der gegenwärtige Aufsatz giebt, hervor, dass Gauss mir schon damals im Grunde sein Verfahren bei seinen geodätischen Vermessungen mitgetheilt hat, nur hat er diese Anwendung verschwiegen, und blos die Anwendung auf die Bestimmung der Fadenabstände in den Meridianinstrumenten genannt. Den Tag, an welchem Gauss mir diese Mittheilung machte, kann ich

jetzt nicht mehr erinnern, aber aus dem Umstande, dass die Beobachtungen meines Beispiels im März des Jahres 1827 angestellt worden sind, verbunden mit anderen Erinnerungen aus jener Zeit, die ich noch vollständig im Gedächtniss habe, darf ich schliessen, dass die Mittheilung im Laufe des Jahres 1826 erfolgt ist. Ich werde nun dieses Beispiel nach der hier gegebenen Methode berechnen.

10.

Die Beobachtungen sind die folgenden:

Fäden	(2—1)	Gemessene	Winkel	3590
-	(3—2)	-	-	3066
-	(4—3)	-	-	1808
-	(5—4)	-	-	1823
-	(6—5)	-	-	1723
-	(7—6)	-	-	1798
-	(8—7)	-	-	3293
-	(9—8)	-	-	3395
-	(3—1)	-	-	6630
-	(4—2)	-	-	4883
-	(5—3)	-	-	3645
-	(6—4)	-	-	3570
-	(7—5)	-	-	3528
-	(8—6)	-	-	5085
-	(9—7)	-	-	6683
-	(4—1)	-	-	8438
-	(5—2)	-	-	6713
-	(6—3)	-	-	5390
-	(7—4)	-	-	5353
-	(8—5)	-	-	6828
-	(9—6)	-	-	8476
-	(5—1)	-	-	10280
-	(6—2)	-	-	8438
-	(7—3)	-	-	7188
-	(8—4)	-	-	8656
-	(9—5)	-	-	10223

Fäden		Gemessene Winkel	
Fäden	(6—1)	Gemessene Winkel	12026
-	(7—2)	- -	10253
-	(8—3)	- -	10463
-	(9—4)	- -	12056
-	(7—1)	- -	13828
-	(8—2)	- -	13523
-	(9—3)	- -	13861
-	(8—1)	- -	17118
-	(9—2)	- -	16948
-	(9—1)	- -	20478

Diese Beobachtungen habe ich a. a. O. in Einheiten des Umlaufs der Mikrometerschraube des angewandten Heliometers ausgedrückt, hier habe ich zur Vermeidung der Nullen, die sonst in den Rechnungen zum Vorschein kommen würden, den tausendsten Theil dieses Umlaufs zur Einheit gewählt.

11.

Es müssen jetzt zuerst durch Additionen der gemessenen Winkel die ihnen entsprechenden Richtungen berechnet werden, deren erste willkührlich ist, und für welche ich daher den Werth 1000 annehmen werde. Hierauf sind vorläufige Werthe der Richtungen nach Gutdünken anzunehmen, und die Unterschiede dieser mit den beobachteten Werthen zu berechnen. Die Form, in welcher diese Rechnungen aufzustellen sind, ist am Zweckmässigsten die der ersten Stationstäfelchen der Abhandlung, nur wird im gegenwärtigen Falle dieses Täfelchen auch die beobachteten Werthe der Richtungen zugleich enthalten müssen. Dieses Täfelchen ist jetzt das folgende, dessen Columnen, die nicht besonders überschrieben sind, sowohl die beobachteten Richtungen, wie die Unterschiede dieser von den vorläufig angenommenen Werthen derselben enthalten.

r	Vorl. Werthe							
1	1000	1000						
		0						
2	4590	4590	4590					
		0	0					
3	7656		7656	7656				
			0	0				
4	9464			9464	9464			
				0	0			
5	11287				11287	11287		
					0	0		
6	13010					13010	13010	
						0	0	
7	14808						14808	
							0	
8	18101							
9	21496							
1			1000					
			0					
2				4590				
				0				
3			7630		7656			
			—26		0			
4				9473		9464		
				+9		0		
5					11301		11287	
					+14		0	
6						13034		
						+24		
7	14808						14815	
	0						+7	
8	18101	18101						
	0	0						
9		21496						
		0						
1			1000					
			0					
2				4590				
				0				
3					7656			
					0			
4			9438			9464		
			—26			0		
5				11303			11287	
				+16			0	
6	13010				13046			13010
	0				+36			0
7		14808				14817		
		0				+9		

r	Vorl. Werthe							
8	18095 −6						18115 +14	
9		21491 −5						21486 −10
1	1000 0					1000 0		
2		4590 0					4590 0	
3			7656 0					7656 0
4				9464 0				
5	11280 −7				11287 0			
6		13028 +18				13026 +16		
7			14844 +36				14843 +35	
8				18120 +19				18119 +18
9					21510 +14			
1		1000 0			1000 0		1000 0	
2			4590 0			4590 0		
3				7656 0				
4	9464 0							
5								
6								
7		14828 +20						
8			18113 +12		18118 +17			
9	21522 +26			21517 +21		21538 +42	21478 −18	

Ich habe hier der leichteren Uebersicht wegen alle Zahlen hingeschrieben, in der Praxis würde man aber alle Richtungen weglassen können, die mit den vorläufigen Werthen übereinstimmen müssen.

12.

Das folgende Täfelchen ist das zweite Stationstäfelchen, welches auf einfache Weise dadurch aus dem ersten folgt, dass man das arithmetische Mittel aus der Summe der Fehler, die jeder Gyrus zeigt, von diesen Fehlern abzieht; eine Rechnung welche sich im gegenwärtigen Falle im Kopfe machen lässt.

No. des Gyrus	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	0	0							
2		0	0						
3			0	0					
4				0	0				
5					0	0			
6						0	0		
7							0	0	
8								0	0
9	+13.0		−13.0						
10		−4.5		+4.5					
11			−7.0		+7.0				
12				−12.0		+12.0			
13					−3.5		+3.5		
14						+3.0		−3.0	
15							+2.5		−2.5
16	+13.0			−13.0					
17		−8.0			+8.0				
18			−18.0			+18.0			
19				−4.5			+4.5		
20					−7.0			+7.0	
21						+5.0			−5.0
22	+3.5				−3.5				
23		−9.0				+9.0			
24			−18.0				+18.0		
25				−9.5				+9.5	
26					−7.0				+7.0
27	−8.0					+8.0			
28		−17.5					+17.5		
29			−9.0					+9.0	
30				−13 0					+13.0
31	−10.0						+10.0		
32		−6.0						+6.0	
33			−10.5						+10.5
34	−8.5							+8.5	
35		−21.0							+21.0
36	+9.0								−9.0
(lx), (lx'), etc.	+12.0	−66.0	−75.5	−47.5	−6.0	+55.0	+56.0	+37.0	+35.0

r	Vorl. Werthe							
8	18095 −6						18115 +14	
9		21491 −5						21486 −10
1	1000 0					1000 0		
2		4590 0					4590 0	
3			7656 0					7656 0
4				9464 0				
5	11280 −7				11287 0			
6		13028 +18				13026 +16		
7			14844 +36				14843 +35	
8				18120 +19				18119 +18
9					21510 +14			
1		1000 0			1000 0		1000 0	
2			4590 0			4590 0		
3				7656 0				
4	9464 0							
5								
6								
7		14828 +20						
8			18113 +12		18118 +17			
9	21522 +26			21517 +21		21538 +42	21478 −18	

Ich habe hier der leichteren Uebersicht wegen alle Zahlen hingeschrieben, in der Praxis würde man aber alle Richtungen weglassen können, die mit den vorläufigen Werthen übereinstimmen müssen.

12.

Das folgende Täfelchen ist das zweite Stationstäfelchen, welches auf einfache Weise dadurch aus dem ersten folgt, dass man das arithmetische Mittel aus der Summe der Fehler, die jeder Gyrus zeigt, von diesen Fehlern abzieht; eine Rechnung welche sich im gegenwärtigen Falle im Kopfe machen lässt.

No. des Gyrus	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	0	0							
2		0	0						
3			0	0					
4				0	0				
5					0	0			
6						0	0		
7							0	0	
8								0	0
9	+13.0		−13.0						
10		−4.5		+4.5					
11			−7.0		+7.0				
12				−12.0		+12.0			
13					−3.5		+3.5		
14						+3.0		−3.0	
15							+2.5		−2.5
16	+13.0			−13.0					
17		−8.0			+8.0				
18			−18.0			+18.0			
19				−4.5			+4.5		
20					−7.0			+7.0	
21						+5.0			−5.0
22	+3.5				−3.5				
23		−9.0				+9.0			
24			−18.0				+18.0		
25				−9.5				+9.5	
26					−7.0				+7.0
27	−8.0					+8.0			
28		−17.5					+17.5		
29			−9.0					+9.0	
30				−13.0					+13.0
31	−10.0						+10.0		
32		−6.0						+6.0	
33			−10.5						+10.5
34	−8.5							+8.5	
35		−21.0							+21.0
36	+9.0								−9.0
(lx), (lx'), etc.	+12.0	−66.0	−75.5	−47.5	−6.0	+55.0	+56.0	+37.0	+35.0

Da hier $n=9$ ist, so wird zufolge des Art. 7

$$w(1) = + \tfrac{2}{9} \times 12{,}0\ ,\quad w(2) = - \tfrac{2}{9} \times 66{,}0\ ,\ \text{etc.}$$

oder

$$\begin{aligned}
w(1) &= + 2.67 \\
w(2) &= - 14.67 \\
w(3) &= - 16.78 \\
w(4) &= - 10.55 \\
w(5) &= - 1.33 \\
w(6) &= + 12.22 \\
w(7) &= + 12.44 \\
w(8) &= + 8.22 \\
w(9) &= + 7.78
\end{aligned}$$

und fügt man diese Werthe den oben vorläufig angenommenen Werthen der Richtungen hinzu, so erhält man die folgenden wahrscheinlichsten Werthe derselben,

$$\begin{aligned}
y(1) &= 1002.67 \\
y(2) &= 4575.33 \\
y(3) &= 7639.22 \\
y(4) &= 9453.45 \\
y(5) &= 11285.67 \\
y(6) &= 13022.22 \\
y(7) &= 14820.44 \\
y(8) &= 18109.22 \\
y(9) &= 21503.78
\end{aligned}$$

In den A. N. No. 206 fand ich, in der hier angenommenen Einheit ausgedrückt, die Werthe der Winkel wie folgt, denen ich die aus den vorstehenden Richtungen folgenden hinzufüge.

$$\begin{aligned}
2-1 &= 3572.7 \ldots\ldots 3572.66 \\
3-2 &= 3063.9 \ldots\ldots 3063.89 \\
4-3 &= 1814.2 \ldots\ldots 1814.23 \\
5-4 &= 1832.2 \ldots\ldots 1832.22 \\
6-5 &= 1736.5 \ldots\ldots 1736.55 \\
7-6 &= 1798.2 \ldots\ldots 1798.22 \\
8-7 &= 3288.8 \ldots\ldots 3288.78 \\
9-8 &= 3394.6 \ldots\ldots 3394.56
\end{aligned}$$

die, wie man sieht, mit jenen vollständig übereinstimmen.

13.

Ich komme jetzt auf den Nebenumstand, dessen ich im Art. 4 erwähnt habe, und der etwas störend auftritt.

Zufolge der oft angezogenen Abhandlung ist, mit Bezug darauf dass alle ursprünglichen Gewichte gleich 1 gesetzt worden sind, die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler

$$W = (ll) - (lx)\,w(1) - (lx')\,w(2) - (lx'')\,w(3) - \ldots$$

wo (ll) die Summe der Quadrate der Fehler bezeichnet, die das zweite Stationstäfelchen angiebt. Für unser Beispiel findet man

$$(ll) = 6153$$

und

$$(lx)\,w(1) + (lx')\,w(2) + \ldots = 4721$$

folglich

$$W = 1432$$

A. N. No. 206 wurde, in die hier angewandte Einheit übertragen,

$$W = 2868$$

gefunden, welcher Werth, bis auf einen kleinen, zu übergehenden Unterschied, das Doppelte von dem hier gefundenen ist. Nun ist aber hier das Gewicht einer Richtung = 1 gesetzt, während dort das Gewicht eines Winkels = 1 gesetzt wurde, und demzufolge muss aus einem nahe liegenden Grunde hier der Werth der Grösse W halb so gross sein wie dort. Die beiden vorstehenden Resultate für W befinden sich also nicht minder mit einander in Uebereinstimmung wie die Werthe der Richtungen und Winkel.

Nach dem Art. 150 der oft angezogenen Abhandlung steht die Berechnung des Divisors D, des Ausdrucks, welcher den schliesslichen mittleren Fehler einer Richtung giebt, wie folgt:

$$\begin{array}{rrr} (Al) = & & 72 \\ (As) = & & 1 \\ (Ab) = & & 0 \\ -(Ax) = & - & 9 \\ -(Au) = & - & 36 \\ \hline D = & & 28 \end{array}$$

denselben Werth habe ich in No. 206 der A. N. gefunden, obgleich ich dort diesen Divisor auf ganz andere Art berechnet habe. Berechnet man daher aus den hier erhaltenen Daten den mittleren Fehler einer Richtungsmessung, und vergleicht ihn mit dem a. a. O. erhaltenen mittleren Fehler einer Winkelmessung, so wird das Verhältniss des erstgenannten Fehlers zum zweitgenannten wie $\sqrt{\frac{1}{2}} : 1$ sein, welches mit einem bekannten Satze der Wahrscheinlichkeitsrechnung übereinstimmt.

14.

Die von mir auf zwei, ganz von einander verschiedenen Wegen erhaltenen Resultate sind in jeder Beziehung mit einander identisch, und so wird es nicht blos in dem hier ausgeführten Beispiele, sondern stets der Fall sein. Vergleichen wir aber den letzten Theil dieser Resultate mit der oft angezogenen Abhandlung von Gauss, so kommen wir auf einen Unterschied.

Die Durchführung des Beobachtungsverfahrens, welches hier als das von Gauss angewandte angenommen worden ist, giebt in Bezug auf die Ausgleichung auf den Stationen für die Summe der Fehlerquadrate einen von der Null verschiedenen Werth, während Gauss in seiner Abhandlung dieser Summe gar nicht erwähnt, und sie folglich stillschweigend $= 0$ gesetzt hat. Es knüpft sich hieran noch die folgende Folgerung. Wenn man annimmt, dass bei einer Triangulation auf jeder Station dasselbe, im Vorhergehenden für das Gaussische Beobachtungsverfahren gehaltene, Verfahren ausgeführt worden ist, so bekommt der Divisor D des Ausdrucks für den schliesslichen mittleren Fehler einer Richtung (oder eines Winkels), der sich nach der Ausgleichung des Netzes ergiebt, einen von der Anzahl der Bedingungsgleichungen oder, von (Ab), verschiedenen Werth.

Gauss hat in dem in seiner Abhandlung aus seiner Gradmessung entlehnten Beispiel den, von den Ausgleichungen auf den Stationen herrührenden, hier für das Beispiel berechneten Theil von W nicht in Betracht gezogen, und $D = (Ab)$ gesetzt. Die aus den obigen Betrachtungen sich ergebenden Gesammtwerthe von W und D sind beide nothwendig grösser als die von Gauss angewandten, aber eine Proportionalität in

den Vergrösserungen kann auf keinen Fall angenommen werden, da sie von zufälligen Umständen abhängen.

15.

Wenden wir hierauf noch einen Blick auf das Verfahren der Richtungsbeobachtungen. Auf allen Stationen, auf welchen Richtungen beobachtet werden, und zugleich in jedem Gyrus alle Richtungen beobachtet worden sind, wird $W = 0$, wenn man zur Bestimmung dieser Grösse die Resultate der Gruppen von Gyris anwendet. Die Anwendung der Gruppen von Gyris zu diesem Zweck ist, wenn Winkel beobachtet worden sind, der Anwendung der Endresultate der Winkelbeobachtungen völlig analog. Wenn auf allen Stationen Richtungen auf solche Art, wie eben verlangt wurde, beobachtet worden sind, dann wird am Ende der Ausgleichungsrechnungen $D = (Ab)$.

Wenn nur die eigentlichen Dreieckswinkel beobachtet worden sind, und man etwa vorhandene locale Bedingungsgleichungen mit den übrigen Bedingungsgleichungen zugleich behandelt, dann finden die beiden eben erklärten Gleichungen wieder statt. Es werden nemlich für die Stationen wieder $W = 0$, und für die schliessliche Berechnung des mittleren Fehlers wird wieder $D = (Ab)$. In Bezug auf das in der Gaussischen Abhandlung aus den Krayenhof'schen Dreiecken entlehnte Beispiel stimmt daher die Berechnung des mittleren Fehlers mit den vorstehenden Auseinandersetzungen überein, aber in Bezug auf das aus eigenen Beobachtungen entlehnte Beispiel ist dieses nicht der Fall.

16.

Es bildet sich von selbst in Folge der vorstehenden Betrachtungen die Schlussfrage: Warum hat Gauss die im vorvor. Art. erklärten Umstände, die unzweifelhaft vorhanden sind, nicht berücksichtigt? Eine unmittelbare Antwort auf diese Frage können wir nicht mehr erhalten, da Gauss nicht mehr unter den Lebenden weilt. Eine mittelbare Antwort von ihm selbst wäre durch seinen litterarischen Nachlass vielleicht zu erhalten, doch kann ich jetzt nicht wissen, ob dieses der Fall sein wird. Sollte eine Aufklärung von Gauss selbst nicht aufgefunden werden können, so bleibt uns nur übrig zu vermuthen, dass entweder das

oben erklärte Beobachtungsverfahren doch nicht ganz mit dem Gaussischen übereinstimmt, oder dass er die in Rede stehenden Umstände übersehen hat. Wenn die letztere Vermuthung richtig sein sollte, so wäre sie in Bezug auf Gauss ein äusserst vereinzelt dastehender Fall. Es ist jedenfalls sehr zu bedauern, dass Gauss sein Beobachtungsverfahren nicht veröffentlicht hat.

Druckfehler.

S. 69 Z. 5 v. u. statt: wahren dieser; lies: wahren Werth dieser.

S. 148 - 5 - - - Arten überein; - Arten erhaltenen überein.

